Schriften

Schriften
herausgegeben von der Naturforscher-Gesellschaft
bei der Universität Dorpat.

II.

Einige Spielarten der Fichte.

Schlangenfichte, astlose Fichte, pyramidale Fichte, Trauerfichte, Hängefichte, Kugelfichte, Krummfichte oder Sumpffichte, nordische Fichte (obovata).

Von

Graf Fr. Berg.

Dorpat.

Druck von C. Mattiesen

1887

Schriften
herausgegeben von der Naturforscher-Gesellschaft
bei der Universität Dorpat.
II.

Einige Spielarten der Fichte.

Schlangenfichte, astlose Fichte, pyramidale Fichte, Trauerfichte, Hängefichte, Kugelfichte, Krummfichte oder Sumpffichte, nordische Fichte (obovata).

Von

Graf Fr. Berg.

Dorpat.
Druck von C. Mattiesen.
1887.

Дозволено цензурою. — Дерптъ, 20. Іюля 1887.

Einige Spielarten der Fichte.

Stimmt die darwinische Theorie mit den Thatsachen, welche wir bei den Spielarten der Fichte beobachten können überein, oder wie sollen wir uns diese Erscheinungen sonst erklären?

Um diese Frage besprechen zu können muss ich zunächst den wirklichen Thatbestand festzustellen und wenigstens einige der Widersprüche verschiedener Forscher aufzuklären suchen, denn sogar unter den Namen unseres Weihnachtsbaums herrscht eine solche Verwirrung, als bauten wir am Thurm zu Babel. Unter den vielen Namen dieses Baumes, scheint mir „Fichte“ in der deutschen Schriftsprache der gebräuchlichste zu sein. In der Umgangssprache nennt man ihn in Deutschland meist Rothtanne oder auch einfach Tanne, obgleich mit diesem letzten Namen im südlichen Deutschland die Weisstanne gemeint wird. *Abies pectinata D. C.* Hier in Livland heisst die Fichte ganz allgemein „Grähne“ wohl aus dem schwedischen „Gran“, während man mit „Tanne“ ebenso allgemein die Kiefer, *Pinus silvestris*, schwedisch Tall, bezeichnet. Auch dieser Name stammt also hier in Livland wahrscheinlich aus schwedischen Zeiten. Nur zu Weihnachten scheint man sich hier des einen in Deutschland gebrauchten Namens auch zu besinnen, denn als Weihnachtsbaum wird die Fichte auch hier Tanne genannt. Ferner nennt man ganz allgemein die Zapfen der Fichte Tannenzapfen. In einer Randbemerkung zu seiner Abhandlung . . . „Die Schlangenfichte“ [1]), hält Professor Caspari es für nothwendig zu erklären: „Mit Fichte ist hier immer der Baum *Picea excelsa Link.*, nach der gebräuchlichen Förstersprache bezeichnet, der in der Provinz Preussen Tanne genannt wird, während die Volkssprache unter Fichte allgemein hier die Kiefer *Pinus silvestris L.* versteht.

Verschiedene Namen der Fichte.

Im Holzhandel hat es wegen dieser Namenverwirrung so oft Missverständnisse gegeben, dass man jetzt meist die Bezeichnung: „rothes Holz“ für

1) Schriften der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg. XIV. Jahrgang. 1873. II. Abtheilung p. 116.

Pinus silvestris Kiefer und „weisses Holz“ für *Picea excelsa* Fichte sagt, weil das Kernholz der *Pinus silvestris* harziger, daher etwas röthlicher oder eigentlich röthlich-gelber gefärbt ist, als das der *Picea excelsa.*

Mitunter hört man für die Fichte auch Namen wie Schwarztanne, Pechtanne, Feiche, Daxen und dergleichen mehr gebrauchen.

Die lateinischen Namen sind: *Pinus Abies L.*, *Abies excelsa DeC.*, *Picea excelsa* oder *Picea vulgaris Link*, *Pinus Picea du Roi*, *Abies Picea Mill.* Russisch heisst der Baum *Ель* (Jel), estnisch *Kuus*, lettisch *Egle.*

Mannigfaltigkeit der Formen.

In einem gleichmässigen Bestande eines Fichtendickichts scheinen die Bäume einander so vollkommen ähnlich, wie es bei wenigen anderen Baumarten der Fall ist. Wo die Stämme aber vereinzelt stehen, so dass man den Astwurf genauer sehen kann, da erkennt man bei einiger Aufmerksamkeit sehr bald grosse Unterschiede [1]), zunächst darin, dass der eine Baum dicht, der andere mager beastet ist, die Zweige an den Aesten entweder wagerecht oder aufsteigend verlaufen, in anderen Fällen wie Schnüre vom Ast herabhängen. Auch in der Belaubung zeigt sich eine grosse Verschiedenheit: die Nadeln können sehr dicht oder sehr undicht gestellt sein, die Länge, Dicke und Form der Nadeln variirt unglaublich. Ein Zweig, den ich hier in Sagnitz (bei Dorpat-Livland-Russland) fand, war so klein und hatte so kleine Nadeln, dass er fast einer Erika und nicht einer gewöhnlichen Fichte anzugehören schien: einige Nadeln waren nur 3,3 mm. lang. Andere Nadeln, die ich ebenfalls hier in Sagnitz gefunden, erreichten 35 mm. Länge, 3 mm. Breite und gegen 2 mm. Dicke; die meisten von ihnen waren recht stark gekrümmt. Ich würde gerne hören, ob Botaniker noch kleinere oder noch grössere Nadeln beobachtet haben und unter welchen Umständen sie wuchsen. Meine kleinen Nadeln fand ich an einem etwa 30 cm. hohen, gegen 15 Jahre alten Bäumchen, das als Unterholz in einem lichten Walde auf sandigem Boden stand. Die langen Nadeln wuchsen am Stamm (nicht am Ast) eines jungen, in seinem oberen Theil fast astlosen Baumes, auf offenem Standort. (Näheres berichte ich weiter unten.)

Nadeln.

Schlangenfichte.

Namen der Schlangenfichte.

Den höchsten Grad der mageren Beastung erreicht die Fichte in der Form, welche man Schlangenfichte genannt hat. *Picea excelsa Link*, *Abies excelsa Poiret* var. *virgata Jacques*, *Picea excelsa Link* var, *denudata Carr.* Sehr allgemein wird diese Varietät auch *Picea excelsa* var. *viminalis Alströmer* genannt. Man spricht sogar ausdrücklich von der ächten Alströmer Schlangenfichte. Das ist aber ein grosses Versehen. *P. vimunalis* ist die Hängefichte, bei der die Aeste ersten Grades wie gewöhnlich verlaufen und wie gewöhnlich

1) Dr. F. C. Schübeler, Prof. der Botanik in Christiania: Die Pflanzenwelt Norwegens. 1875 p. 157 u. f.

Nach meiner Beobachtung ist *Abies excelsa DC* eine in mehrerer Beziehung weit mehr variabele Art, als man, wie es scheint, bisher geglaubt hat.

mit Zweigen (Aesten zweiten Grades) besetzt sind. Diese Zweige (zweiten Grades) aber hängen wie Schnüre senkrecht herab. Bei der Schlangenfichte dagegen sind es die Aeste ersten Grades, welche fast ganz ohne Zweige, wie Schlangen, vom Stamm abstehen oder hängen. Nach Caspari [1]) beschreibt Alströmer die *Pinus viminalis* etwa so: „Aeste ersten Grades zahlreich, die unteren fast wagerecht, nur wenig allmählich abwärts geneigt, Spitzen meist etwas ansteigend, oberen schief aufrecht. Aeste zweiten Grades zahlreich, sehr lang, peitschen- oder strickförmig, senkrecht hinabhängend, dünn, bis 10 Fuss und darüber lang, Aeste 3—5 Grades auch hängend, selten“.

Caspari ist, wie mir scheint, der einzige Botaniker, der diese Beschreibung beachtet hat. Er beschreibt und zeichnet auch beide Bäume. Diese Hängefichte bezeichnet Caspari als: *Pinus viminalis Alströmer, Picea excelsa Link* var. *viminalis Caspari.* Eine Alströmersche Hangefichte. Schriften der physik.-ökon. Gesellschaft zu Königsberg. Jahrgang XIX, 1878. Die Schlangenfichte aber, welche er sehr ausführlich bespricht, nennt er: *Picea excelsa Link* var. *virgata, Jacques* var. *denudata Carr.* Dagegen macht z. B. der Dr. F. C. Schübeler, Prof. d. Botanik an d. Universität in Christiania, in seinem Werk „Die Pflanzenwelt Norwegens 1875 p. 161“ die Verwechselung in um so auffälligerer Weise, als er auch beide Bäume: die Schlangenfichte und die Alströmer'sche Hängefichte beschreibt, er sagt wörtlich: „..... *Abies excelsa DC.* var. *viminalis Auct.*, der sogenannten Schlangenfichte, deren Aeste keine oder doch nur sehr wenige Seitenzweige ansetzen und sich hauptsächlich nur an den Spitzen verlängern. . . . (Das halte ich für die Schlangenfichte. Berg.) Ferner: „An vielen Stellen findet man eine Varietät, welche als eine eigene Form zwischen der Schlangenfichte und der gemeinen Fichte zu stehen scheint. Bei dieser Form haben die Aeste gewöhnlich Seitenzweige, wie bei *Abies excelsa*, aber diese sind stark herabhängend (fast ohne sich zu verzweigen) und können eine Länge von 6—7 Fuss erreichen.“ Dieses ist der Baum, den Alströmer *Pinus viminalis* nennt, aber nicht die Schlangenfichte, welche jetzt allerdings sehr allgemein *viminalis* genannt wird und zwar fälschlicher Weise meist mit ausdrücklicher Berufung auf Alströmer, was Schübeler allerdings nicht thut.

Um es ausser der Abbildung (siehe Tafel I, II, III und IV) auch mit Worten zu beschreiben und leichter verständlich zu machen, wie eine Schlangenfichte aussieht, erinnere ich daran, dass die Fichte sich gewöhnlich sehr regelmässig verzweigt; bei jedem Jahrestrieb befindet sich ein Quirl von Aesten und jeder Ast treibt jährlich wieder Seitenzweige. Bei der Schlangenfichte dagegen findet von Hause aus fast gar keine Verzweigung statt; die Aeste ersten Grades wachsen immer län-

1) Caspari p. 125.

ger und länger; in der Jugend starren sie gewöhnlich fast wagerecht vom Stamm ab und sehen, rund umher mit starken Nadeln bis zum 8. und 10. Jahrestriebe dicht besetzt, wie runde Würste aus. Der Baum erhält hierdurch ein höchst eigenthümliches und auffallendes Aussehen. Man wird an den Typus der Araucarien erinnert.

Der Professor Robert Caspari in Königsberg hat Angaben über die Schlangenfichte gesammelt und in den Schriften der physicalisch-öconomischen Gesellschaft zu Königsberg 1873 Bd. XIV p. 115 u. f. veröffentlicht. Er fordert mich auf, die Beschreibung der von mir beobachteten Exemplare auch zu veröffentlichen. Ich werde die vielfachen interessanten Citate, welche Caspari's Arbeit enthält, nicht wiederholen, sondern meine Beschreibungen als Anschluss an seine Arbeit behandeln, obgleich ich später auch auf andere Formen der Fichte und allgemeinere Betrachtungen übergehe.

Schlangenfichte aus Finnland. Auf meinem Gute in Finnland, Moisio, Gouv. Niland (Helsingfors), fand ich im Januar 1885 als Wegweiser auf einem gefrorenen See eine junge Schlangenfichte. Ich nahm das Bäumchen nach Petersburg mit, liess es dort photographiren und lege hier ein Bild bei (Tafel I). Ueber den Standort, an dem der Baum gewachsen, vermag ich nichts anzugeben. Der Stamm, so weit ich ihn zu sehen bekam, war etwa 2,50 m. hoch. Da der untere Theil des Stammes von seinen Aesten entblösst war, nahm ich nur den oberen Theil, 1,10 m. lang, mit; auch hier fehlten noch einige Aeste, 60 cm. sind beastet. Der Stamm, so weit er mir jetzt noch vorliegt, besteht aus 8 Jahrestrieben: 1877 = 30 cm., 1878 = 20 cm., 1879 = 14 cm., 1880 = 14 cm., 1881 = 10 cm., 1882 = 4 cm., 1883 = 6 cm., 1884 = 12 cm. Da es bei Schlangenfichten oft schwer ist, die Jahrestriebe zu unterscheiden, bemerke ich ausdrücklich, dass ich hier nur wegen der Jahrestriebe von 82 und 83 Zweifel hegte, ob ich sie nicht zusammen als einen Trieb zählen solle. Ich habe aber die Triebe nach denen der Aeste, nach den Knoten im Mark des Stammes und den Jahresringen controlirt und bin sicher, dass der vorliegende Stamm aus 8 Jahrestrieben besteht.

An der oberen Hälfte des Jahrestriebes von 1877 sind 2 kleine Aeste vorhanden gewesen. Der Astquirl am Ende des Triebes von 1878 besteht aus 2 ganz kleinen Aesten von 5 cm. Länge und einem grossen von 50 cm. An dem Triebe von 1879 zweigen sich auf seiner oberen Hälfte 3 Aeste ab, von denen einer die Länge von 60 cm. erreicht. Von diesem Ast bis zum Ende des Triebes haben die Nadeln am Stamm besonders dicht gestanden. Der Astquirl am Ende des Jahrestriebes besteht aus 2 ganz kleinen und einem Aste von 60 cm. Der Quirl am Ende des Triebes von 1880 hat 3 gut entwickelte Aeste, von denen der eine von 4 Jahrestrieben und 45 cm. Länge gar keinen Seitenzweig hat. Ein zweiter Ast theilt sich nach dem ersten Triebe an einem Punkt in 8 Zweige, aber alle 8 behalten dieselbe Richtung bei, d. h. anstatt

TAFEL I.



SCHLANGENFICHTE AUS MOISIO-FINNLAND.

wie gewöhnlich möglichst rechtwinklig auseinander zu streben, liegen sie fast wie Ruthen in einem Besen parallel und dicht neben einander. Auf der Photographie steht dieser Ast nach hinten. Der Trieb von 1881 hat einen ganz kleinen Zweig in der Mitte des Triebes, der Quirl an seinem Ende besteht aus 2 grösseren und einem kleinen Ast. Die beiden kurzen Triebe von 1882 und 1883 sind nur durch einen Quirl von 3 kleinen Aesten getrennt An der Stelle des Quirls vom Triebe des Jahres 1883 wächst nur ein Ast, der sehr aufrecht steht, so dass er den gleichzeitig mit ihm gewachsenen Jahrestrieb des Gipfels von 1884 etwas zur Seite drängt. Die Endknospe ist stark entwickelt und die nächste Seitenknospe sitzt 1 cm. niedriger. Dieses letzte Stück des Jahrestriebes zwischen der Seitenknospe und der Endknospe ist besonders dicht mit Nadeln besetzt. Solche besonders dicht belaubte Enden der Jahrestriebe finden sich auch an einigen Aesten, zwischen der Endknospe und niedriger sitzenden Seitenknospen; sie stechen durch dichtere Belaubung so sehr gegen den übrigen Theil des Jahrestriebes ab, dass man mitunter zweifelt, ob es nicht ein besonderer kurzer Jahrestrieb sei.

Die Aeste stehen erst ziemlich wagerecht und krümmen sich darauf mehr oder minder nach oben. Ein Ast von 4 Jahrestrieben hat, wie schon erwähnt, überhaupt gar keinen Seitenzweig, ebenso einer von 3 Jahrestrieben. Die meisten, welche 1 oder 2 kleine Seitenzweige haben, behalten den Typus der Nacktheit doch immer in hohem Grade bei, was jedenfalls die augenfälligste Eigenthümlichkeit der Schlangenfichte ist.

Wenn man den Ast am Stamm als Theilung I. Grades zählt, den Zweig an diesem Ast als Theilung II. Grades, so hat man damit die Grenze der Verästelung bei diesem Exemplar erreicht; weitere Verzweigungen kommen nicht vor. Nur bei dem in 8 Zweige getheilten Ast kommen noch ein Paar ganz kleine Ansätze vor, welche als Theilung III. Grades gelten könnten.

Ich habe, als noch alle Nadeln am Baum hafteten, nicht besonders darauf geachtet, doch besinne ich mich nicht gekrümmte Nadeln bemerkt zu haben und sind auf der Photographie auch keine erkennbar. Die Nadeln umstehen die Aeste sehr dicht und fast ganz gleichmässig von allen Seiten, nur wenig undichter an der Unterseite.

Gewundene Holzfasern.

Bei den kleinen Fichten, die als Unterholz im lichten Hochwalde, also im Schatten anderer Bäume wachsen, kommt es vor, dass die Holzfasern sich schon in der Jugend winden, was die Tischler gedreht gewachsen nennen. Ich setzte solches auch hier voraus, spaltete daher diesen Stamm und fand, dass es bei ihm im höchsten Grade der Fall war. Auf der Photographie ist der Stamm nur bis zum ersten Ast gespalten, jetzt habe ich ihn ganz gespalten. Auf einer Länge von 87 cm., d. h. bis zum oberen Ende des Triebes von 1881 beschreibt er eine vollkommene Umdrehung; die flache Seite des gespaltenen Holzes, welche am unteren Ende mir zugekehrt steht, ist 87 cm. höher, mir

wieder vollkommen zugekehrt und in der Richtung von unten hinauf gerechnet, nach links (vom Beschauer gesprochen) gedreht, d. h. so, als ständen die Füsse des Baumes stille und sei er mit dem Gesicht dem scheinbaren Gange der Gestirne auf unserer Hemisphäre gefolgt; als habe er also sein Gesicht dabei (selbstredend) nach rechts gewandt. Oder mit anderen Worten: „er ist in der, einer richtigen Schraube entgegengesetzten Richtung gewunden".

Die meisten Beobachter bezeichnen solche Richtungen durch einen Vergleich mit der Bewegung der Uhrzeiger. Dabei muss aber eigentlich immer auch gesagt werden, ob man die Richtung der Windung des Stammes aufwärts oder abwärts rechnet; rechnet man sie aufwärts, so ist es in diesem Falle mit den Zeigern einer Uhr, die mit dem Zifferblatt nach oben gehalten wird.

Das Mark.

Das Mark dieser Schlangenfichte ist im unteren Theil des Jahrestriebes 1877 hell, nimmt nach oben hin aber gleichmässig an Dunkelheit zu und ist gegen Ende des Jahrestriebes braunschwarz. Dann folgt ein ganz kleines Stückchen etwa 3 mm. etwas helleres Mark, der Knoten im Mark am Schluss des Jahrestriebes ist besonders dunkel braunschwarz. Die Färbung des Marks verläuft bei dem nächsten Jahrestriebe 1878 in ganz analoger Weise, ist unten hell, wird allmählich dunkeler bis braunschwarz und schliesst an der Stelle, an welcher die Endknospe sass, mit einem ganz dunkelen Knoten, um dann wieder ganz hell fortzufahren. Unterhalb dieses dunkelen Markknotens ist hier nur eine kaum merkbar hellere Stelle. Dieses kleine helle Marktheilchen, unter dem Knoten, erscheint nicht bei allen Quirlstellen, es wiederholt sich weiter oben nur noch ein Mal. Doch ist das Mark im unteren Theil des Jahrestriebes immer heller als am oberen Ende.

Die kleinen Hohlräume, welche vor oder nach dem Markknoten gewöhnlich vorkommen und es fast unterbrechen, sind hier sehr gering.

Weil es sonst bei Schlangenfichten so oft vorkommt, dass der Gipfeltrieb ausgeht und ersetzt wird, muss ich hier ausdrücklich bemerken, dass solches bei diesem Exemplar, so weit es mir hier vorliegt, nicht der Fall gewesen ist.

Schlangenfichte in Könhof.

Auf einer Parforcejagd bemerkte ich in einem benachbarten Walde des Gutes Könhof (bei Dorpat - Livland) die typischste Schlangenfichte, welche ich bisher gesehen. Photographie Tafel II.

Ihr Standort ist auf einer kleinen Ebene in halber Höhe eines Hügels in einem ausgedehnten Kiefern-Hochwalde. Die Kiefern von circa 150 Jahren stehen recht weit von einander, ihre grossen Kronen sind fast geschlossen. Zahlreiche kleine Fichten wachsen einzeln als Unterholz zwischen den Kiefern; da sie den Himmel aber kaum sehen, haben sie meist nur geringen Zuwachs. Der Boden ist ziemlich reiner trockener Sand, aber wegen der langjährigen Beschattung reichlich mit Moos bedeckt. Im Jahre 1886 ist diese Schlangenfichte in die Anlagen des Gutes Könhof hin verpflanzt und erst dort photo-

TAFEL II.



SCHLANGENFICHTE AUS KÖNHOF-LIVLAND.

graphirt worden. Es findet sich auf der Photographie also ein Jahrestrieb (der von 1886) mehr als in dieser Beschreibung, die 1885 niedergeschrieben wurde, als der Baum noch im Walde stand.

Der Baum ist 1 m. 96 hoch.

I) Erster Ast auf 10 cm. vom Boden nach Osten 1 m. lang, er neigt sich stark hinab, liegt auf der Erde und ist fast ganz vom Moose überwachsen. Die Spitze des Astes ragt wieder über das Moos empor und hat kleine Zweige zweiten Grades. (Ich rechne, wie schon gesagt, den am Stamm haftenden Ast als Verzweigung ersten, den an diesem Ast haftenden Zweig als Verzweigung zweiten Grades u. s. w.)

II) Zweiter Ast 35 cm. vom Boden nach S. 1 m. 20 lang, 5 Zweige zweiten Grades und kleine Ansätze dritten Grades, liegt grössten Theils auf dem Boden unter dem Moose.

III) Dritter Ast auf 38 cm. vom Boden nach S.S.O. 1 m. 20 lang, hat einen langen Zweig von 80 cm. an diesem 3. Zweige dritten Grades von 10,5 und 5 cm. Am Ende des Hauptastes noch ein Zweig zweiten Grades von 25 cm., liegt zum Theil vom Moos überwachsen auf dem Boden.

IV) Auf 40 cm. 3 Aeste: 1. Ast nach W., 50 cm. lang. 2. Ast nach S., 1 m. 40 lang. hat 3 Zweige zweiten Grades 30 bis 50 cm. lang. 3. Ast nach O., 1 m. 35 lang, ein Zweig zweiten Grades 9 cm., einer dritten Grades, liegen auf dem Boden, zum Theil von Moos überwachsen.

V) Auf 48 cm. Höhe nach S.O. ein Ast 1 m. 15 lang, mit 2 Zweigen zweiten Grades 10 cm. lang, berührt den Boden. Keiner von den Aesten, welche unter dem Moose liegen, hat Wurzeln getrieben.

VI) Auf 63 cm. Höhe 1 Ast nach N.N.W., 1 m. 35 lang; 3 Zweige zweiten Grades 50—80 cm. lang, hat Nadeln bis fast an den Stamm, circa 10 Jahrestriebe. (Beim Umpflanzen im darauffolgenden Jahre sind viele Nadeln abgefallen, daher auf der Photographie nur wenige vorhanden.)

VII) Auf 70 cm. Höhe 1 Ast nach S., 90 cm. lang, 1 Zweig zweiten Grades 60 cm. lang, 3 kleine Ansätze dritten Grades.

VIII) Auf 72 cm. 1 Ast nach N.N.W., 1 m 10 lang, 3 Zweige zweiten Grades, circa 40 cm. lang, Ansätze dritten Grades. Bei diesem Ast, also 72 cm. vom Boden, erster erkennbarer Jahresknoten.

Trieb des Jahres 1877 von 72 cm. bis 86 cm. vom Boden, also 14 cm. lang, kein Ast.

Trieb des Jahres 1878 bis 103 cm. vom Boden, 17 cm. lang, 1. Ast nach N., 90 cm. lang, kein Zweig, 2. Ast nach W., 1 m. lang, 3 Zweige

zweiten Gr. 5 bis 30 cm. lang, ganz wagerecht, bis an den Stamm mit Nadeln dicht besetzt. 3. Ast nach S.O., 8 cm. lang.

Trieb des Jahres 1879, bis 118 cm. vom Boden, 15 cm. lang, ohne Ast.

Trieb des Jahres 1880, bis 130 cm. Höhe, 12 cm. lang. Auf 125 cm. Höhe 1 Ast nach N.N.O., 70 cm. lang, unverzweigt, fast wagerecht, etwas aufsteigend. 2. Ast nach S., 80 cm. lang, 1 Zweig zweiten Grades 5 cm. lang. Auf 128 cm. vom Boden 1 Ast nach N., fast wagerecht, keine Zweige. Auf 130 cm. vom Boden 1 Ast nach S., 70 cm. lang, 1 Zweig zweiten Grades 5 cm. lang.

Trieb des Jahres 1881, bis 135 cm., also 5 cm. lang, ohne Ast.

Trieb des Jahres 1882, bis 150 cm. vom Boden, 15 cm. lang, ohne Ast.

Trieb des Jahres 1883, bis 165 cm., 15 cm. lang. Auf 165 cm. vom Boden 1 Ast nach N., 15 cm. lang.

Trieb des Jahres 1884, bis 185 cm., 20 cm. lang, hat auf 178 cm. Höhe 2 Aeste 10 cm. lang.

Trieb des Jahres 1885 bis 196 cm., 11 cm. lang, ohne Seitenknospen, nur eine Endknospe ist vorhanden. (Ich erinnere nochmals daran, dass die auf der Photographie sichtbaren Triebe des Jahres 1886 erst gewachsen sind, nachdem diese Beschreibung schon niedergeschrieben war.)

Vom sechsten Ast, 63 cm. vom Boden, also auf etwa dem 10. Jahrestriebe, von oben gerechnet, sitzen schon Nadeln am Stamm. Vom Jahrestriebe 1878 ab schon fast alle Nadeln, sie liegen aufrecht sehr dicht am Stamm an. Die Endknospe ist sehr dicht mit Nadeln umgeben. An den Aesten sind die Nadeln auch bis zum 10. Jahrestriebe zurück vorhanden, sie umgeben die Aeste gleichmässig abstehend, nach vorne geneigt, rund umher von allen Seiten, so dass der Ast von Weitem gesehen mit den Nadeln wie eine Wurst dick und rund aussieht. Bei genauer Untersuchung findet man, dass an der unteren Seite die Nadeln doch etwas undichter sitzen als an den Seiten und oben, aber in gleicher Richtung abstehen.

Ich habe diesen Baum so ausführlich beschrieben, weil mir bei ihm der Typus der Schlangenfichte ganz besonders hochgradig entwickelt und bis jetzt unverändert erhalten zu sein scheint. Auf den ersten Blick fällt einem ganz besonders die magere Beastung und der Mangel an Zweigen auf.

Schlangenfichte in Hellenorm.

Auf dem Gut des Herrn von Middendorf-Hellenorm bei Dorpat steht die älteste und grösste Schlangenfichte, die ich hier im Lande kenne. Photographie Taf. III und IV.

Dieser Baum hat offenbar früher in einem Walde gestanden, welcher allmählich abgeholzt worden ist, wie umherstehende Stubben verschiedenen Alters bezeugen. Jetzt ist die Gegend mit Rasen, Ellerngebüsch und einzelnen Gruppen junger Fichten bedeckt. Sie wird als Viehweide benutzt. Der Stand-

TAFEL III.



SCHLANGENFICHTE AUS HELLENORM-LIVLAND.

TAFEL IV.



DERSELBE BAUM WIE TAFEL III VON DER ANDERN SEITE

ort der Schlangenfichte ist in halber Höhe eines Hügels, also vollkommen trocken. Der Boden ist sandiger Lehm. Das Alter des Baumes veranschlage ich bei langsamem Zuwachs auf circa 60 Jahre. Die Stammdicke am Boden beträgt 25 cm., in 1 Meter Höhe 22 cm. Die Höhe ist circa 8 m.

Der Stamm hat früher unten noch einige Aeste gehabt, welche aber abgehauen sind. In 2 Meter Höhe befindet sich ein Quirl von 3 Aesten, dem wieder ein nackter Stamm mit nur einzelnen kleinen Aesten folgt. Ein zweiter Quirl in 4 m. Höhe hat etwa 8 Aeste. Darauf folgen weiter hinauf noch 3 Quirle mit fast ganz nackten und glatten Stammtheilen zwischen ihnen. Auf dem obersten Quirl steht ein aufrechtes Bündel von 10 Gipfeltrieben (nur sichtbar auf Tafel IV). Die meisten dieser wie ein Bund Spargeln dicht neben einander stehenden Gipfel sind abgestorben, nur 2 leben. Etwa 2 Meter unter dem Gipfel zwischen 2 Quirlen ragt noch ein Gipfel seitwärts empor, der sich aus einem Ast entwickelt hat. Früher hat der Baum offenbar den Typus der mager beasteten Schlangenfichte stark entwickelt gehabt. In der Nähe des Stammes haben aber jetzt fast alle Aeste hängende Nebenzweige getrieben, die ich auf mehrere Tausend an Zahl schätze, welche sehr dicht neben einander herabhängen. Der gewöhnliche Typus der Schlangenfichte, die magere Beastung, ist also in das Gegentheil umgewandelt, jetzt sieht der Baum mehr wie ein riesiges Bündel von hängenden Zweigen aus. Aus diesem Dickicht aber starren einzelne Aeste hervor, die den Schlangenfichtentypus sehr markirt behalten haben. Auf der Photographie ist solches leider nicht sehr deutlich (mit einem grossen Vergrösserungsglase aber doch sichtbar). Die längsten Aeste erreichen einen Abstand vom Stamm bis zu $3\frac{1}{2}$ m.

Die grosse Confusion, welche darüber besteht, ob viele der von Caspari citirten Beschreibungen Hängefichten oder Schlangenfichten betreffen, namentlich bei den in Schweden gefundenen Exemplaren, ist zum Theil vielleicht auch dadurch erklärbar, dass beide Typen, wie es hier der Fall ist, an demselben Baum vorkommen können.

Hängezweige.

Ich glaube, dass die Schlangenfichte wie so viele der normal gewachsenen Fichten im Alter überhaupt die Tendenz haben kann Hängezweige zu bilden, das heisst, an den wagerechten Aesten ersten Grades hängende Zweige zweiten Grades zu treiben. Da in sehr vielen Beschreibungen von langen, unverzweigten Aesten die Rede ist, aber nicht angegeben wird, ob es Aeste ersten oder zweiten Grades seien, ist es allerdings oft schwer zu rathen, ob eine Hängefichte oder eine Schlangenfichte gemeint sei, namentlich für den, welcher niemals eine Schlangenfichte gesehen hat.

Bei der gewöhnlichen Fichte hören die Aeste ersten Grades gewöhnlich fast ganz auf länger zu werden, wenn sie einen gewissen Abstand vom Stamm erreicht haben, oder die untersten Aeste, namentlich wenn der Stamm vom Bo-

den aus nackt ist, wandeln sich in hängende Aeste um, welche dann senkrecht abwärts als Hängeäste bis zum Boden herab wachsen können.

Das Gleiche muss bei der Schlangenfichte auch eintreten; ausser den Hängezweigen zweiten Grades, welche ich bei der Hellenormschen Schlangenfichte beobachtet, müssen die Aeste ersten Grades auch entweder aufhören in die Länge fortzuwachsen oder sich in hängende Aeste umbilden.

Ich habe keine älteren Schlangenfichten als die Hellenormsche zu sehen Gelegenheit gehabt, aber selbst an noch viel jüngeren die Beobachtung gemacht, dass die unteren Aeste oft abwärts hängen.

Unter den Hängezweigen der Schlangenfichte in Hellenorm habe ich Verzweigungen bis zum 8. Grade gefunden, wenn ich bei abgestorbenem Haupttriebe den ihn ersetzenden Seitentrieb als Verzweigung rechnete. Die Hängezweige verlaufen, wo sie von anderen umgeben sind, meist unverzweigt (ihre Nebenzweige sind vertrocknet und abgefallen), dort, wo sie ins Freie treten, verzweigen sie sich stark.

Nadeln.

Die Nadeln der wagerechten Aeste, namentlich an den Enden der Triebe, sind meist sehr gross bei seltener Dicke, sie erreichen häufig eine Länge von 21 mm. Dabei sind sie oft nach hinten zurückgekrümmt. Die Endknospe ist wie gewöhnlich mit dicht anliegenden, nach vorne gerichteten Nadeln bedeckt, darauf folgen aber gleich sehr lange und so stark nach aussen zurückgebogene Nadeln, dass sie um die Endknospe eine förmliche Rosette bilden. An den hängenden Aesten sind die Nadeln meist nur 8—10 mm. lang. Zapfen waren an diesem Baume bisher niemals bemerkt worden. Im Jahre 1886 aber, welches ein besonders gutes Samenjahr für die Fichte war, hat dieser Baum 5 kleine Zapfen angesetzt, von denen zwei schon im Herbst abfielen, aber auf meine Bitte von dem Herrn von Middendorf alle eingesammelt und mir jetzt zugeschickt sind. Die Zapfen sind 5 bis 7 cm. lang, von heller gelblicher Farbe. Die Schuppen länglich rhombisch mit gerade abgestumpftem Ende, nicht abgerundet, fein ausgezahnt. Der Samen sieht sehr gut aus und habe ich schon mehreren Freunden der Botanik davon zu geben versprochen, um Aussaat-Versuche zu machen.

Schlangenfichte in Könno.

In der Gegend von Pernau, auf dem Gute Könno des Grafen Keyserling, giebt es auch eine junge, sehr üppig wachsende Schlangenfichte, welche 1886 ebenfalls 2 Zapfen angesetzt hatte, die aber schon im Sommer abfielen.

Zweite Schlangenfichte in Finnland.

Ich habe in Finnland später noch zwei Schlangenfichten gefunden, in Moisio, am Wege von der Eisenbahn, 11 Werst von der Station Kymmene und 8 Werst von Ellimä. Der Baum ist gegen 10 Meter hoch, steht verhältnissmässig frei, zeigt in seinem oberen Drittel den Typus der Schlangenfichte deutlich aber nicht sehr hochgradig entwickelt, unten ist der Typus bei einiger Aufmerksamkeit auch erkennbar, er scheint früher auch deutlicher bestanden zu

haben, doch sind die Aeste jetzt durch reichlichere Verzweigung der normalen Form wieder sehr ähnlich geworden.

Ich habe in Moisio am Wege nach Peljo-Korpi noch einen dritten Baum bemerkt, der unten ganz normal, am Gipfel aber zum Schlangenfichtentypus übergegangen ist. Er hat zwei Gipfel, die ebenso wie die obersten Aeste etwas gewunden und nackt meist aufsteigend verlaufen. Dritte Schlangenfichte in Finnland.

Auf dem Gute Hummelshof, 20 Werst (Kilometer) von hier, wurden von dem Besitzer Herrn von Samson auf einer Wiese am Embachufer 2 Schlangenfichten gefunden und beide in den Garten hin verpflanzt. Die kleinere noch nicht fusshohe blieb leben, die grössere ging aus und ist mir jetzt hergeschickt. Schlangenfichte in Hummelshof.

In den benachbarten Wäldchen, welche den Samen geliefert haben mussten, aus dem die beiden Schlangenfichten auf der Wiese aufgekeimt waren, wurde vergeblich nach Bäumen gesucht, die ein ähnliches Aussehen hätten.

Der grössere Baum ist 3,25 m. hoch. Es scheinen sich mehrmals zwei Gipfeltriebe entwickelt zu haben, von denen der eine später ausging. Zum letzten Mal ist solches vor 5 Jahren geschehen.

Aeste ersten Grades hat der Baum etwa ebenso reichlich wie gewöhnlich Fichten in diesem Alter, Zweige zweiten Grades sehr selten, aber „wenn schon denn schon“ zu 5 und 8 sich sehr gedrängt von demselben Punkt des Astes abzweigend, oder der Ast theilt sich überhaupt in so viel Seitenzweige, ohne einen Endtrieb anzusetzen. Diese Zweige haben auch Zweige dritten Grades. Die älteren unteren Aeste ersten Grades haben in der Nähe des Stammes Hängezweige getrieben, welche senkrecht hinabwachsen. Die Nadeln sind stark, bis 22 mm. lang, nach Aussen leicht gekrümmt. Die Aeste nicht wagerecht, sondern aufstrebend. Der vorletzte Jahrestrieb ist ganz astlos, der letzte hat dagegen 8 ungewöhnlich grosse Seitenknospen, von denen die obersten 5 cm. niedriger als die Endknospe sitzen. Dieses letzte Stück des Triebes von 5 cm. ist ganz besonders dicht mit Nadeln besetzt gewesen. Die Nadeln haften am Stamm bis zum vierten Jahr zurück, an den Aesten einzelne bis ins fünfte. Die beiden obersten Jahrestriebe spalten sich ganz gerade, die weiteren sind gewunden (gedreht gewachsen). Das Mark in den 4 oberen Jahrestrieben ist unten hell und dicht, im oberen Viertel des Triebes bräunt es sich allmählich, wird locker, die Zellen erscheinen wie ausgeschmolzen, unregelmässige kleine Hohlräume bildend. Grosse Höhlungen im Mark habe ich nur im mittleren noch hellen Theil des zweiten Triebes, von oben gerechnet, bemerken können, gerade in der Mitte fehlt eine Strecke weit (gegen 2 cm.) etwas Mark.

Auch hier in Sagnitz habe ich 2, aber noch junge Bäume gefunden, von welchen der eine bei Tido nur in seinen oberen Trieben zum Typus der Schlangenfichte mit gewundenen Aesten gehört; der andere im Revier Ursu hat kerzengerade Triebe, fast ganz nackt hinauf und 2 oder 3 ebenfalls ganz nackte und gerade Seitenäste. Nach den gegebenen genauen Beschreibun-

gen halte ich es aber für überflüssig, auch diese Exemplare noch eingehend zu besprechen.

Der Herr Magister Klinge (Assistent im botanischen Garten in Dorpat) theilt mir eine Federzeichnung und kurze Beschreibung einer jungen Schlangenfichte mit, die er im Witebskischen Gouvernement auf dem Gute Antonopol, 5 Werst von der Eisenbahnstation Antonopol der Petersburg-Warschauer Bahn, im dichten gemischten Bestande gesehen hat. Sie ist 12 Fuss hoch und etwa 20 Jahre alt, alle Aeste, auch die am Boden, sind aufsteigend und gewunden.

Ferner hat der Lehrer Ilster aus Dohndangen, Kurland, Herrn Klinge Zweige von zwei Schlangenfichten aus dortiger Gegend zugeschickt.

Der Oberförster Herr Lütkens theilt mir mit, dass er Schlangenfichten, aber nur junge Exemplare, vereinzelt und selten, aber doch hin und wieder in Livland und Estland gesehen habe.

Schübeler sagt[1]: „Ich kenne nur 17 Localitäten, welche sich vom Virrje-Kirchspiel in Tellemarken ($59\frac{1}{2}{}^{0}$) bis nach Ringebu in Gudbrandsdalen ($61\frac{1}{2}{}^{0}$) erstrecken, wo man an einzelnen Stellen sogar mehrere Exemplare derselben antrifft.

In Bozen, Tyrol, wurde dem Dr. K. Koch von Schlangenfichten im Pusterthal erzählt. Dr. Hell in Werlsberg hat sie ausfindig gemacht in einem Thal oberhalb Toblach (400 Stück)[2]. „Die Bäume boten in einer Höhe von 40 bis 50 Fuss einen eigenthümlichen Anblick um so mehr dar, als jedes Exemplar ausserdem noch ein verschiedenes (welches?) Aussehen hatte. Die meisten besassen bis zum obersten Drittel das Ansehen einer gewöhnlichen Rothtanne, so dass das oberste, zur Schlangenfichte umgewandelte Drittel um desto mehr im grellen Gegensatze zu dem unteren Theile stand".

Dr. Hell schreibt nachträglich dem Professor Koch, „dass in der Gegend von Buchenstein die Schlangenfichte in den dortigen Beständen ebenso häufig wächst als die gewöhnliche Fichte. Unter ihnen befinden sich Stämme von $1\frac{1}{2}$ bis 2 Klafter Dicke am Stock mit einer Höhe von 70 Wiener Fuss. 30 Fuss lange Aeste hängen gleich Riesenschlangen am Stamme herunter, in der ersten Hälfte ohne, in der zweiten mit sehr geringer Verästelung. Eins der schönsten Exemplare befindet sich bei Pieva, wo der Weg nach Andraz führt, ein anderes nach Araba zu".

Vererbt sich die Schlangenfichte aus Samen?

Die Schlangenfichte scheint nur selten Samen zu tragen, vielleicht zum Theil deshalb, weil ältere ausgewachsene Exemplare noch viel weniger vorkommen als junge, jedenfalls haben Botaniker, die Samen zu erlangen gesucht, nur

1) Schübeler. Die Pflanzenwelt Norwegens 1875 p. 162.

2) Vorlesungen über Dendrologie von Karl Koch, med. und Phil. Dr., Professor der Botanik in Berlin 1875. p. 366.

in sehr seltenen Fällen welche erhalten können und ich habe bisher nur von einem Fall erfahren können, der unzweifelhaft den Erfolg gehabt, aus Samen von Schlangenfichten in der Baumschule wieder Schlangenfichten zu erziehen.

Der Magister Klinge schreibt mir darüber folgendes:

„Der Professor Schübeler in Christiania hat Aussaatversuche gemacht. Von 6 ausgesäeten Saamen (woher Schübeler die 6 Samenkörner erlangt hatte, wusste Klinge nicht), kamen alle auf, aus dreien sind gewöhnliche und aus dreien Schlangenfichten hervorgegangen. Ich hatte während meines letzten Aufenthalts in Norwegen öfter Gelegenheit, die 3 etwa 4—5 Fuss hohen Bäumchen zu beobachten. In dem bald erscheinenden zweiten Bande der Norges Plantevaext wird Professor Schübeler Abbildungen und Beschreibungen veröffentlichen. Diese Schlangenfichten hatten stark gewundene Aeste".

Verschiedene Typen der Schlangenfichten.

Nach dem, was ich von der Schlangenfichte selbst gesehen, den angeführten Beschreibungen und noch einigen anderen, die ich zu lesen Gelegenheit gehabt, glaube ich unter den Schlangenfichten namentlich zwei Typen unterscheiden zu müssen: den einen mit geraden, den anderen mit gewundenen Aesten. Beide Formen gehen allerdings allmählich in einander über.

Ein dritter Typus ist von Blomquist abgebildet worden [1]).

Die Aeste dieses Bäumchens sitzen merkwürdig dicht am ganzen Stamm, so dass nur beim Gipfel sich Jahresquirle erkennen lassen, weiter unten aber nicht, dabei hängen die unteren Aeste ersten Grades vollkommen senkrecht wie Schnüre längs dem Stamm herab, auch die mittleren hängen noch sehr stark abwärts, nur die alleroberstensten stehen wagerecht oder aufwärts. Solch eine „hängende Schlangenfichte" hätte man allerdings Grund *Hänggran* zu nennen, nur darf man nicht, wie auch Blomquist es irrthümlich thut, diesen Baum als var. *viminalis Alströmer* bezeichnen, weil Alströmer mit diesem Namen, wie ich nachgewiesen habe, eine ganz andere Form der Fichte meint.

Verschiedene abnorme Formen der Fichte in England.

Caspari citirt mehrere Angaben, nach welchen verschiedene abnorme Formen der Fichte unter dem Namen var. *monstruosa* in England in Baumschulen gezogen werden. Pag. 127 citirt er auch verschiedene Namen: „In Betracht müssen noch gezogen werden: *Abies excelsa monstruosa Loudon* (*Hort.*), *Abies excelsa Craustoni* (*Hort.*), *Abies excelsa Eremita Knight* und *Picea excelsa* var. *hagemanniana Topf*. Leider sind alle diese Pflanzen wenig bekannt, zu kurz beschrieben oder, wie die letzte, garnicht und nicht abgebildet . . . ."

In einer der Beschreibungen der var. *monstruosa* heisst es: „. . . welche dort (im Garten der Londoner Gartenbau-Gesellschaft in Chiswich) vor 12 Jah-

1) Finska forstföreningens Medlanden Tredje Band andra häftet 1883. p. 78. Finlands trädslag. A. G. Blomquist. II Granen.

ren gepflanzt ist, besteht aus einem einzigen, aufrechten, unnatürlich aussehenden dicken Triebe, 3 Fuss lang und dicht mit Blättern besetzt . . ."

Das ist also ein ganz astlos cilindrisch wachsender Baum; in anderen Fällen aber werden auch wirkliche Schlangenfichten mit dem Namen *monstruosa* bezeichnet. Sie scheinen dort durch Pfropfreiser vermehrt zu werden. Ein Versuch, den ich im August machte, die Schlangenfichte zu pfropfen, ist missglückt. Der April oder Mai dürften passendere Monate dazu sein.

Versuch, die Schlangenfichte künstlich zu formen.

Da die Eigenthümlichkeit der Schlangenfichte damit beginnt, dass sie nur Endknospen und höchst selten Seitenknospen ansetzt, so habe ich im Herbst 1886 versucht, an normal wachsenden jungen Fichten die Seitenknospen vorsichtig abzupflücken; ich will durch dieses Experiment zu ergründen versuchen, ob Erscheinungen wie die, dass die Nadeln an der Schlangenfichte bis zum 10. Jahrestriebe zurück haften bleiben, gewöhnlich recht gross werden und sich häufig nach aussen krümmen, nicht gänzlich secundärer Natur seien, indem der Baum, dem es an Athmungsorganen fehlt und der für den aufsteigenden Saft keine genügende Verwendung findet, sich so zu helfen sucht, da es ihm an Knospen zur Bildung von Seitenzweigen gebricht.

Krümmung der Nadeln.

Die zurückgekrümmten Nadeln, welche oft an der Schlangenfichte vorkommen, machen mir den Eindruck, als sei ihre Haut an der Innenseite, d. h. der dem Stamm zugekehrten Seite, zarter und dehnbarer als auf der Aussenseite; drängt sich nun zu viel Saft in die Nadel, so dehnt sich die Innenseite schliesslich mehr aus und die Nadel krümmt sich nach aussen. Bei Schlangenfichten, die auf magerem Boden und in dichtem Schatten stehen, wo der Saftzufluss schwächer ist, scheint das Sichkrümmen der Nadeln auch nicht aufzutreten, während es bei sehr üppigem Wuchs auch an normalen Fichten vorkommt.

Mannigfaltigkeit der Nadelformen überhaupt.

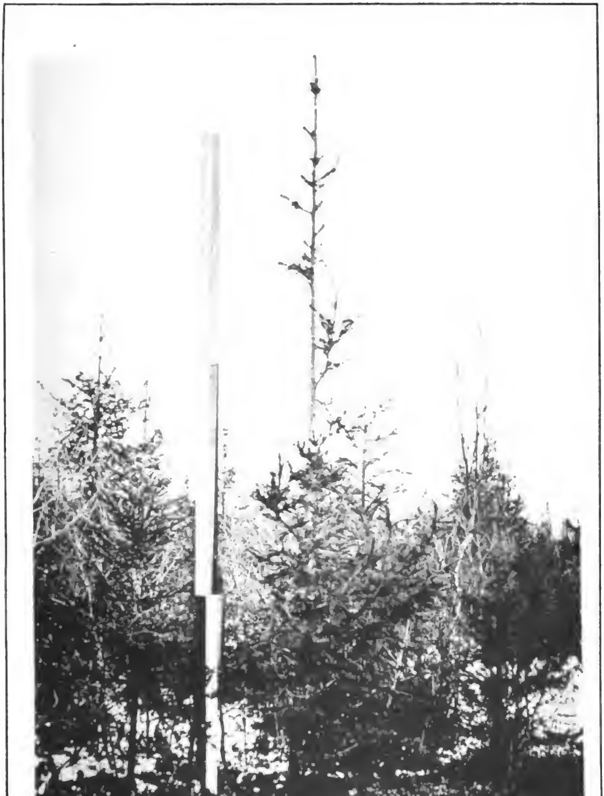
Die Form der Nadeln ist sehr mannigfach und kann selbst an demselben Baum verschieden sein. Es würde mich hier zu weit führen, wenn ich genauer auch auf diesen Punkt eingehen wollte.

Schübeler[1]) sagt: „In dem hiesigen botanischen Garten habe ich selbst, was die Länge, die Dicke, die Zuspitzung, Form, Farbe und Stellung der Nadeln betrifft, sehr verschiedene Formen gepflanzt, die 3—4 Jahre alt, aus einem einige Meilen von Christiania entlegenen Walde geholt sind, wo von fremder Einmischung garnicht die Rede sein kann. Die Nadeln variiren hier zwischen 6 und 28 mm. in der Länge und bleiben gewöhnlich 6 Jahre am Baum sitzen".

Ebenda p. 161 Randbemerkung: „In den letzten Jahren habe ich die Form der Nadeln der verschiedenen Varietäten der Fichte sorgfältig im Quer-

1) Schübeler, Die Pflanzenwelt Norwegens. 1875. p. 157.

TAFEL V.



ASTLOSE FIHCTE IN SAGNITZ-LIVLAND.

TAFEL VI.



PYRAMIDALE FIHCTE IN SAGNITZ-LIVLAND.

TAFEL VII.



TRAUERFICHTE AUF TROCKENEM BODEN WACHSEND.

schnitt untersucht; ich fand jedoch die Form der Nadeln ebenso variabel wie die Form der Zapfenschuppen".

Da die Schlangenfichte mitunter während mehrerer Jahrestriebe gar keine, oder fast gar keine Aeste ansetzt, so kann, namentlich wenn solches in früher Jugend geschieht, der Baum als absolut astlos beschrieben werden und wenn er später einige unverzweigte Aeste treibt, geht er zur gewöhnlichen Form der Schlangenfichte über. Astlose Fichte.

Hier in Sagnitz (Livland) habe ich bei Tido auch eine Fichte gefunden, die fast ganz astlos ist (Tafel V). Diesen Baum könnte man am passendsten *Picea excelsa* form. *denudata* nennen.

Wie an dem auf der Photographie neben dem Baum stehenden Messstock ersichtlich, ist sie über 3 m. hoch, steht ganz frei in einem Wacholdergebüsch, in dem auch andere junge Fichten einzeln vorkommen.

Der untere Theil des Baumes 1 m. hoch ist beastet, aber unnormal, struppig; die oberen 5 Jahrestriebe sind zusammen fast 2 m. lang und sehr kräftig. Die Nadeln haften an den 3 letzten Trieben und sind die längsten und dicksten, die ich jemals gesehen, bis 35 mm. lang, 3 mm. breit und 2 mm. dick, übrigens durchaus nicht alle gleich stark. Viele sind nach hinten gekrümmt, andere fast gerade, die geraden sind meist kleiner als die gekrümmten.

Das Aussehen dieses Baumes ist von dem der Schlangenfichte wesentlich verschieden, weil die wenn auch seltenen Aeste ersten Grades durchaus nicht gestreckt und nackt, sondern mit einigen kurzen, sehr dicht belaubten Zweigen zweiten Grades besetzt sind.

In demselben Wachholdergebüsch bei Tido in Sagnitz, einige hundert Schritt von der astlosen Fichte, steht eine Pyramidalfichte *Picea excelsa* form. *pyramidalis*, Tafel VI. Sie zeigt sonst nichts Abnormes, nur streben die Aeste zugleich mit dem Stamm aufwärts, ähnlich wie bei der Pyramidalpappel. Auf der Photographie ist solches weniger auffallend, als in der Natur, da die Aeste nur als ganz feine Striche sichtbar sind, weil es windig war und sie bewegt wurden, während die Aufnahme stattfand. Die ungewöhnlich aufrechte Stellung der Aeste ist wegen der Feinheit der Striche weniger in die Augen springend. Bei einiger Aufmerksamkeit kann man es aber wohl erkennen, dass sie schliesslich fast parallel mit dem Stamm verlaufen, was bei Fichten sonst nicht vorkommt. Pyramidalfichte

Ich führe diesen Baum hier namentlich deshalb an, weil nur etwa 300 Schritt weiter, immer noch in demselben Gebüsch auf gleichem lehmigem, trockenem Boden und ebenso offenem Standort, also unter gleichen äusseren Verhältnissen, eine Trauerfichte wächst. Die passendste lateinische Bezeichnung für diese Varietät dürfte *Picea excelsa* var. *depressa* sein (Tafel VII). Sie ist $2^1/_2$ m. hoch, in ihrem unteren Theile normal, in dem oberen der Krumfichte oder Sumpffichte (siehe weiter unten) recht ähnlich, aber nicht identisch Trauerfichte.

mit ihr. Die Nadeln sind dick und lang; in dem oberen Theil des Baumes, welcher allein die Trauerform zeigt, etwas krankhaft gelblich. Der Gipfel neigt sich stark zur Seite und hat aufgehört zu wachsen; die Zweige, auf welche sich jetzt alles Wachsthum concentrirt, treiben abwärts und sind ungewöhnlich dicht verzweigt und belaubt. Es hingen im November 1886 mehrere Zapfen am Baum, deren Alter sich aber nicht leicht bestimmen liess, einige hatten offenbar den Samen schon ausfliegen lassen, einer war dagegen noch ganz jung, braunroth und hatte durch die dichten Zweige sich nicht einmal zur hängenden Stellung herabneigen können, sondern lag wagerecht auf dem Ast.

Hängefichte. Die Hängefichte, *P. viminalis Alströmer*, var. *pendula Carrière*, var. *viminalis Caspari*. Mir scheint Carrière's Bezeichnung *pendula* die passendste zu sein, ich halte sie für eine im höheren Alter sehr allgemein vorkommende Form der Fichte. Die Zweige zweiten Grades hängen von den Aesten ersten Grades, welche mehr oder weniger wagerecht verlaufen, wie Schnüre herab.

Caspari beschreibt und zeichnet einen solchen Baum [1]): Die Hängezweige sind, nach der Abbildung zu urtheilen, allerdings sehr entwickelt und zahlreich, der Baum auch noch auffallend jung, dennoch halte ich ihn nur für eine hochgradige Entwickelung einer sonst im höheren Alter sehr allgemein vorkommenden Form der Fichte.

Kurze Hängezweige dürften sich an allen normal gewachsenen Fichten in höherem Alter finden; Hängezweige von 1 Meter Länge mindestens an 50% aller Fichten im Alter von 100 Jahren; Hängezweige von 2 und 3 Meter Länge sind auch noch durchaus nicht selten. Caspari führt an, dass Bechstein von Hängezweigen, die 20 Fuss, also etwa 6 m. lang seien, berichtet.

Auch schon in der Jugend kann die Fichte ihre Neigung, solche Hängezweige zu bilden, mehr oder weniger deutlich entwickeln. Doch liegt es auf der Hand, dass, um einen kräftigen Ast in mehr als 6 Meter Höhe zu haben, der Baum schon etwa 40 Jahre haben muss und damit der Zweig, der von dort aus zu wachsen beginnt, 6 Meter lang werden kann, braucht er, bei dem gewöhnlich nur langsamen Zuwachs der Hängezweige, mindestens noch 60 Jahre. Daher können lange Hängezweige an jungen Bäumen unbedingt nicht vorkommen.

Die Aeste ersten Grades, an denen diese Zweige hängen, stehen meist fast ganz wagerecht; oben in der Nähe des Gipfels sind die Aeste ersten Grades gewöhnlich etwas aufsteigend, unten am Baum mehr oder weniger abwärts geneigt, mitunter auch ganz in Hängezweige übergehend. Die Belastung durch

1) Schriften der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg. 1883. II Abth. p. 125. Noch Genaueres Jahrgang 1878. p 154.

TAFEL VIII.



KUGELFICHTE IN HELLENORM-LIVLAND.

TAFEL IX.



AST DER KUGELFICHTE

Schnee hat, so weit ich es zu beurtheilen vermag, gar keinen Einfluss auf die Neigung der Aeste, sie biegen sich unter der Last aber nur zeitweilig. Möglichen Falls ist es der Zufluss des Saftes im Frühjahr, welcher sie wieder ganz gerade macht.

Die senkrecht hängenden Zweige zweiten Grades verzweigen sich in ebenso hängende Zweige fernerer Grade, namentlich immer dort, wo sie in's Freie treten. Wo sie von anderen Hängezweigen umgeben sind, sterben und fallen diese Zweige fernerer Grade aber sehr leicht ab, so dass sich die langen schnurartigen, unverzweigten Hängezweige nicht durch Mangel an Seitenknospen, wie bei der Schlangenfichte, sondern erst durch das Abfallen der entwickelt gewesenen Seitenzweige bilden. Die Nadeln umgeben den Hängezweig, wo er frei hängt, gewöhnlich recht gleichmässig von allen Seiten. Ist der Zweig von Nachbarzweigen bedrängt, so haften die Nadeln vorherrschend auf der Lichtseite oder wenden sich auch mit der Spitze dem Lichte zu. Die Nadeln können von sehr verschiedenem Typus sein: herabhängend und zart, oder sich so straff wie eine Drahtbürste anfühlen.

Zwei Bäume, welche die Typen der weichen und straffen Nadeln an Hängezweigen, wenn auch nicht im höchsten Grade, so doch deutlich erkennbar sehen lassen, stehen, der eine rechts, der andere links vom Wege, dicht bei einander in dem kleinen Wäldchen vor Cabbina bei Dorpat.

Solche Hängefichten sind es, wie gesagt, welche Alströmer *var. viminalis* nennt.

Das Gegentheil der mageren Beastung, die dichte Verzweigung und Belaubung, kommt in allen möglichen Abstufungen oft an Bäumen vor, die neben sehr mager beasteten auf gleichem Boden wachsen. Die Jahrestriebe sind bei dichter Verzweigung kurz aber zahlreich. Das äusserste Extrem dichter Belaubung und Verzweigung finden wir in einigen Exemplaren des sogenannten Hexenbesens, einer Verbildung, die gewöhnlich nur einen einzigen Ast des Baumes ergreift. Es scheint unter den Fichten, welche in England in Baumschulen unter dem Namen var. *monstruosa* vorkommen, auch solche zu geben, wo der ganze Baum sich zu einer Art Hexenbesen umbildet, denn es ist die Ansicht ausgesprochen worden, dass diese Varietät möglichen Falls durch Pfropfreiser, die von Hexenbesen genommen wurden, gezogen sei (Caspari p. 128). Kugelfichte.

Ich habe einen grossen wild wachsenden Baum auf dem Gute Hellenorm bei Dorpat gesehen, bei dem jedenfalls ohne Zuthun des Menschen sich eine derartige Verbildung in höchstem Grade entwickelt hat.

Photographie Tafel VIII. Der untere Theil dieser grossen Fichte von etwa 90 Jahren ist ganz normal gewachsen, plötzlich hat sie aber von einem Punkt aus über 100 Aeste getrieben, welche wie die Blätter im Kohlkopf eine riesige Kugel bilden und durch besonders dichte und kurze Belaubung auswendig stark an den Hexenbesen erinnern.

Der Hexenbesen besteht meist aus einem Gewirr kleiner Zweige, doch kommen auch solche Hexenbesen vor, bei denen die aus einem Punkt auslaufenden Zweige mehr oder weniger concentrische Bahnen beschreiben.

Die Photographie Taf. IX zeigt einen Zweig dieser Kugelfichte; man sieht daraus, dass die Aeste im Inneren der Kugel sich von Zweigen fast ganz entblösst haben, an der Aussenfläche aber sehr reichlich verzweigt und mit kurzen Nadeln ganz besonders dicht belaubt sind.

Auch hier in Sagnitz (bei der Ziegelei) habe ich einen solchen Baum bemerkt; an einer jungen, ganz normal gewachsenen Fichte von etwa 30 Jahren hat der Gipfel sich in eine birnförmige Kuppel umgewandelt, indem eine grosse Anzahl Aeste von einem Punkt des Stammes ausgehen. Das ganze dichte Bündel hat etwa 1 m. im Durchmesser und 1,50 m. Höhe. Bei diesem Exemplar ist aber nichts vorhanden, was an den Hexenbesen erinnert, die Aeste sind nicht struppig, sondern, obgleich sehr häufig verzweigt, verlaufen sie glatt und die Belaubung ist normal, die Nadeln an den Zweigen sind stark nach vorne geneigt, oft fast anliegend. Aus dem vollkommen dichten Bündel von Zweigen stehen namentlich nach N. und O. mehrere normale Aeste hervor und oben 2 Gipfeltriebe, so dass es den Anschein hat, als wolle der Baum wieder zur normalen Form zurückkehren. Doch haben die Gipfel so geringen Zuwachs, dass sie von den übrigen Trieben der Aeste und Zweige auch leicht eingeholt und umhüllt werden mögen.

Ich kann unter den vielen lateinischen Namen der Fichtenvarietäten keinen finden, mit welchem dieser Baum gemeint sein könnte, muss daher diese Form mit noch einem neuen Namen bezeichnen: ***Picea excelsa Link. form. globosa*** = Kugelfichte.

Krummfichte. Die Krummfichte, ***Picea excelsa Link. forma aegra myclophthora Casp.***, ist von dem Professor Robert Caspari in Königsberg so genannt worden und in den Schriften der phys.-ökonom. Gesellschaft zu Königsberg, 15. Jahrb. 1884 p. 108 u. f. ausführlich beschrieben, auch sehr gut abgebildet worden.

Sowohl Caspari als dem Oberförster, welcher ihm die Bäume (mehrere hundert) zeigte, war diese Form der Fichte vollkommen fremd und soll auch in der Literatur nirgends beschrieben worden sein. Ich habe sie hier in Livland fast auf jedem grösseren nassen Torfmoor gesehen, oft zu Tausenden.

Der Gipfel neigt sich bei dieser Zwergform der Fichte meist in einer Höhe von 1 bis 3 Metern zur Seite oder biegt sich ganz herum und wächst hinunter. Gleichzeitig neigen sich auch die Jahrestriebe aller Aeste und Zweige sehr stark abwärts, so dass diese Form bei hochgradig entwickelten Exemplaren einem Trauerbaum entspricht. Ich habe Exemplare von nur 20 cm. Höhe und solche von mehreren Metern Höhe gefunden. Die Trauerform kommt bei sehr vielen Baumarten vor und wird meines Wissens meist durch Pfropfreiser ver-



KRUMMFICHTE ODER SUMPFFICHTE IN SAGNITZ-LIVLAND.

mehrt, entsteht in seltenen Fällen aber auch spontan. Ich habe oben eine wildwachsende Trauerfichte beschrieben und Caspari beschreibt zugleich mit der Krummfichte auch eine offenbar spontan entstandene trauernde Weisstanne *Abies pectinata*, die in einer gepflanzten Baumgruppe stand. Trauerbäume scheinen sonst an allen Standorten, wo ihre Art überhaupt wachsen kann, fortzukommen. Dagegen hat die Krummfichte, die den übrigen Trauerbäumen so vollkommen ähnlich, die Eigenthümlichkeit, diese Form bloss in nassem Torfboden anzunehmen, ja soweit meine Beobachtung reicht, schon bei Entwässerung, auch auf demselben Standort, meist wieder zur normalen Form zurückzukehren. Caspari pflanzte zwei Krummfichten aus dem Torfmoor in den botanischen Garten in Königsberg und gleich kehrte sich ihr hängender Gipfel wieder aufwärts.

Meine Erfahrung im Entwässern von Torfmooren ist recht gross und immer habe ich einen Theil der Krummfichten, welche auf diesen Mooren standen, ihre Gipfel nach der Entwässerung wieder aufwärts wenden oder einen neuen aufrechten Gipfel bilden gesehen.

Caspari glaubt, dass eine Krankheit des Markes mit dieser Verbildung causalen Zusammenhang haben könnte. Ich habe in Folge dessen das Mark einer grossen Anzahl von Krummfichten untersucht, die von Caspari beschriebenen Symptome allerdings oft gefunden, aber durchaus nicht immer und beim Vergleich mit dem Mark normal wachsender Fichten von trockeneren Theilen des Torfmoors und normalen Bäumen von ganz festem Boden, habe ich eben dieselben Symptome, das heisst: Bräunung des Marks, spaltenförmige Lücken im Mark, rundliche Lücken im Mark auch bei den gesund aussehenden, normal gewachsenen Fichten gefunden; zum Theil auch bei einer Schlangenfichte, wie oben beschrieben. **Markkrankheit der Krummfichte.**

Den Namen, welchen Caspari dieser Form der Fichte giebt, halte ich daher für nicht glücklich gewählt: „Krummfichte, eine markkranke Form *Picea excelsa Link form. aegra myclophthora*". Wenn meine Ansicht, dass die Lücken im Mark keinen causalen Zusammenhang mit dieser Form haben, durch noch genauere Untersuchungen nicht widerlegt wird, würde ich vorschlagen, diesen Namen durch „*Picea excelsa Link* form. *palustris* = Sumpffichte" zu ersetzen. Wenn man hier von diesem Baume spricht, bezeichnet man ihn meist mit dem Ausdruck: Morastgrähne oder Sumpfgrähne, was mich um so mehr zu dem Namen Sumpffichte berechtigt. **form palustris.**

Ich habe gar keinen Zweifel, dass ebenso wie die Kiefer *Pinus silvestris* an der Grenze des Baumwuchses im nassen Torfmoor die bekannte Zwergform annimmt, die Fichte an der Grenze der Möglichkeit ihrer Lebenserfordernisse im nassen Torfmoor zu dieser trauernden Zwergform gezwungen wird. **Ursache des Entstehens der Sumpffichte.**

Ich halte es für wahrscheinlich, dass die Sumpffichte in dem ganzen Verbreitungsgebiet der Fichte auf nassen Torfmooren vorkommen muss und habe

mich gewundert, dass Caspari sie für eine ihm ganz unbekannte Form erklärt. In cultivirteren Ländern mag sie allerdings fast ausgerottet sein, da sie wirthschaftlich ganz werthlos ist, und auch die Moore, welche sie erzeugen, mögen durch Entwässerung dort seltener als hier geworden sein. Doch darf ich nicht unerwähnt lassen, dass seitdem ich darauf geachtet, mir aufgefallen ist, dass bei meinen recht ausgedehnten Jagdausflügen in Finnland ich dort keine solchen Sumpffichten gesehen habe. Allerdings ist der Torf dort meist weniger zersetzt und moosiger als es gewöhnlich hier der Fall ist, wo Sumpffichten stehen. Es mag auch ein Zufall sein, dass ich auf den grossen Moosmorästen, die ich bei der Jagd auf Schneehühner in Finnland tagelang durchkreuzt, immer nur für die Zwergkiefer passende Standorte getroffen; aber auch an den Eisenbahnen, welche sehr ausgedehnte Moosmoräste durchschneiden, habe ich in Finnland niemals eine Sumpffichte bemerken können. Hier in Livland fehlt sie in der Mitte des Morasts auf dem frischen Moose auch oft, aber ist dann doch fast immer am Rande des Morasts zu finden, wo das Moos zu schwarzer Moorerde zersetzt ist.

Wer nach solchen Bäumen suchen will, dem rathe ich namentlich, es bei alten Torfgruben zu thun, wo das Moos zertreten war und die Ränder der Grube trocken genug sind, um das Aufkeimen des Samens zu ermöglichen, die Wurzeln aber gleich darauf in den alten Gruben so viel Wasser finden, wie diese Baumart es nicht ertragen kann. An solchen Stellen habe ich die Sumpffichte am hochgradigsten entwickelt gefunden.

Meine Photographie Taf. X zeigt einen solchen Baum von etwa 1,50 m. Höhe; er ist so dicht, dass man die innere Structur des Baumes weniger deutlich sieht als auf Caspari's Zeichnungen. Der Stamm dieses Exemplars ist nicht ganz gerade aufrecht, er hat sich offenbar zu wiederholten Malen geneigt und dann wieder neue Gipfeltriebe aufwärts getrieben, ob in Folge von trockeneren Jahren oder wenn die innere Triebkraft erstarkte und hinauf-wollte, vermag ich nicht zu sagen. Die unteren und alle inneren Aeste und Zweige sind abgestorben, so dass man neben dem Stamm nach Entfernung einiger dürrer Aeste beinahe wie in einem Zelt oder einer Strauchhütte sitzen könnte, während die dichten grünen Aeste ein bis zur Erde reichendes Dach über Einem bilden.

Dieses Bäumchen scheint auf einem Hümpel aufgekeimt zu sein, unmittelbar umher ist der Sumpf sehr nass, weil mehrere Quellen ihr Wasser über diese Gegend ergiessen.

Auf einer Gartenbau-Ausstellung in Petersburg besinne ich mich Zwergformen von Nadelhölzern aus Japan gesehen zu haben, ich bin dessen nicht mehr ganz sicher und habe eben nicht Gelegenheit danach zu forschen, glaube aber mich zu erinnern, dass diese Baumpygmäen so reichlich begossen waren, dass sie fast in flüssigem Schlamm standen. Sollten die japanesischen Gärtner

vielleicht durch dieses Mittel die merkwürdigen Zwergformen erziehen, welche dort als Topfgewächse so hoch geschätzt werden [1]).

Da wir so ganz im Dunkeln darüber sind, welches die Ursachen seien für die Umgestaltung der Arten oder zunächst für die Bildung von Varietäten und verschiedenen Formen derselben Art, so wäre es sehr interessant genau zu ergründen, welches die Grenzen und die Bedingungen des Vorkommens der Sumpffichte eigentlich sind, denn hier haben wir die Zwergform des Trauerbaums durch äussere Ursachen so offenbar beeinflusst vor uns, dass diese äusseren Ursachen die alleinigen zu sein scheinen, welche die Form bedingen, während Erblichkeit nur als Disposition der ganzen Art zu dieser Verbildung zulässig erscheint. Denn obgleich diese Sumpffichten oft reichlich Samen tragen, habe ich doch niemals einen so verbildeten Baum in der Nähe der Moore auf trockenem Boden stehen gesehen. Ich hoffe, dass man mich nicht missverstehen wird, ich will nicht gesagt haben, dass die äusseren Lebensbedingungen die einzige Ursache zur Entstehung neuer Formen seien; sondern ich will nur darauf aufmerksam gemacht haben, dass hier bei uns, und keineswegs nur an unerreichbaren Orten, bei den Antipoden [2]) Formveränderungen, wie die der Schlangenfichte. Kugelfichte, Trauerfichte etc. auftreten, ohne dass wir die Ursachen zu diesen Umbildungen kennen. Und dass bei der Krummfichte oder Sumpffichte ein Fall vorliegt, bei dem die Ursachen ganz auf der Hand zu liegen scheinen, dieser Fall daher mehr Aufmerksamkeit und nähere Vergleiche in Bezug auf Erblichkeit verdient, während bis auf Caspari meines Wissens noch von keinem Botaniker der Sumpffichte auch nur erwähnt worden ist.

Die Verzweigung bei der Sumpffichte ist meist eine sehr dichte, bei einzelnen Exemplaren, welche mitten unter den anderen standen und aus einiger Entfernung gesehen ihnen vollkommen glichen, habe ich die Verzweigung so dicht gefunden und damit im Zusammenhang die Jahrestriebe so kurz, dass sie nach allen Seiten durcheinander starrten und an den Hexenbesentypus erinnerten, also nur wenig oder garnicht abwärts geneigt wuchsen. Die Nadeln waren

Knospenmangel und Knospenüberfluss.

1) Le Comte de Beauvoir, Vayage autour du monde III p. 220. „.... Messire Ita-Sima qui apportait au duc de Penthièvre, de la part des ministres, un cadeau consistant en deux arbustes nains d'une grande élégance: l'un, haut de deux pieds, représente un chapeau pointu; l'antre est un pin d'une espèce fort rare, âgé de plus de dix ans, dont les branches tortnrées, s'échappant de ce tronc en miniature, portent de charmantes petites touffes: il a tout-à-fait l'air d'un petit vieux.

2) Einige Forscher beklagen sich darüber, dass das Variiren der Arten nur in unerreichbaren Wildnissen im Inneren Afrikas und Australiens gesehen worden sei. Ich kann hier die Bemerkung nicht unterdrücken, dass wir auch den Sonnenaufgang kaum anders sehen, als wenn wir auf solche Reisen gehen, wo man kein Dach haben kann, um sich vor diesem Schauspiel zu verbergen. So sehen wir auch manches andere Naturereigniss nur auf Reisen oder lernen es gar nur aus Reisebeschreibungen kennen, während Vieles von dem, was aut 2 Meilen von uns alltäglich vorgeht, unbeachtet bleibt. Es ist ja wohl ganz natürlich, dass das Fremdartige unsere Aufmerksamkeit eher fesselt und zu einer interessanten Schilderung leichter Stoff bietet, als das Alltägliche; ein gründliches Studium ist aber in unserer Umgebung jedenfalls leichter; daher ist es sehr erfreulich, dass in jüngster Zeit immer mehr Gelehrte sich auch damit genauer befassen.

kurz und struppig. Da der Bildung eines jeden Zweiges die Bildung einer Knospe vorhergehen muss, bin ich auf den Gedanken gekommen, dass die Schlangenfichte und die Kugelfichte nur die beiden Extreme entweder eines eigenthümlichen Mangels an Seitenknospen oder eines besonderen Ueberflusses an Knospenbildung seien.

Bei der Schlangenfichte, die ich in Finnland gefunden, hatte ein Ast, der bisher garkeine Zweige getrieben, also immer nur eine einzige Knospe, die Endknospe, gehabt hatte, plötzlich von einem Punkt aus 8 Triebe entwickelt, die parallel neben einander fortwuchsen, er hatte hier also einmal 8 Endknospen gehabt. Ebenso muss die Hellenormsche Schlangenfichte, welche 10 Gipfeltriebe in einem Bündel neben einander hat, 10 Endknospen gehabt haben. (Ein entgegengesetztes Extrem, welches man ihr bei dem gewöhnlich so grossen Mangel an Knospen als Abwechselung verzeihen muss.)

Da in keiner der zahlreichen Beschreibungen der Schlangenfichte, welche mir zu Gesicht gekommen, von den Knospen die Rede ist, glaube ich die Aufmerksamkeit der Beobachter ausdrücklich auf diesen Punkt lenken zu müssen. Wenn der Baum einmal in absonderlicher Weise der Knospen zu viel, zu wenig oder garnicht ansetzt, muss eine dem entsprechende Aenderung seiner Form erfolgen.

Jede Fichte, wenn sie in der offenen Fläche steht, schützt sich vor der dörrenden Sonne, indem sie mehr Zweige entwickelt. Sehr reichliches Licht und Sonne sind überhaupt günstig für die Knospenbildung, sie veranlassen also selbst die reichliche Verzweigung, deren der Baum als Schutz gegen zu viel Sonne bedarf.

Doch will ich solches nur als mitwirkende Ursache bezeichnen. Ich will durch die Hinweise auf diese Ursachen für die dichte wie die magere Beastung hervorheben, dass es sowohl äussere Einflüsse als innere Ursachen, deren Gründe wir nicht kennen, giebt, welche die verschiedenen Formen veranlassen und ihre Entwickelung fördernd oder hemmend beeinflussen können.

Von den Zapfen.

Von der Form der Zapfen, den Spitzen der Zapfenschuppen etc. habe ich bei den einzelnen Beschreibungen der Bäume nicht gesprochen, weil es mir an genügendem Beobachtungsmaterial gebrach; die Form der Zapfen scheint mir wenig oder garkeine Abhängigkeit von den genannten Formen der Fichte zu haben.

Wie die Anthropologen das Classificiren der Menschenracen nach Schädelmessungen allmählich aufgeben, wenn sie die Möglichkeit erlangen, wirklich zahlreiche Schädel zu messen, weil der Schädel individual zu sehr variirt[1]), so

1) Huxly spricht sich dahin aus, es sei durch cranologische Messungen allein überhaupt nicht möglich die Nationalität eines Schädels zu bestimmen. (Ich kann eben das wörtliche Citat nicht auffinden.)

Monroe: Autlines of Anatomy I p. 183 sagt: „There is no part of the human skeletan, which is more variable in its shape and the proportion of its several parts, than the skull, even amougst the in-

scheint es mir, dass bei der Bestimmung der Fichtenvarietäten nach Zapfen auch grosse Vorsicht erforderlich sei. Bei solchen Varietäten, wie die Schlangenfichte, befände sich ausserdem der Botaniker in der Lage eines Anthropologen, der eine Varietät nach Schädelmessungen classificiren will, aber mit Schrecken entdeckt, dass diese Individuen fast alle kopflos sind. Denn die meisten der bekannt gewordenen Schlangenfichten haben keine Zapfen. Auch bei den anderen Verbildungen sind Zapfen meist selten.

Nur bei der Sumpffichte habe ich reichlich Zapfen gefunden, aber von grosser Mannigfaltigkeit der Formen.

Sibirische Fichte *obovata*.

Ich kann hier einen Vergleich unserer Fichte mit der nordischen oder sibirischen Varietät der ***Picea excelsa*** var. ***obovata*** nicht unerwähnt lassen, obgleich ich diesen letzteren Baum nicht im hohen Norden und in Sibirien habe beobachten können.

Es ist behauptet worden, die *obovata* habe aufrecht stehende Zapfen. Der Streit über diesen Punkt unter Botanikern ist recht gross gewesen. Schübeler hat schliesslich Aeste mit Zapfen verschrieben und berichtet darüber wie folgt [1]:

„Wie oben bemerkt, behauptet Adjunct Th. M. Fries aus Upsala in der Zeitschrift Botaniska Notiser 1859 p. 174, dass die bei Kolmijavre gefundene Fichte ***Abies orientalis Poir.*** sei (d. h. die ***Picea excelsa*** var. ***obovata***, ich komme weiter unten auf diese Confusion der Namen zurück. Berg) und führt zugleich an, dass dieselbe „sehr leicht" von ***Abies excelsa DC.*** mittelst „ihrer kleinen aufrechten Zapfen und der Form der Zapfenschuppen zu unterscheiden sei". Ferner heisst es auch, dass die Zapfen, die am 18. August gesammelt wurden, eine rothe Farbe besassen (sc. noch jung waren). Zu gleicher Zeit muss Herr Fries aber auch völlig entwickelte Zapfen vom vorigen Jahre [2]) gefunden haben, da sowohl diese wie der Samen derselben beschrieben sind.

Im September 1871 empfing ich, wie oben bemerkt, frische Zweige und Zapfen in verschiedenen Entwickelungsgraden, gerade von demselben Baumbestande bei Kolmejawre, der ungefähr 30 kleinere und grössere Bäume zählt. Die unreifen Zapfen stehen nicht aufrecht, sondern schräge und ungefähr zwischen der aufrechten und horizontalen Stellung, während die reifen völlig horizontal stehen.

---

habitants of the same nation. Kein Theil des menschlichen Skelets variirt so sehr in Form und Proportion seiner einzelnen Theile als der Schädel, sogar innerhalb der Individuen gleicher Nation.

1) Dr. F. C. Schübeler, Prof. der Botanik an der Universität in Christiania: Die Pflanzenwelt Norwegens. 1875 p. 157.

2) Ich halte es nicht gerade für unmöglich, dass Fries im August auch reife Zapfen des vorigen Jahres gesehen habe, sehr viel wahrscheinlicher aber scheint es mir, dass die Zapfen, die Fries beschreibt, doch alle aus demselben Jahre stammten, um so mehr, als Schübeler von den Zapfen, die er selbst im September untersucht hat, sagt, dass sie sich in verschiedenen Entwickelungsgraden befanden.

Diese aber sind so leicht von Gewicht, dass sie gewiss nicht vermittelst ihrer Schwere sich haben abwärts biegen können. Ich habe geglaubt, dieses mit Bestimmtheit hervorheben zu müssen, weil Herr Fries: Bot. Notiser 1867 pag. 56 nicht weniger bestimmt wiederholt, dass die reifen Zapfen hier aufrecht stehen".

Keppen tritt Krilow's Ansicht bei, welcher die Sache so zu erklären sucht, dass die Zapfen bei uns und im Altai an ganz dünnen Zweigen hängen und sich deshalb abwärts neigen müssen, während die Fichte am Kolmejawre, ebenso wie an der Baumgruppe im Ural wohl kürzere und dickere Zweige habe, die Zapfen daher in einer wagerechten Stellung erhalten könne[1]).

Umbiegen der Zapfen zur hängenden Lage.

Was diese letzte Bemerkung betrifft, so ist sie ein Beweis, wie gefährlich es sei, selbst für die sachkundigsten Fachmänner, Voraussetzungen zu machen, ohne sie im Walde zu controliren. Beim Umbiegen des Zapfens aus der aufrechten Stellung, die er während der Blüthezeit hat, in die senkrecht hängende, die er im reifen Stadium einnimmt, ist es niemals der Zweig, er mag noch so dünn sein, welcher diese Umkehr herbeiführt. Der Zweig müsste sich dann ganz umdrehen und mit der Oberseite hinunterkehren, das geschieht niemals, sondern der Zapfen hat ein kurzes Stielchen, welches zum Theil noch mit dem letzten Schuppen des Zapfens besetzt, zum Theil nackt ist, dieses ist das Glied, welches sich biegt. Wer in den Wald gehen kann und es dort nachsehen, wird keine Mühe haben, sich davon zu überzeugen; wem eine Biblio-

1) Записки Импер. Акад. Наукъ. Т. 50, кн. II, 1885, стр. 273. Статья Ѳедора Кеппена. Что касается принимаемаго Ледебуромъ различіе въ положеніи шишекъ на деревѣ, то, какъ извѣстно, висячія шишки считаются однимъ изъ главныхъ родовыхъ признаковъ ели (*Picea*) отличающихъ ее отъ пихты (*Abies*), у которой шишки (и въ зрѣломъ состояніи) обращены кверху. А потому уже a priori можно было сомнѣваться въ справедливости показанія Ледебура, будто у Сибирской ели шишки обращены вверхъ. Въ ту-же самую ошибку впадали, впрочемъ, и многіе другіе ученые, напр. А. Шренкъ, Гризебахъ и Физъ. — Миддендорфъ, Гизенгеръ и Теплоуховъ (почти одновременно) обратили вниманіе на такую крупную ошибку. Вотъ, что говоритъ, по этому поводу Ѳ. А. Теплоуховъ: „Второй признакъ — различіе въ положеніи шишекъ на деревѣ, былъ бы, во всякомъ случаѣ, самымъ важнымъ, если-бъ только онъ существовалъ въ дѣйствительности. Трудно объяснить, что подало Ледебуру поводъ предположить, что шишки сибирской ели обращены вверхъ. Чтобы убѣдиться въ противномъ, достаточно обратить вниманіе на то, что шишки, какъ европейской, такъ и сибирской ели помѣщаются на концахъ тонкихъ вѣтокъ и потому въ спѣломъ состояніи, должны висѣть внизъ. Дѣйствительно, всѣ видѣнные мною на Алтаѣ экземпляры были покрыты шишками, но не отличавшимися, по своему положенію, отъ шишекъ европейской ели".

Противорѣчіе между показаніями Теплоухова и Шюбелера, можетъ быть, объясняется приведеннымъ замѣчаніемъ Г. Крылова: можно догадываться, что ростущія на сѣверномъ предѣлѣ ели, шишки, которыя были изслѣдованы Шюбелеромъ, подобно елямъ на лѣсномъ предѣлѣ Уральскихъ горъ, отличаютсѣ укороченными, толстыми вѣтвями, способными удерживать спѣлыя шишки въ горизонтальномъ положеніи, — между тѣмъ какъ тонкія вѣтки Алтайской ели, какъ замѣчаетъ Г. Теплоуховъ, къ тому не способны.

Memoiren der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Bd. 50, Buch II, 1885, p 273. Artikel von Friedrich Keppen: „Betreffend die von Ledebour angenommene Verschiedenheit der Stellung der Zapfen auf dem Baum, so bilden bekanntlich hängende Zapfen eines der Hauptmerkmale der Art Fichte (*Picea*), wodurch diese sich von der Weisstanne (*Abies*) unterscheidet, bei welcher die Zapfen

thek näher liegt als der Wald, der findet z. B. bei Blomquist [1]) eine Zeichnung Fig. 3, welche, obzwar in anderer Absicht entworfen, den Stiel des Zapfens und seine Krümmung, sowie die Krümmung im oberen Theil des Zapfens selbst, wo der Stiel noch mit Schuppen besetzt ist, sehr deutlich sehen lässt.

Unter den von mir auf Tafel XI abgebildeten Zapfen ist bei dem mit Lit. E. bezeichneten, dieser Stiel auch sichtbar.

Dass der Zweig selbst sich auch etwas biegt, namentlich wenn der Zapfen gross und schwer ist, ist richtig, doch darf dieses nicht als Ursache des Umbiegens der Zapfen aus der aufrechten zur senkrecht hängenden Lage angegeben werden.

Beim Abfallen des Zapfens wird das Stielchen gewöhnlich zerrissen; untersucht man aber die am Ast haftenden Zapfen, so wird man gewiss sehen, dass es nicht der Ast ist, welcher sich umbiegt. Da das Stielchen oft sehr kurz oder mit Schuppen bedeckt ist, muss man, um es deutlich zu sehen, den Zapfen der Länge nach bis zum Ast spalten.

Ich habe hier in Sagnitz mehrfach kleine Zapfen gefunden, welche wagerecht standen und sehr oft solche, welche in verschiedenen Winkeln schräge abwärts hingen. Im November fand ich einen Zapfen, der in einem Winkel von etwa 45⁰ aufwärts stand. Der Baum war nur gegen 2 m. hoch, stand auf feuchtem Boden und hatte sehr geringen jährlichen Zuwuchs, obgleich er nicht gerade krank genannt werden konnte. Dieser Zapfen war nur 3 cm. lang und wog lufttrocken 1,52 gr. An demselben Baum standen 2 Zapfen von ähnlicher Grösse ganz wagerecht und andere hingen schräge abwärts. Der Samen war ganz rudimentär, obgleich die Zapfen sonst wie reife Zapfen aussahen.

---

auch im reifen Stadium aufwärts gerichtet sind Daher konnte man schon a priori an der Richtigkeit der Behauptung Ledebour's zweifeln, als seien bei der sibirischen Fichte die Zapfen aufrecht stehend. In denselben Fehler sind übrigens auch viele andere Gelehrte verfallen, z. B. A. Schrenk, Grisebach und Fries. — Middendorf, Hissinger and Teplouchof haben fast gleichzeitig ihre Aufmerksamkeit auf einen solchen groben Fehler gerichtet. Teplouchof sagt darüber Folgendes: „Das zweite Merkmal, der Unterschied in der Stellung der Zapfen auf dem Baum, wäre jedenfalls das Wesentlichste, wenn es in Wirklichkeit überhaupt existirte. Es ist schwer zu begreifen, was Ledebour Anlass gegeben hat zu glauben, dass die Zapfen der sibirischen Fichte aufrecht stehen. Um sich von dem Gegentheil zu überzeugen, genügt es zu beachten, dass die Zapfen sowohl der europäischen wie der sibirischen Fichte am Ende dünner Zweige sitzen und deshalb im reifen Zustande abwärts hängen müssen. Ich habe factisch alle Exemplare auf dem Altai mit Zapfen bedeckt gesehen, sie unterschieden sich aber durch ihre Stellung nicht von denen der europäischen Fichten".

Der Widerspruch zwischen Schübeler's und Teplouchof's Behauptungen kann vielleicht durch die angeführte Bemerkung G. Krilow's erklärt werden: „Es lässt sich annehmen, dass die an der Polargrenze der Fichte wachsenden Zapfen, welche von Schübeler untersucht wurden, ebenso wie die Fichten an der Baumgrenze beim Ural, sich durch dicke verkürzte Aeste unterscheiden, welche fähig sind, die Zapfen in horizontaler Stellung zu erhalten, während die dünnen Zweige der Altai - Fichte, wie G. Teplonchof bemerkt, dazu nicht fähig sind".

1) A. G. Blomquist, Finlands Trädslag. II Granen. Finska Forstforeningens. B. III. Häftet II, pag. 76.

In Parkanlagen habe ich sehr oft an Fichten, die vor ein oder zwei Jahren umgepflanzt worden, wagerechte und etwas aufwärts gerichtete kleine Zapfen beobachtet, auch noch im April und Mai. In diesem Fall muss man jedenfalls die Bäume als vom Umpflanzen kränkelnd bezeichnen.

In Finnland auf meinem Gut Moisio habe ich meist auf feuchten Niederungen sehr viel häufiger als hier in Livland wagerechte, auch einzelne etwas aufwärts gerichtete Zapfen bis 5 und 6 cm. lang, gesehen. Immer an Bäumen mit schwachem jährlichen Zuwuchs.

An einem Baume auf trockenem Boden, der mehrere wagerechte Zapfen hatte, stand dicht beim Gipfel ein Zapfen ganz senkrecht aufwärts; als ich es näher untersuchte, ergab sich aber, dass dieser Zapfen zunächst dem Ast auch wagerecht stand und nur der vordere Theil des Zapfens in Folge eines Insectenstichs sich wieder hinaufgekehrt hatte.

Diese Beobachtungen stimmen mit der citirten von Schübeler ziemlich überein, doch kann ich nicht mit solcher Bestimmtheit wie er aussprechen, welche dieser Zapfen für reif und welche für unreif gelten sollen, meist sieht der Samen allerdings rudimentär aus und macht es wohl den Eindruck, als seien die Zapfen mangelhaft entwickelt, namentlich immer klein, aber sonst doch so aussehend, wie reife Zapfen. Da Fichtensamen oft schlecht keimen und dieses Missrathen der Saat auch aus anderen Ursachen entsteht, als dem Zustande der Reife, so kann man es auch nicht nach der Keimfähigkeit des Samens genau bestimmen, ob der Zapfen reif sei oder nicht.

Wonach Schübeler mit solcher Bestimmtheit entscheidet, dass die aufrechten Zapfen (alle?) unreif, die wagerechten (alle?) reif gewesen, verstehe ich nicht ganz. Im Allgemeinen trete ich übrigens seiner Ansicht bei, dass gut entwickelte, ausgewachsene Zapfen hängen. Wir haben jedenfalls kein Recht, die Fichten, an denen bis jetzt aufwärts gerichtete Zapfen nachgewiesen worden, als besondere Art, oder auch nur als besondere Varietät zu bezeichnen, es ist nur eine Folge unvollkommener Entwickelung. So weit meine Beobachtung reicht, kommen aufwärts gerichtete Zapfen nur an kränklichen oder doch schwächlichen Bäumen vor.

Solche schwächlichen Bäume sind schon im südlichen Finnland häufiger als hier in Livland, im hohen Norden mögen sie noch allgemeiner vorkommen und die nicht ganz vollkommen entwickelten wagerechten oder aufwärts gerichteten Zapfen daher dort auch noch häufiger zu finden sein.

Bei den kleinen aufwärts gerichteten Zapfen, die ich gesehen, war das Stielchen, welches den Zapfen mit dem Ast verbindet, meist so kurz, dass ein Umbiegen des Zapfens unmöglich erschien.

Das geringe Gewicht der kleinen Zapfen hat dabei gewiss auch Einfluss auf die Lage des Zapfens, doch habe ich noch sehr viel kleinere Zapfen, die nur 0,07 gr. wogen, gesehen, von denen einige allerdings aufwärts gerichtet

waren, andere aber auch abwärts hingen, so dass das Gewicht nicht ausschliesslich als entscheidend gelten kann. Von diesen kleinsten Zapfen berichte ich noch weiter unten.

Das Merkmal der aufrechten Zapfen ist also nicht als Bezeichnung der Art zulässig, es wird denn auch meistentheils mehr Gewicht auf ein anderes Merkmal gelegt: die Form der Zapfen-Schuppen-Spitze. Gewöhnlich hat der Fichtenzapfen Schuppen von mehr oder minder rhombischer Form, die in eine Spitze auslaufen und diese Spitze ist meist ausgezahnt. Bei der *obovata* sind die Spitzen der Zapfenschuppen dagegen ganzrandig und abgerundet. Auch dieses Merkmal erfordert aber eine genaue Besprechung.

Die oben angeführten Zeichnungen Blomquist's von 4 Zapfen veranschaulichen den Uebergang von № 1 spitzigen ausgezahnten Zapfenschuppen zu № 2 abgerundeten noch etwas gezahnten, № 3 runden nicht ausgezahnten und schliesslich № 4 ganz flach abgerundeten. Die Zapfen № 1 und 2 stammen von Bäumen, die neben einander im Kronspark von Pillilä bei Viborg stehen, № 3 stammt aus dem Salmid-Kirchspiel am Laduga, № 4 aus Lappland.

Einen ebensolchen allmählichen Uebergang habe ich in der hübschen Sammlung des Dr. Trautfetter in Petersburg gesehen. Von 6 Zapfen hatte er 4 als *Picea excelsa* und 2 als *Picea obovata* bestimmt. Alle 6 Zapfen stammten aus derselben Gegend des Olonezkischen Gouvernements; der Sammler hatte den Eindruck gehabt, als unterschieden sich die Bäume, welche diese verschiedenen Zapfen getragen, sonst nicht von einander.

Dr. Dammer sagt, alle Uebergänge der Zapfenschuppen von der europäischen Form zur *obovata* in der Umgebung von Petersburg gefunden zu haben [1]).

Der Baron Eduard Hissinger [2]) hat eine kurze, aber sehr sachgemässe Abhandlung über diesen Gegenstand veröffentlicht. Er weist nach, dass in Scandinavien die Form der *obovata* gemischt mit der gewöhnlichen Fichte wächst und der Uebergang der einen Form in die andere ein allmählicher ist, indem die rhombische Zapfenschuppe, die abgerundete und alle Grade der Zwischenstufen durcheinander vorkommen. Seine Zeichnungen sind sehr anschaulich und instructiv; dabei zeichnet er nicht, wie die meisten Botaniker und wie auch ich es gethan habe, den ganzen Zapfen, wobei man nur die Spitzen der einzelnen Schuppen sehen kann, sondern die einzelnen vom Zapfen abgelösten Schuppen, so dass man die rhombische Form derselben, von der so

---

1) Ueber einige Formen der *Picea excelsa Lk* in der Umgebung St. Petersburgs. Bericht der deutschen Bot Gesel. 1883. Bd. 1 p. 360—362.

2) Nagra ord om dei Skandinavien förekommande formerna af granen (*Picea excelsa*) Botan. Notis 1867 n. 2 & 3, af Eduard Hissinger.

allgemein gesprochen wird, und deren Uebergang zur abgerundeten Form deutlich sehen kann.

Keppen citirt die Ansicht Teplouchow's: „der einzige Unterschied zwischen der *Picea excelsa* und *Picea obovata* bestehe darin, dass das Laub (die Nadeln) bei der *obovata* etwas dichter sitze, als bei der gewöhnlichen *P. excelsa*", er fährt aber gleich darauf fort: „Auch andere Beobachter, z. B. Middendorf, A. Schrenk und Ruprecht bestätigen (?), dass beide Formen sich weder durch die Belaubung (die Nadeln) noch das Aussehen des ganzen Baumes von einander unterscheiden" [1]).

Nachdem ich die grossen Sammlungen des Botanischen Gartens in Petersburg durchmustert, habe ich die Ueberzeugung gewonnen, dass die Verschiedenheit der Zapfen, welche alle als *Picea excelsa* var. *obovata* bestimmt worden sind, unendlich gross ist. Darin stimmen sie allerdings fast alle überein, dass die Zapfenschuppen nicht zugespitzt und nicht ausgezahnt, sondern rund, einige sogar ganz flach abgerundet sind.

Ferner sind die Zapfen selbst mitunter etwas weniger zugespitzt, das heisst mehr walzenförmig, dieser Unterschied ist aber so gering und durchaus nicht allgemein, dass er nicht als Kennzeichen der *obovata* gelten kann.

Auch glaubte ich zu bemerken, so weit es nach den einzelnen in die Sammlung gelangten Exemplaren zu beurtheilen überhaupt möglich ist, dass die Zapfen mit abgerundeten Schuppenspitzen oft, aber auch nicht immer, dunkeler gefärbt sind, als die mit rhombischen oder ausgezogenen Schuppenspitzen.

Nach Blomquist's Zeichnungen ist der dunkelste Zapfen № 4, welcher aus Lappland stammt und den Typus der *obovata* am ausgebildetsten zeigt. In der Trautfetter'schen Sammlung waren alle Zapfen, die aus derselben Gegend des Olonezkischen Gouvernements stammten, von gleicher ziemlich dunkeler Farbe.

Die aus Sibirien stammenden Zapfen, im Herbarium des botanischen Gartens in Petersburg, waren meist in verschiedenen Nüancen sehr dunkel, nur ein Zapfen vom Amur war ganz hell und auch mehr zugespitzt als die anderen.

Die von mir auf Tafel XII photographirten Zapfen aus Lappland können aber durchaus nicht dunkel genannt werden.

Recht allgemein schienen mir aber die ganzrandigen, d. h. ungezahnten Zapfenschuppen, dicker zu sein als die rhombischen und ausgezahnten.

1) Записки Императ. Акад. Наукъ, Т. 50, кн. II, 1885, ср. 273: „Теплоуховъ ни могъ найти никакого ясно-выраженнаго признака какъ въ способѣ заостренія, такъ и вообще въ формѣ иголъ сибирской ели. Единственное различіе существующее въ этомъ отношеніи состоитъ въ томъ что иглы сибирской ели сидятъ чаще т. е. ближе другъ къ другу". И другіе наблюдатели напр. Миддендорфъ, А. Шренкъ и Рупрехтъ подтверждаютъ, что по хвоѣ своей, и вообще по наружному виду всего дерева обѣ формы ели не различаются другъ отъ друга.

Die Grösse der Zapfen schwankt auch sehr, die meisten der als *obovata* bestimmten Zapfen waren unter 7 cm. lang. Die abgerundete Form der Schuppen war jedenfalls in Sibirien sehr ausgebildet, doch waren in den Sammlungen auch Zapfen vorhanden, deren Zapfenschuppen andeutungsweise zur spitzigen und ausgezahnten Form hinneigten. Ich habe mir darüber notirt: Ein Zapfen vom Amur mit kleinen Spitzen. Aus der Dsungarei etwas ausgezahnt doppelspitzig. Vom Ussuri mit ganz kleinen Spitzen. Von der Lena sehr flach abgerundete Schuppenspitzen. Vom Altai auch sehr flach abgerundete Schuppen. Ich meine damit nicht, dass alle aus den genannten Gegenden stammenden Zapfen so gestaltet waren, sondern nur, dass ich es bei einem oder dem anderen Zapfen aus jener Gegend bemerkte.

Ich habe auch hier in Sagnitz (bei Dorpat — Livland) Zapfen mit abgerundeten Schuppenspitzen gefunden.

Verschiedenheit der hier vorkommenden Zapfen

Die Mannigfaltigkeit der hier vorkommenden Zapfenformen ist überhaupt sehr gross, es giebt sowohl schlanke als dicke, spitz zulaufende und mehr oder weniger cilindrische, die Schuppen abgerundet oder spitz ausgezogen, sehr breit oder länglich, die Spitze glatt abgestumpft mit scharfen Ecken oder abgerundet, ausgezahnt oder ganzrandig, auch nur ein Mal in der Mitte eingekerbt, so dass eine Doppelspitze entsteht, sowie alle Nüancen von Uebergängen und Combinationen dieser Formen. Mitunter rollen sich die Ränder der Schuppen an den Seiten auf, während die Spitze der Schuppe dicht anliegt, oder die Spitze hebt sich. Ich habe auch Zapfen gefunden, deren Schuppenspitzen ganz zurückgeklappt sind und zwar haben dann meist alle Zapfen an demselben Baum diese Eigenthümlichkeit mehr oder weniger stark ausgebildet. Siehe Photographie Tafel XI. Bei der Sumpffichte oder Krummfichte findet man diese Mannigfaltigkeit der Zapfenformen häufiger, oft auch hochgradiger als bei normal gewachsenen Bäumen. Es sieht aus, als werde die Fichte durch den nassen Torfmoor, welcher die Form ihres Wachsthums abändert, auch dazu gebracht, die vielen Varietäten von Zapfen, zu denen sie überhaupt befähigt ist, häufiger zu bilden.

Um die verschiedenen hier vorkommenden Formen der Fichtenzapfen zu veranschaulichen, habe ich aus meiner Sammlung 13 Zapfen ausgewählt und photographiren lassen.

Tafel XI. Der Zapfen M ist eine ächte *obovata* vom Altai (in Sibirien). Die anderen 11 Zapfen stammen alle aus demselben Walde von etwa einer Quadratwerst (Quadratkilometer) Grösse hier in Sagnitz. Meist von grossen normal gewachsenen Bäumen, nur F stammt von einer Krumm- oder Sumpffichte und K und L von kleinen, schwächlich aussehenden Bäumen mit geringem jährlichem Zuwachs.

A hat stark längliche Schuppen, ganz randig.

B breitere Schuppen mit lang ausgezogener Spitze, die stark gekerbt ist, so dass eine Doppelspitze entsteht.

C hat weniger lang ausgezogene breitere Spitzen, die mehrfach gezahnt sind.

D hat Schuppen, die nicht in eine Spitze ausgezogen, sondern gerade abgestumpft und deutlich fein gezahnt sind. Der Zapfen ist 14,5 cm. lang und gehört zu den längsten, die ich hier gefunden. Diese beiden Zapfen (C und D) repräsentiren die Formen, welche hier in vielerlei Nüancen am häufigsten vorkommen, die gewöhnliche mittlere Länge ist hier etwa 10 cm.

E hat nicht breite, aber vollkommen ganzrandige, das heisst garnicht ausgezahnte, Schuppen. An diesem Zapfen ist auch das Stielchen, welches den Zapfen mit dem Ast verbindet deutlich sichtbar.

F hat ganz spitz zulaufende Schuppen, sie sind weder abgestumpft noch ausgezahnt, einige sind so spitz wie Stecknadeln. Leider ist solches auf der Photographie nicht deutlich sichtbar.

G hat schon etwas von dem Typus der abgerundeten Schuppen, obgleich einige der Schuppen noch ausgezahnt sind, andere nicht.

H hat ungezahnte, abgestutzte Schuppenspitzen.

I ist 9 cm. lang, hat vollkommen abgerundete dicke, glatte Schuppen und cylindrische Form, steht der *obovata* daher am nächsten. Dieser Zapfen könnte selbst *obovata* genannt werden. Man vergleiche mit den 12 Zapfen der ächten *obovata lapponica*, welche auf Tf. XII abgebildet sind.

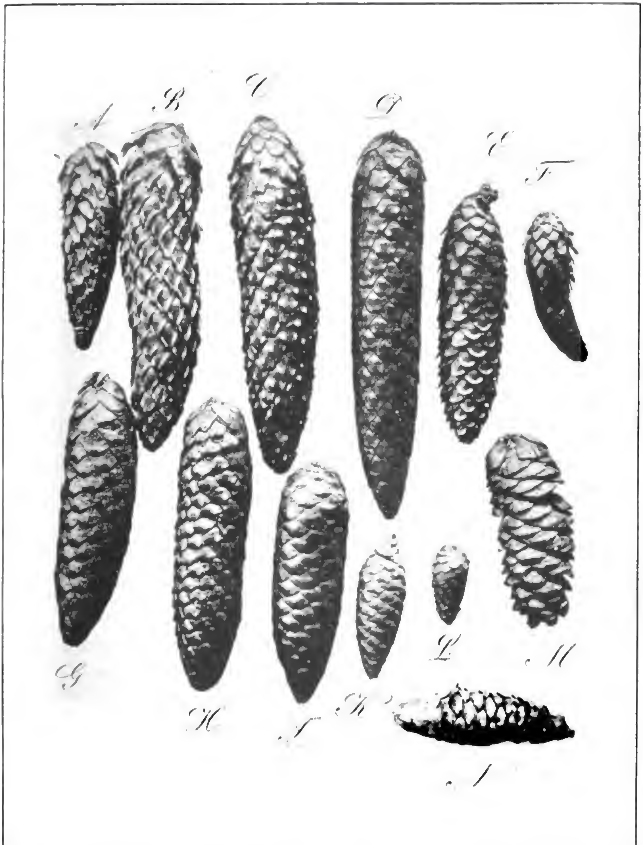
K ist 5 cm. lang und gleicht der *obovata* vom Altai M insofern noch mehr, als die Rundung der Spitze noch abgeflachter ist als bei I.

L ist der kleine Zapfen, 3 cm. lang, welcher aufrecht im Winkel von etwa 45° stand, er hat auch ganzrandige abgerundete Schuppen, entspricht also allen Kennzeichen, welche für die *obovata* aufgestellt worden sind.

M ist, wie oben gesagt, ein ächter Obovata-Zapfen vom Altai. Die Schuppenspitzen dieses Exemplars sind allerdings noch flacher als diejenigen, welche ich hier habe auffinden können, man achte z. B. auf die oberste etwas geplatzte Schuppe, da ist allerdings garnichts vorhanden, was eine ausgezogene Spitze genannt werden könnte (wie etwa bei den obersten Schuppen des Zapfens B.). So hochgradig flach, fast geradlinig, ist die Rundung der Schuppenspitze aber auch bei den aus Sibirien stammenden Zapfen durchaus nicht immer.

Nachdem die Photographien bereits gemacht waren, habe ich noch eine grosse Mannigfaltigkeit der Schuppenformen gefunden:

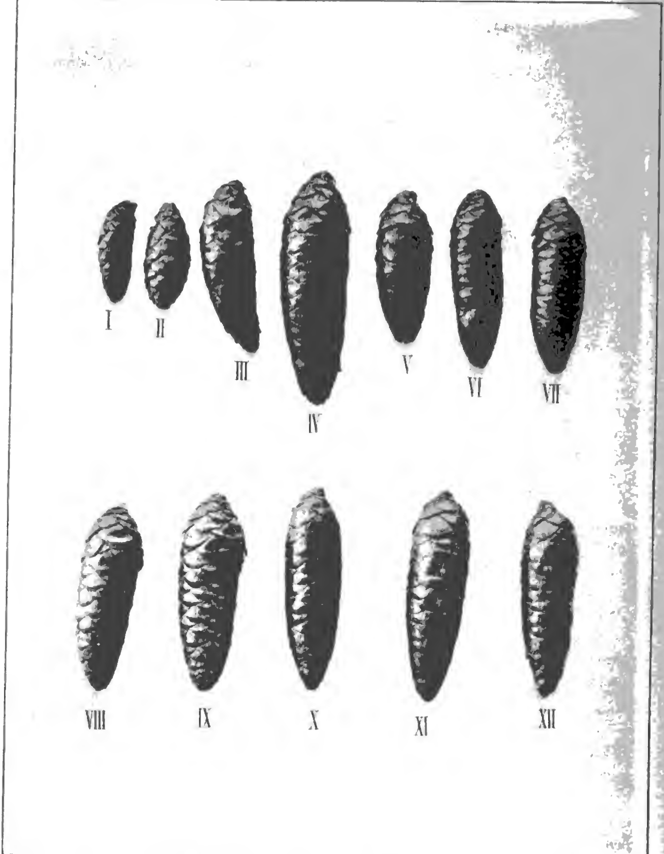
TAFEL XI.



A-L. u. N. FICHTENZAPFEN AUS SAGNITZ

M. OBOVATA ZAPFEN VOM ALTAI-SIBIRIEN.

TAFEL XII.



12 ZAPFEN DER OBOVATA LAPPONICA
AUS KUNSAMO FINNISCH-LAPPLAND 66° N. B.

Sehr characteristische obovataartige Zapfen z. B. an einem kleinen Bäumchen auf dem Domberge in Dorpat vor der Wohnung des Professors Schwarz bei der Sternwarte. Die Zapfen sind 3 cm. lang und haben ganzrandige, vollkommen runde Schuppen.

Ganz besonders mannigfach sind die Formen der Zapfen an Sumpffichten, z. B. solchen mit sehr breiten Schuppen, deren Spitze ganz plötzlich ausgezogen ist, wie ein dornartiger Ansatz an einer obovataförmigen Schuppe.

Ferner Zapfen, die bei einer Länge von 9 bis 10 cm. nur 1,5 cm. Dicke haben.

An einem Baum im Torfmoor, der den Typus der Sumpffichte nur ganz wenig entwickelt hatte, fand ich eine grosse Menge ganz besonders kleiner Zapfen, die sowohl hingen, wagerecht schwebten, aufrecht standen, als auch in allen möglichen Zwischenrichtungen sich befanden. Der grösste Zapfen an diesem Baum war 55 mm. lang und wiegt lufttrocken 4,4 gr. Der kleinste Zapfen ist 6 mm. lang, 4 mm. dick und wiegt 0,07 gr., d. h. er ist nicht grösser als eine Wachholderbeere oder eine kleine Erbse.

Sehr mannigfach ist auch die Dicke der Zapfenschuppen; an Sumpffichten habe ich sie mitunter dünn wie Papier gesehen, in anderen Fällen sehr dick und hornartig hart.

Die Anordnung der Schuppen auf dem Zapfen verläuft entweder in einer nach rechts oder in einer nach links aufsteigenden Spirale. Fast bei jedem regelmässig gebildeten Zapfen kann man eigentlich, wenn er z. B. linksläufig ist, gleichzeitig eine ganz flach verlaufende und eine ganz steil verlaufende Spirale, die nach rechts herum laufen, erkennen.

Die Farben sind so mannigfach, dass ich es ganz aufgebe, sie bei den einzelnen Zapfen mit Worten zu characterisiren. Hier und da habe ich grünlich angelaufene Zapfen wohl gefunden, aber wirklich ganz grüne nicht. Die Nüancen der Farben bewegen sich meist aus hellem Gelb bis zum dunkelen Braun mit Einmischung von röthlichen und violetten Tönen, selbst bei ganz reifen grossen Zapfen im März.

Der Director des Forstinstituts Evois in Finnland, Herr A. G. Blomquist, hat die Gefälligkeit gehabt, für mich Obovatazapfen aus Kuusomo 66° N. Br. zu verschreiben. 12 dieser Zapfen sind auf Tafel XII photographisch abgebildet. *Obovata lapponica.*

№ I ist der kleinste Zapfen, den ich unter mehreren hunderten habe finden können, er ist 36 mm. lang, seine Form ist die am wenigsten zugespitzte, die Schuppen sind recht flach abgerundet. № II ist mehr eiförmig und hat sehr deutlich ausgezahnte Schuppen, die auch durchaus nicht rund, sondern deutlich rhombisch zugespitzt sind. Noch mehr zugespitzte Schuppen haben № III und IV. Letzterer gehört zu den grössten, welche in der ganzen Sendung zu finden waren, er ist 83 mm. lang. Den höchsten Grad der flachen

Abrundung der Schuppenspitzen, welchen ich unter den lappländischen Zapfen fand, haben die № VI und VII, während V einen Uebergang zu diesen bildet.

Einer zweiten kleinen Sendung Zapfen, ebenfalls aus Kuusamo, entnehme ich die folgenden: № VIII hat auch etwas zugespitzte Schuppen, № IX bildet einen Uebergang und № X, XI, XII haben ganz flach abgerundete Schuppenspitzen.

Ich hätte zwischen diesen beiden Sendungen gar keinen Unterschied namhaft zu machen, wenn nicht die Samen aller Zapfen dieser kleinen Partie violett gefärbte Samenflügel hätten, was bei den anderen nicht der Fall war.

Auf meine Anfrage hat Herr Director Blomquist mir geantwortet, dass beide Sendungen aus demselben Walde stammen, die kleine Partie im November, die grössere im Januar eingesammelt sei. Die Zeit, in welcher die Zapfen gepflückt worden, kann auf die Farbe der Samenflügel keinen Einfluss gehabt haben, denn eine dritte Sendung Zapfen aus demselben Walde, die erst im Februar eingesammelt wurden, hat Zapfen sowohl mit hellen als auch solche mit violetten Samenflügeln.

Gleichzeitig sandte mir der Director Blomquist auch noch eine vierte Partie Zapfen aus Sodankylä Lappland (67° 30' N. Br.). Diese haben den Typus der *obovata* in sehr viel geringerem Grade entwickelt, als die meisten der Zapfen aus Kuusamo, d. h. einzelne Zapfen nur haben ganzrandige und abgerundete Schuppen, während andere recht deutlich rhombisch und ausgezahnt sind, die meisten aber in allen Nüancen allmähliche Uebergänge und Combinationen dieser Formen zeigen. Die Grösse, die Farbe und der sonstige Habitus der Zapfen entspricht denen aus Kuusamo. Bei dieser Partie von Zapfen ist es absolut unmöglich, eine Grenze zu ziehen und zu sagen, was noch *obovata* genannt werden kann und was nicht, so allmählich gehen diese Formen in einander über.

Wenn wir die anderen als Kennzeichen der *obovata* von Ledebour anfänglich angegebenen Merkmale als: aufrecht stehende Zapfen, cylindrische Form der Zapfen, geringe Grösse etc. aufgeben und nur noch an die Form der Schuppe und das Ungezahntsein ihrer Spitze halten, sehen wir hier doch noch deutlicher als bisher, dass auch diese beiden Merkmale nicht immer zusammen auftraten, sondern alle möglichen Combinationen in allen Graden des allmählichen Uebergangs vorkamen.

Da meine Photographien bereits angefertigt sind, bitte ich die Tafeln XI und XII mit einander genau zu vergleichen; obgleich die Extreme hier nicht so hochgradig sind, kann man durch den allmählichen Uebergang erkennen.

Als Abnormität muss ich noch einen Zapfen nennen, den ich erst jetzt an der Trauerfichte Taf. VII bemerkt habe, er ist halbkreisförmig gekrümmt und an seinem Ende hat er einen mit Nadeln besetzten Zweig als Fortsetzung,

eine Eigenthümlichkeit, die ich bei Lerchenzapfen wohl gesehen habe, bei Fichtenzapfen nur in diesem einen Fall.

Der Zapfen N auf Tafel XI hat ganz zurückgeklappte Schuppenspitzen, eine Eigenthümlichkeit, die so hochgradig allerdings selten ist, in geringerem Grade aber öfter vorkommt. Hier sind die Schuppenspitzen so stark zurückgeklappt, dass der Samen gar nicht herausfliegen kann. Der Zapfen E zeigt in seinem vorderen Theil auch einige Anlage dazu.

Wir können ausser der Schuppenspitze auch andere Eigenthümlichkeiten der Zapfen hervorheben. I gehört zum Beispiel zu einem Typus, der immer besonders glatt erscheint, die Schuppen sind sehr eben, liegen ganz besonders dicht aneinander und heben sich beim Trocknen nur langsam, aber doch ganz vollständig auf, um den Samen ausfliegen zu lassen, sie verwerfen sich dabei garnicht. B und C dagegen haben eine dicht aufliegende Schuppenspitze, während beide Ränder der Schuppe aufgerollt sind; der Zapfen hat daher selbst in ganz feuchtem Zustande ein unebenes, welliges Aussehen, das gelegentlich sehr hochgradig sein kann.

Während E in geringem Grade und N in hohem Grade die Schuppen nach Aussen aufrollen, rollen sich bei H die Schuppenspitzen etwas nach Innen.

Der obovataartige Zapfen J Taf XI stammt von einem normal gewachsenen grossen Baum von etwa 50 Jahren. Der Standort ist vollkommen trocken, dicht an einem Abhang, der Boden ist sandig, mit Lehm untermischt.

Dicht neben diesem Baum steht auf der einen Seite ein genau ebenso aussehender, der Zapfen mit sehr lang ausgezogenen und welligen Schuppen trägt, während auf der anderen Seite ein dritter Baum steht, der im Astwurf, der Belaubung und so weiter diesen auch vollkommen gleich ist, während seine Zapfen eine Uebergangsform etwa in der Mitte zwischen den Extremen der beiden anderen bilden.

var. medioxima und fennica.

Zwischen der rundschuppigen *obovata* und der in Europa häufigeren Form mit rhombischen, ausgezahnten Schuppen kommen, wie gesagt, alle Abstufungen des ganz allmählichen Ueberganges vor. Eine dieser Mittelstufen ist vom Professor W. Nylander als besondere Varietät mit dem Namen *Abies (Picea) excelsa* var. *medioxima* benannt worden. Diese Form oder etwas ihr Aehnliches ist vom Dr. Regel auch *fennica* genannt worden [1]). Doch hat der Professor J. P. Norrlin aus Helsingfors, der sich speciell mit dieser Frage beschäftigt, die *medioxima* auch in Tyrol gesehen [2]).

Zapfenformen im südlichen Finnland.

Im südlichen Finnland, auf meinem Gute Moisio, Gouvernement Niland (Helsingfors), habe ich alle Formen von Zapfen gefunden mit ebenso hochgradig entwickelten Extremen der länglich-rhombischen, ausgezogenen und ausgezahnten

1) Русская дендрологія Д-ра Э. Регеля. 1870. стр. 18.

2) Blomquist p. 75.

Schuppen, wie die auf Tafel XI abgebildeten, hier in Livland gefundenen Zapfen, und zwar nicht nur im grossen Walde, sondern sogar auf einem ganz kleinen Areal, im Park neben dem Wohnhause, auf einer felsigen trockenen Anhöhe. Nur waren in Moisio hochgradig entwickelte Obovata-Zapfen viel häufiger als in Livland, ich schätze sie im Park etwa auf 5 % aller Bäume. Die Grösse der obovataartigen Zapfen, das heisst solcher mit flach abgerundeten Schuppen, war durchaus nicht immer kleiner, als die der Zapfen mit rhombischen Schuppen es dort ist. Die Zapfen eines Baumes, welche die breitesten Schuppen hatten, waren durchschnittlich 8 bis 10 cm. lang.

Eine merkwürdige Abnormität, welche ich dort im Walde fand, war ein Zapfen, bei dem alle Schuppen der Länge nach gespalten sind, beim Trocknen haben sich die Schuppen nicht nur nach aussen gehoben, sondern die Hälften der Schuppe haben sich, die eine nach rechts, die andere nach links, ganz regelmässig zur Seite gebogen, so dass die Hälften je zweier neben einander stehender Schuppen sich jetzt kreuzen wie eine Scheere [1]).

Um auf den Vergleich der *varietas obovata* mit unserer gewöhnlichen *Picea excelsa* zurückzukommen, so muss ich meine Ansicht dahin formuliren, dass nach der Form der Zapfen-Schuppen-Spitzen die Extreme der sibirischen und europäischen Varietät allerdings so sehr verschieden von einander sind, dass die verschiedene Benennung: *Picea excelsa* var. *obovata* im Gegensatz zur europäischen *Picea excelsa Link.* ganz berechtigt und sogar nothwendig erscheint, obgleich die Kennzeichen der einen Form so allmählich in die der anderen übergehen, dass weder eine geographische Grenzscheide zwischen beiden Varietäten gezogen werden kann, noch die genaueste Definition dazu hinreichen wird, um in allen Fällen mit Sicherheit zu bestimmen, zu welcher Varietät ein Zapfen gehört.

In Lappland kommen beide Formen der Fichte vor.

B l o m q u i s t führt p. 75 nach H i s s i n g e r an, dass Prof. Th. S a e l a n am 19. August grüne aber hängende Zapfen mit Schuppen von flachrunder Form in Karwaselkä in Hetta (Enontekis 68° 25 N. Breite) und am folgenden Tage bei Pallastunturi (68°) Zapfen mit Schuppen von rhombisch-spitziger Form fand. Er hatte den Eindruck, als sei diese letztere die allgemein im Lande vorkommende und auch in Lappland die allgemeinere Form.

Prof. B l o m q u i s t schreibt mir darüber: „Was die Obovata-Form der Fichte betrifft, so habe ich bis an die Grenze des Tobolskischen Gouvernements,

---

1) Im Juni 1887 hatte ich Gelegenheit, eine grössere Partie Fichtenzapfen zu mustern, die in meinem Walde Buchta in Polen eingesammelt waren (Gouv. Suwalki, südlich von Wirballen). Im Durchschnitt waren grosse lange Zapfen etwas häufiger als hier in Livland und viel häufiger als im südlichen Finnland. Zapfen mit abgerundeten obovataartigen Schuppenspitzen waren dagegen seltener als hier und sehr viel seltener als in Finnland, auch nicht so hochgradig abgerundet.

Ich fand dort auch Zapfen mit zurückgeklappten Schuppenspitzen und solche, deren Schuppen der Länge nach in zwei Theile gespalten waren.

300 Werst (Kilometer) östlich vom Ural, noch einzelne Fichten mit der normalen spitzigen Schuppenform gesehen und überhaupt am Ural weniger characteristische Obovata-Formen beobachtet als im finnischen Lappland. Andererseits habe ich aber im letzten Sommer (1886) auf den österreichischen und schweizer Alpen einzelne Fichten mit ziemlich gut abgerundeten Schuppen gesehen, die wenigstens der Varietät *medioxima Nyl.* entsprachen, eine Beobachtung, die übrigens schon von J. P. Norrlin, Prof. in Helsingfors, und wie ich glaube, auch von Kerner in Wien gemacht worden ist.

Bei Reisen sowohl in Kuusamo als in Sodankyla habe ich auch von den rhombischen Schuppenformen vielleicht beinahe ebenso viel als von den Obovata-Formen bemerkt".

Aus Sibirien haben die Reisenden so allgemein Zapfen mit abgerundeten Schuppenspitzen mitgebracht, dass diese Form dort unzweifelhaft die vorherrschende sein muss; da aber in den Sammlungen einzelne Zapfen, wie oben angeführt, auch Anlage zur ausgezogenen und ausgezahnten Form haben, so halte ich es für wahrscheinlich, dass man auch dort Zapfen wird finden können, welche den westlichen europäischen Typus mehr oder weniger deutlich entwickelt zeigen.

Es ist mir nicht bekannt, dass Vergleiche darüber angestellt worden seien, wann die Zapfen der europäischen Fichte und wann die der *Picea excelsa* var. *obovata* sich aus der aufrechten Stellung der Blütheperiode zur hängenden Stellung umbiegen. Hier geschieht es meist Ende Mai und Anfang Juni, doch sind meine Beobachtungen hierüber nicht genau genug, um die Grenzen der extremen Fälle zu bestimmen. Dass das Umbiegen der Zapfen bei der *obovata* später geschieht, als bei der gewöhnlichen Fichte, ist nicht undenkbar, um so mehr, als die Zapfen der *obovata* den Zapfen der Weisstanne oder Edeltanne *Abies pectinata DC.*, welche immer aufrecht bleiben, in der Schuppenform ähnlich sind. **Zeit des Umbiegens der Zapfen.**

Die Reisenden, welche jedenfalls häufiger im Sommer als im Winter botanische Excursionen unternehmen, mögen durch das aufrechte Stehen vieler Zapfen zu einer Zeit, wo bei ihnen zu Hause schon alle Zapfen hängen, vielleicht dazu verleitet worden sein zu sagen, dass diese Zapfen überhaupt aufrecht bleiben. Hat aber Einer es einmal ausgesprochen, der Andere es zu Hause gelesen und sieht nun selbst in jenen Gegenden einige aufrechte, vielleicht noch unreife Zapfen, so wiederholt er nur zu leicht, er habe auch die Art gesehen, deren Zapfen aufrecht blieben.

Wenn man, wie es sehr richtiger Weise üblich, neben den Namen der Pflanze den des Botanikers setzen will, welcher sie mit diesem Namen benannt und beschrieben hat, dann kommt man bei der var. *obovata* in grosse Verlegenheit. Die meisten Autoren schreiben jetzt *Picea excelsa* var. *obovata Ledebour.* **Autorschaft des Namens var. *obovata*.**

Nach dem hier unten angeführten Citat von Keppen[1]) hat Ledebour diese Varietät als besondere Art hingestellt und *Picea obovata Ledeb.* genannt, später hat er sie aber (irrthümlicher Weise) mit der kaukasischen Form der Fichte unter dem Namen *Pinus orientalis* vereint. Da Ledebour selbst den Namen *obovata* ganz aufgiebt, den Namen *Picea* gegen *Pinus* vertauscht und das von ihm angegebene Hauptmerkmal, das aufrechte Stehen der Zapfen (*strobilis cylindricis erectis Ledeb.*) nur ein Irrthum oder höchstens eine seltene Ausnahme ist, denn im ganzen Norden und in Sibirien hängen die ausgewachsenen Zapfen ebenso wie bei uns, so darf man, wenn man gewisse Fichten mit hängenden Zapfen *Picea excelsa* var. *obovata* nennt, nicht guterdings Ledebour's Namen dahinter setzen, weil er keinen einzigen dieser vier lateinischen Ausdrücke gebraucht, sondern seinen Baum schliesslich *Pinus orientalis*, also mit zwei ganz anderen Worten bezeichnet. Da ferner fast alle Botaniker, welche diese Frage besprechen, ihr Scherflein dazu beitragen, Ledebour's Ansicht zu widerlegen, weiss ich nicht, nach wem ich die *Picea excelsa* var. *obovata* jetzt benennen darf. Sehr allgemein gebraucht ist dieser Name allerdings.

Unterschied der *obovata* und *orientalis*.

Die *Picea obovata* und *Picea orientalis*, welche Ledebour später zusammengeworfen und *Pinus orientalis* genannt, scheinen doch merklich verschieden zu sein. Die letztere von Carrière P. orientalis genannte kaukasische Varietät verträgt nämlich das Klima von Petersburg jedenfalls nicht, unterscheidet sich dadurch also wesentlich von der nordischen *obovata*. Ich habe zwei Exemplare der kaukasischen Fichte im Petersburger botanischen Garten im Treibhause als Topfgewächse gesehen. Unter diesen Umständen waren es hübsche Zwergbäumchen geworden mit dichten Kronen ohne Gipfeltriebe, das Laub war heller als das der gewöhnlichen Fichte und obgleich kurz, doch besonders weich, namentlich an dem einen Exemplar so sehr, dass man beim Anfühlen fast an Lerchennadeln erinnert wurde [2]).

Var. *compacta*.

Bei meinem letzten Besuch des botanischen Gartens in Petersburg sah ich auch zwei sehr hübsche Exemplare einer Zwergform der Fichte, die kaum anderthalb Fuss hoch, über dem Rasen eine dichte Krone von mehreren Fuss

---

1) Кеппенъ, Зап. Импер. Акад. Наукъ. Т. 50, кн. II, 1885, ср. 271. Изъ прочихъ выше-изложенныхъ признаковъ, служившихъ для отдѣленія разновидностей и даже для образованія новыхъ видовъ, важнѣйшимъ является форма чешуй на шишкахъ (C. F. Ledebour, Flora altaica T. IV, p. 201). На основаніи главнѣйше этого признака въ совокупности съ формою и расположеніемъ хвои, Ледебуръ образовалъ особый видъ сибирской ели. *Picea obovata Ledeb.* самостоятельность которой признавалась многими ботаниками, напр. Рупрехтомъ и Траутфетеромъ. Въ послѣдствіи самъ Ледебуръ (Flora rossica. T. III, p. 671) ошибочно соединилъ сибирскую ель съ кавказскою и назвалъ ее *Pinus (Picea) orientalis Ledeb.*

2) Русская дендрологія Д-ра Э. Регеля 1870, стр. 18: „Ледебуръ, впослѣдствіи, совершенно безъ основанія соединилъ *P. obovata* съ кавказскою *P. orientalis Carr.* Послѣдняя имѣетъ гораздо болѣе свѣтлую зелень, болѣе густой ростъ и меньшую степень выносимости, такъ что въ Петербургѣ ежегодно вымерзаетъ до снѣга.

Durchmesser gebildet hatten. Die Etiquette trug den Namen *Picea excelsa* var. *compacta hor.* Sie sollen aus einer Baumschule Deutschlands stammen.

Formverschiedenheit.

Nach allem Vorhergehenden unterliegt es keinem Zweifel, dass die Fichte ein Baum ist, welcher unendliche Formverschiedenheiten aufweist. Ausser den hier angeführten Abarten giebt es noch eine endlose Menge theils häufig vorkommender, theils seltener Formen, die in allen möglichen Abstufungen in einander übergehen. An Namen für sehr viele dieser Spielarten fehlt es keineswegs; was aber unter diesen Namen eigentlich gemeint sei, davon könnten die Erfinder derselben leider oft sagen, das wüssten „nur sie und Gott allein", oder soll man gelegentlich auch sie selbst davon ausnehmen? Beschreibungen anzuführen, die von anderen Forschern falsch verstanden worden, wäre nicht schwer; übrigens hat man an dem, was ich über die Missverständnisse der Beschreibungen und Namen so markirter Varietäten, wie die Schlangenfichte und Hängefichte, bereits angeführt, auch schon Beispiele davon gesehen[1]). Als Probe der Mannigfaltigkeit von Namen will ich hier noch die 37 Varietäten der Fichte nennen, welche allein in dem Hauptcatalog der Gehölzbaumschule des Ritterguts Zöschen bei Merseburg als dort käuflich zu haben genannt sind:

Abies excelsa DC., Weihnachtsfichte: — *argentea*, — *aurea*, — *caerulea* zu *commutata* gehörig, — *Clanbrasiliana Loud*, Zwergform, — *conica*, — *concinua*, — *Craustoni*, — *crassifolia*, — *diffusa*, — *dumosa*, — *elegans*, — *eremita*, — *finedonensis*, — *gigantea*, — *Gregoriana*, — *Jadonensis*, — *inverta*, — *longifolia* = *obovata Loud.* Altaifichte, — *Merkii*, — *mukronata*, — *nana* Zwergform, — *obovata hort. bat nec Loud*, — *parvifolia*, — *pendula*, — *pendula tortuosa*, — *phylicoides*, — *procumbens*, — *pumilia* Zwergform, — *pumilia glauca*, — *pygmaea*, — *pyramidalis*, — *pyramidalis robusta*, — *reclinata*, — *Remonti* sehr hübsche schmale Pyramidalform, — *tabulaformis*, — *tenuifolia*, — *viminalis Alstr.* Schlangenfichte.

Das Sprichwort sagt: „Wer das glaubt, zahlt 'nen Thaler". In diesem Fall beträgt der Preis für das ganze Sortiment in grossen Exemplaren 82 Reichsmark.

---

1) Wie wenig selbst die ersten Autoritäten auf diesem Gebiet sich verstehen, erhellt gut aus folgender Bemerkung von Caspari: Schriften der phys.-ökonom. Gesellsch. zu Königsberg. Jahrg. XIX, 1878 p. 155, Randbemerkung: „K. Koch (Prof. der Botanik in Berlin) hat früher (Dendrologie II, 1. 237) die Schlangenfichte und die Alströmer Hängefichte in verwirrender Weise als eine Form behandelt und fährt in einem neuen Werk (Vorlesungen über Dendrologie 1875, 366) fort, dieses zu thun. Man weiss daher nicht, wovon er redet, wenn er im Pusterthal in Tyrol und bei Reinhardsbrunn von „Schlangenfichten" spricht, zumal er die Bäume nicht so eingehend beschreibt, dass der Leser sich selbst über sie ein Urtheil bilden kann Nach Koch's Beschreibung können die Bäume des Pusterthales keiner von beiden in Rede stehenden Formen angehören, da er sagt: Die meisten besassen bis zum obersten Drittel das Ansehen einer gewöhnlichen Rothtanne, so dass das oberste zur Schlangenfichte umgewandelte Drittel um desto mehr im grellen Gegensatz zu dem unteren Theile stand". Erst ein Botaniker, der besser als Koch zu unterscheiden und zu beschreiben versteht, wird uns Aufklärung über jene Bäume zu geben haben.

Wie mag wohl zum Beispiel die kleine *gigantea*, welche ich eben bestelle, sich von anderen Fichten unterscheiden? Jetzt wahrscheinlich garnicht, — aber nach 150 Jahren? — Der Handelsgärtner und ich, wir werden über diese Frage jedenfalls dann nicht streiten.

Ist die Schlangenfichte ein Atavismus?

Sind nun diese eigenthümlichen Formen der Fichte Rückschläge auf frühere Formen, Atavismen, sind es neue Formen, welche sich bilden, oder sind es krankhafte Erscheinungen, welche sich nur gleichen wie die Symptome etwa der Scharlachpatienten. Aus Mangel an Beobachtungen über die anderen Fälle muss ich mich bei dieser Besprechung auf die Sumpffichte und die Schlangenfichte beschränken. Die Sumpffichte bin ich am ehesten geneigt eine krankhafte Form zu nennen, welche unter denselben äusseren Umständen fast immer auftritt, aber nicht so weit erblich wird, dass ihre Samen auch an trockenen Standorten wieder Krummfichten erzeugen. Dass Samen der Krummfichte auf nassem Torf hochgradiger entwickelte Krummfichten bilden können, als Samen von normalen Bäumen, ist möglich, weil die Disposition, sich diesen abnormen Verhältnissen anzupassen, durch natürliche Zuchtwahl gesteigert werden muss, wenn es während vieler Generationen immer geschehen ist. Die Schlangenfichte aber kann nicht bloss eine krankhafte Erscheinung genannt werden, weil sie unter sehr verschiedenen äusseren Umständen auftritt und durch Samen sich vererbt, wie Schübeler's Versuch in Christiania nachgewiesen hat. Es ist also eine besondere Varietät.

Repräsentirt nun diese einen Atavismus oder ist es eine neue Bildung, welche zu einer neuen Art werden kann?

Professor Caspari braucht als Ueberschrift seiner Besprechung der Schlangenfichte und pyramidalen Eiche etc. den Ausdruck: „Ueber einige Spielarten, die mitten im Verbreitungsgebiet der Stammarten entstanden sind". Danach glaube ich annehmen zu müssen, dass er die Schlangenfichte für eine neu entstandene Varietät hält. Von anderer Seite ist mir die Bemerkung gemacht worden, dass die Schlangenfichte möglichen Falls eine alte terziäre Form sei und man unter den Bernsteinfunden nach ihrer Spur suchen müsse. Ich bin geneigt, Caspari's Ansicht beizutreten, mit dem Vorbehalt, dass selbst in einer neuen Form sehr oft, vielleicht sollte ich sagen immer, auch Anklänge an frühere Formen oder an Formen verwandter Arten, erkannt werden können, die Sätze: „Es giebt nichts Neues unter der Sonne" und „Eine absolute Wiederholung des Gewesenen kommt in der Natur nicht vor", haben beide eine gewisse Berechtigung.

Darwinische Theorie.

In letzter Zeit ist so viel nach dem Nutzen gesucht worden, welchen alle neuen oder uns überhaupt nur fremden Formabweichungen für die Art im Kampf um's Dasein haben sollten, dass man darüber die Freiheit des Blickes verlor. Zum grossen Theil ist die Naturforschung den absoluten Gegnern der darwinischen Theorie, welche von der Wahrheit derselben überhaupt nichts wis-

sen wollten, dafür zu Dank verpflichtet, dass wir jetzt schon einzusehen anfangen, es gebe ausser dem Kampf um's Dasein und natürlicher Zuchtwahl noch viele Ursachen, welche mit und neben diesem allerdings sehr mächtigen Agens die Gestaltung der neuen Arten bedingen. Wenn also die Fichte die Eigenthümlichkeit besitzt, die Gestalt der Schlangenfichte annehmen zu können, so dürfen wir, auch wenn es eine neue Form ist, welche noch nicht da gewesen und nur als Disposition der Art bestand, doch nach Analogien suchen, welche die Disposition der Art zu diesen Gebilden nachweisen.

Blicken wir auf die ganze Masse der Varietäten, so weit sie überhaupt schon ergründet sind, so werden wir so oft den Eindruck behalten, dass gewisse Formen mehr oder weniger selten in dem ganzen Verbreitungsgebiet der Art vorkommen, dass dadurch eine Tendenz oder Disposition dieser Art zu solchen Gebilden unzweifelhaft wird. Diesen Tendenzen nachzuforschen, halte ich vom wissenschaftlichen Standpunkte aus für sehr wichtig, denn dadurch gewinnen wir Einblicke in die Gesetze, nach denen der ewige Wechsel alles Lebenden vor sich geht und hier gerade zeigt die darwinische Erklärung noch eine Lücke.

Wie Darwin namentlich in den späteren Ausgaben seiner Werke es selbst mit Bestimmtheit ausspricht, lassen sich nicht alle Erscheinungen durch Summirung nützlicher Abweichungen erklären [1]); auch sind die kleinen Abweichungen, welche sich summiren lassen, nicht ganz willkürliche oder zufällige, sondern Tendenzen in gewissen Richtungen zu variiren sind den Arten erb- und eigenthümlich. Oder wie sollten wir uns sonst z. B. das Auftreten der Schlangenfichte an so verschiedenen Orten und unter so verschiedenen Verhältnissen, wie es thatsächlich der Fall ist, erklären?

Professor Caspari sieht in dem Auftreten der Schlangenfichte einen Beweis gegen die darwinische Theorie. Ich glaube daher meine Ansicht über diesen Punkt noch genauer ausführen zu müssen.

Wir sehen bei den hier besprochenen Thatsachen, dass der alte Grundsatz „Natura non facit saltum" nicht stichhaltig ist. Die Natur macht wohl Sprünge, grosse Sprünge allerdings seltener als kleine. Solch ein Sprung kann

---

1) Darwin (Descent of Man 2nd edition p. 61): „I did not formerly consider sufficiently the existence of structures, which, so far as wi can at present judge, are neither beneficial nor injurious; (Origin of Species 6th edition p. 171): „. . . we hawe to allow . . . . . for so-called spontaneous variations, in which the nature of the conditions apparently plays a qnite subordinate part . . . . . . In the earlier editions of this work I underrated, as it now seems probable, the frequency and importance of modifications due to spontaneous variability" Siehe auch Herbert Spencer: The Factors of Organic Evolution. 1887,

Darwin (Abstammung des Menschen, 2. Ausgabe p. 61): „Ich habe früher die Existenz von Gebilden nicht genügend beachtet, welche, so weit wir es gegenwärtig zu beurtheilen vermögen, weder nützlich noch schädlich sind;" (Entstehung der Arten, 6. Ausgabe p. 171): „. . . Wir müssen Zugeständnisse machen . . . . der sogenannten spontanen Variation, bei welcher das Wesen der äusseren Umstände offenbar eine ganz untergeordnete Rolle spielt . . . . In den früheren Ausgaben dieses Werkes unterschätzte ich, wie mir jetzt wahrscheinlich scheint, die Häufigkeit und Wesentlichkeit der durch spontane Variation veranlassten Modificationen".

auch mitunter in den Sumpf führen, d. h. nicht nützlich, sondern nachtheilig sein, sogar so weit nachtheilig, dass das Individuum in seiner Fortpflanzungsfähigkeit geschwächt wird, was bei der Schlangenfichte und Kugelfichte durch Mangel an Samenbildung eintrifft. In unserem Fall also sehe ich das Auftreten der Schlangenfichte als ein vorwiegend spontanes an, d. h. aus inneren Ursachen; es besteht hier eine der Art innewohnende Disposition zu dieser Form. Führt aber ein solcher kleiner oder grosser Sprung zu einer nützlichen Umbildung, dann allerdings ist es ausser Zweifel, dass die natürliche Zuchtwahl beim „Kampf um's Dasein" zur Geltung gelangen kann. Ich habe diese meine Ansicht und ihre Verschiedenheit von der Baer'schen „Zielstrebigkeit"[1]) in einem Aufsatz, den ich „Prädisposition beim Variiren der Arten" nannte, genauer ausgeführt[2]), hier kann ich ausführlich darauf nicht eingehen, nur an einem Beispiel will ich etwas näher ausführen, was ich meine, um nicht missverstanden zu werden.

Wir wissen, dass sehr viele Arten von Pflanzen nahe Verwandte unter den Schlingpflanzen haben, das heisst, dass aus sehr vielen Arten Schlingpflanzen sich haben entwickeln können, wenn die sie umgebenden Existenzbedingungen, im Kampf um's Dasein, solches geboten. Untersuchen wir nun das Wesen der Pflanzen, welche keine Schlingpflanzen sind, näher, so finden wir auch in ihnen Anklänge an die Natur und das Wesen der Schlingpflanze. Die gerade und aufrechte Fichte dürfte auf den ersten Blick nicht viel davon sehen lassen; die langen unverzweigten Aeste der Schlangenfichte haben aber schon eine gewisse Analogie mit den langen Trieben der Schlingpflanze. In höherem Alter, wenn die Kraft des aufwärts strebenden Wuchses der Fichte nachlässt, sehen wir die Fasern der äusseren Schichten des Baumes sich ganz wie eine Schlingpflanze um die inneren gerade oder doch gerader gewachsenen winden (was die Tischler gedreht gewachsen nennen). Auch in der Jugend kann solches schon eintreten, namentlich wenn der Baum in zu dichtem Schatten steht und der Zuwachs nach oben hin geschwächt ist. Ich habe seit vielen Jahren auf diese Eigenthümlichkeit namentlich bei der Fichte geachtet. Wenn man hunderte von trockenen Bäumen ohne Rinde und mit geplatztem Stamm beisammen stehen sieht[3]), erkennt man, dass die Fichte die Eigenthümlichkeit

---

1) Studien aus dem Gebiet der Naturwissenschaft. Dr. K. E. von Baer. Ueber den Zweck in den Vorgängen der Natur. Ueber Zweckmässigkeit und Zielstrebigkeit überhaupt. Ueber Zielstrebigkeit in den organischen Körpern insbesondere.

2) Gaea 1885. Heft IV und V. Prädisposition beim Variiren der Arten.

3) Nach dem Nonnenfrass, nach Waldbränden, nach Käferfrass. Ich habe auf dem Kaukasus einen Wald von Weisstannen gesehen, in welchem grosse Strecken abgestorben waren, weil Schindelarbeiter alle Bäume anhackten und nur die gerade gewachsenen nahmen; dabei begnügten sie sich nicht nur die äusseren Schichten des Holzes zu untersuchen, sondern hackten dicke Bäume bis zu den inneren Schichten an. Hier sah ich es namentlich deutlich, dass die inneren Schichten oft ganz gerade gewachsen waren,

besitzt, sich gewöhnlich gegen den Gang der Sonne zu winden, ausnahmsweise aber dreht sie sich auch mit der Sonne.

Die Schlingpflanzen haben ebenso die Eigenthümlichkeit, die eine Art sich consequent nach rechts, die andere nach links herum zu winden und nur selten von dieser Regel abzuweichen, einige wenige Arten winden sich beliebig nach beiden Seiten. Den aufkeimenden Hafer kann man von der aufkeimenden Gerste daran unterscheiden, dass dann, wenn der spiessartig aufstrebende Keimtrieb sich im Lichte zum Blatte entwickelt und losrollt, das eine sich dabei nach rechts, das andere nach links dreht.

Sehr viele Laubhölzer, zum Beispiel die Espe, welche meist einen recht aufrechten und geraden Wuchs hat, wenn sie so dicht an einem anderen Stamme stehen, dass sie ihn berühren, fangen an, sich um diesen Stamm zu winden. Sogar die Burkanen (Moorrüben) *Daucus carotta*, welche unter der Erde jedenfalls mit dem Licht und dem Gange der Sonne nichts zu thun haben und gewöhnlich eine sehr gerade Pfahlwurzel besitzen, winden sich, wenn sie zu dicht gesäet sind, wie Korkenzieher um den sie bedrängenden Nachbaren.

Ist nun diese so allgemeine Tendenz sich zu winden nicht dasselbe, was wir bei der Schlingpflanze in höherer Potenz als Klettervermögen bewundern, und brauchen wir, ausser der natürlichen Zuchtwahl, nicht diese Dispositionen der Arten zu solchen Gebilden, um die Aehnlichkeit so vieler Erscheinungen zu erklären, ohne an Zielstrebigkeit glauben zu müssen.

Darf ich noch einen Vergleich aus einem anderen Gebiet der Naturforschung anführen, so kann ich die so vielfach constatirte Entzahnung und Differenzirung des Gebisses nennen, das heisst, die Zahl der Zähne nimmt bei sehr vielen Thierarten allmählich ab und die Form der Zähne bekommt eine grössere Verschiedenheit, als die älteren Arten sie besassen. Hier wird man doch nicht sagen, dass es geschieht, weil es für alle nützlicher sei, weniger Zähne zu haben. Sollte man wirklich nach dem Vortheil suchen wollen, welchen es z. B. für einen Fuchs im Kampf um's Dasein haben kann, einen Backenzahn weniger zu besitzen, als die anderen Füchse haben und doch bricht sich die Entzahnung ihre Bahn und fügen sich die neuen Arten ihrem Gesetz. Alle alten Formen der Füchse hatten 4 Molaren, die grösste Zahl der gegenwärtig lebenden Fuchsarten hat 3 Molaren, unser hiesiger Fuchs auch, doch findet man einzelne, welche nur 2 Molaren haben. Der Eisfuchs *Canis lagopus* hat in der Mehrzahl der Fälle nur 2 Molaren und der ostsibirische Fuchs *Cyon alpinus* hat immer nur 2 Molaren.

---

so dass sie zur Schindelfabrikation verwandt werden konnten, während die äusseren Schichten gedreht gewachsen waren und nicht zu Schindeln gespalten werden konnten.

Zuweilen sieht man die Windung der äusseren Holzschichten auch sehr deutlich bei vom Blitz geschundenen Bäumen; weil das Splintholz wasserreicher ist, die Electricität daher besser leitet, greift der Blitz namentlich diese Schichten an und spaltet eine um den Baum gewundene Rinne heraus, während das trockenere Kernholz nur wenig beschädigt wird.

Ich sehe also die Schlangenfichte als eine Abart der gewöhnlichen Fichte an, welche aus inneren Gründen entsteht, weil es eine erbliche Eigenthümlichkeit der Fichte ist, gelegentlich auch diese Form anzunehmen. Ob diese erbliche Eigenihümlichkeit durch einen Atavismus begründet ist, d. h. ob früher solche Formen entwickelt bestanden haben, oder ob sie nur im Keim, als Disposition, der gewöhnlichen Fichte inne wohnten, das wissen wir bei dem gegenwärtigen Stande unserer Kenntnisse der Vorzeit nicht. Ebenso wissen wir nicht, ob die Disposition zu dieser oder zu welcher der anderen Formen so stark werden wird, dass sich eine neue Art daraus bilden kann, selbst wenn kein Nutzen im Kampf um's Dasein ihrer Ausbildung zu Hülfe kommen sollte. Treten aber Verhältnisse ein, welche irgend einer der vielen Formen, in welchen die Fichte auftritt, einen Vortheil beim Kampf um's Dasein gewähren, dann wird die natürliche Zuchtwahl unter den vorhandenen Formen dieser den Vorzug geben und das darwinische Prinzip zur Geltung gelangen.

Wie viele Seiten des grossen Buches der Natur sind nicht noch für uns mit sieben Siegeln verschlossen, die zu entsiegeln es vieler geübter Arbeiter bedarf.

Möge unsere Jugend doch bald allgemeiner und zeitiger daran gewöhnt werden die Augen offen zu halten, um zu sehen, was sie in der Natur umgiebt, und aus dem Gesehenen selbst Schlüsse zu ziehen, anstatt in der Schulzeit so ausschliesslich die sogenannte gymnastische Uebung des Geistes in Gestalt der todten Sprachen zu betreiben und über all diesen Exercitien nicht einmal bis zum Lesen der alten Classiker zu gelangen.

And Nature the old Nurse took
The child upan her knee
Saying „Here is a storybook
Thy Father has written for thee".

„Come wander with me", she said,
„Into regions yet untrod,
And read what is still unread
In the Manuscripts of God".

And he wandered away and away
With Nature the dear old Nurse,
Who sang to him night and day
The rhymes of the Univers.

Longfellow.

Natur, die liebende Mutter,
Nahm's Kind auf ihren Schoss
Und zeigt ihm Bilder und Bücher:
„So schreibt dein Vater bloss".

„Komm, willst du mit mir wandern,
Durch Berg' und Thäler gehn
Und selbst diese Manuscripte
Deines grossen Gottes sehn".

Und sie wanderten fern und ferner,
Das Kind an der Mutter Seit',
Und sahen und sangen die Wunder
Der Zeit in der Ewigkeit.

Schloss Sagnitz, den 29. Mai 1887.
Livland, Russland.

Schriften
herausgegeben von der Naturforscher-Gesellschaft
bei der Universität Dorpat.

III.

Zur Anatomie
resp. physiologischen und vergleichenden Anatomie
der
Torfmoose

von

Dr. **Edmund Russow**
ord. Professor der Botanik an der Universität Dorpat.

(Mit 5 lithographirten Tafeln.)

Dorpat.
Druck von C. Mattiesen.
1887.

Schriften
herausgegeben von der Naturforscher-Gesellschaft
bei der Universität Dorpat.

III.

Zur Anatomie

resp. physiologischen und vergleichenden Anatomie

der

Torfmoose

von

Dr. **Edmund Russow**
ord. Professor der Botanik an der Universität Dorpat.

(Mit 5 lithographirten Tafeln.)

Dorpat.

Druck von C. Mattiesen.

1887.

Дозволено цензурою. — Дерптъ, 23. Декабря 1887 г.

Zur

Feier des Tages

an welchem vor

fünfzig Jahren

Dr. Alexander Graf Keyserling

seine erste wissenschaftliche Arbeit veröffentlichte

widmet

die Dorpater Naturforscher-Gesellschaft

diese Abhandlung

dem hochverdienten Jubilar

ihrem Ehrenmitgliede.

Den 27. December 1887.

Tritt uns im äusseren wie inneren Bau der Gewächse mehr oder weniger ausgesprochen eine Anpassung an die äusseren Lebensbedingungen entgegen, so möchte es doch nur wenige Gewächsgruppen geben, bei denen in so augenfälliger Weise wie bei den Torfmoosen die Anpassung an äussere Verhältnisse sich in der Architektonik dieser Gewächse, als ganz besonders die Planmässigkeit der inneren Construction bis auf die letzten Bausteine, die einzelnen Zellen und deren Theile, in Bezug auf die physiologische Leistung, sich ausspricht.

Es weichen die Torfmoose von allen Bryophyten sowohl im architektonischen, wie besonders im anatomischen Bau weit ab und bilden eine geschlossene, schon äusserlich leicht kenntliche, innerlich in noch höherem Grade differente, überaus scharf umschriebene, natürliche Gruppe, wie wir deren nur wenige im Pflanzenreiche antreffen. Daher ist es verständlich, dass diese Pflanzenfamilie sowohl in morphologischer als anatomischer Beziehung vielfach untersucht worden und dass sich mit dem Studium des inneren Baus nicht nur Sphagnologen, sondern auch zahlreiche und hervorragende Phytotomen beschäftigt, welchen letzteren wir in erster Linie die Kenntniss vom inneren Bau dieser merkwürdigen Gewächse wie deren Entwickelungsgeschichte zu verdanken haben. Ich brauche nur hier an Namen wie Moldenhawer, Meyen, H. v. Mohl, Nägeli, Hofmeister zu erinnern. W. Ph. Schimper[1]) hat in seiner 1858 erschienenen, berühmten Monographie der Sphagna alles bis dahin über Morphologie und Anatomie der Sphagna Bekannte zusammengefasst, und dasselbe mit den Ergebnissen seiner eigenen Untersuchungen verwebend, in einem anschaulichen Bilde dargestellt; daher sei hier bezüglich der ganzen älteren Sphagnum-Litteratur, soweit sie die Anatomie betrifft, auf das genannte Werk Schimpers verwiesen.

Im Jahre 1865 veröffentlichte ich eine Abhandlung[2]) in welcher einige, Schimper und seinen Vorgängern entgangene, anatomische Einzelheiten

---

1) Versuch einer Entwickelungsgeschichte der Torfmoose und einer Monographie der in Europa vorkommenden Arten dieser Gattung. Stuttgart, 1858, m. 27 Tafeln. Folio.

2) Beiträge zur Kenntniss der Torfmoose. m. 5 Tafeln, im Archiv f. d. Naturkunde Liv-, Est- und Kurlands. Dorpat 1865. gr. 8°.

mitgetheilt und abgebildet wurden, von denen hier der Nachweis weit verbreiteter Resorbtionserscheinungen an der Membran der hyalinen Zellen in den Ast- und Stengelblättern zahlreicher Arten, wie die Entdeckung der merkwürdigen „Kammfasern“ in den Hyalinzellen der Astblätter von *Sph. imbricatum Hornsch.* (*Sph. Austini Sulliv.*) hervorgehoben sein mag. Im Jahre 1868 fand Lindberg bei einigen Formen des *Sph. cymbifolium Ehrh.* an den Wänden der Hyalinzellen, soweit diese mit den Chlorophyllzellen zusammenstossen, kleine, dicht gestellte Papillen oder spitze Wärzchen, welche den betreffenden Wandstücken, bei 500—600facher Vergrösserung, das Ansehen von mit Mehl oder Gries, bald mehr, bald weniger dicht bestreuten Flächen ertheilen. Der Entdecker fasste die betreffenden Formen unter dem Namen *Sph. papillosum*, als Art, zusammen. Dieselbe Erscheinung wurde von demselben Forscher einige Jahre später auch bei *Sph. squarrosum* und *teres* entdeckt und es mag gleich hier hinzugefügt werden, dass ich kürzlich bei *Sph. Wulfianum*, und hiervon unabhängig auch Warnstorf bei derselben Art, die erwähnten Papillen gefunden.

Phytotomen haben sich meines Wissens nach Hugo von Mohl und Schacht nicht speciell mit der Untersuchung von Torfmooseu beschäftigt und da im Laufe dieser Zeit die Mikroscopie in Folge der sehr verbesserten optischen Hilfsmittel wesentliche Fortschritte gemacht, ist es erklärlich, das manche allgemein verbreitete Erscheinungen, welche nur mit Hilfe der besten uns heute zu Gebote stehenden Mikroscope mit Sicherheit erkannt werden können, bisher entweder gänzlich übersehen worden oder keine richtige Deutung gefunden haben.

Seit bald zwei Jahren habe ich das von mir vor mehr als 20 Jahren zuletzt betriebene Studium der Torfmoose, in systematischer Beziehung, wieder aufgenommen und bin, da die sichere Unterscheidung der Arten oft nur durch die eingehendste mikroscopische Untersuchung, bei Anwendung sehr starker Vergrösserungen, ermöglicht wird, in Folge Anwendung besserer Mikroscope, als sie mir damals zu Gebote standen und wohl noch mehr in Folge gereifterer Erfahrung auf dem Gebiet der Pphytotomie überhaupt, auf manche, früher von mir gänzlich übersehene Erscheinungeu gestossen, oder habe erst jetzt eine richtige Deutung gefunden für Erscheinungen, welche mir zwar schon damals auffielen, die ich mir aber zu erklären nicht vermochte oder die ich unrichtig auffasste.

Auf folgenden Blättern beabsichtige ich diese, unsere Kenntniss von der Anatomie der Torfmoose erweiternden neuen Einzelheiten, im Zusammenhange mit dem bereits Bekannten, aus physiologischem Gesichtspunkt zu behandeln, wodurch, wie ich hoffe, manches neue Licht auf längst Bekanntes fallen wird und wir wenig oder garnicht beachtete Erscheinungen als nothwendig oder doch wenigstens vortheilhaft für das Bestehen des Ganzen erkennen werden. Schliesslich will ich es versuchen die gewonnenen Resultate, mehr andeutend als ausführend, im Interesse der Systematik zu verwerthen, da ich bald an einem an-

deren Orte eingehendere Beiträge zur Systematik der Torfmoose zu liefern gedenke.

Den architectonischen wie anatomischen Bau der Torfmoose in den Hauptzügen beim Leser als bekannt voraussetzend, halte ich es im Interesse des richtigen Verständnisses der mitzutheilenden Thatsachen für zweckdienlich, zunächst an einige bekannte biologische Verhältnisse der Torfmoose zu erinnern.

Offenbar hat die Natur die Torfmoose geschaffen, um in nördlichen Breiten oder im Hochgebirge südlicher Zonen, wo das Maass von Feuchtigkeit gross, das der Wärme aber gering ist, sanfte Bodeneinsenkungen von kleiner bis sehr grosser Ausdehnung, welche sonst nur Wasserspiegel darbieten würden, mit höherem Pflanzenleben, und zwar Luftpflanzen, zu besiedeln, dadurch reichlichere organische Substanz zu produciren und ein höheres Thierleben zu ermöglichen. Zu dem Zweck mussten wasserliebende Gewächse construirt werden mit der Befähigung, bei selbständiger Assimilation, Wasser leicht aufzunehmen, sich gleichsam wie ein Schwamm voll Wasser zu saugen und dieses nöthigenfalls zurückzuhalten oder nur schwer verdunsten zu lassen, somit hierdurch einen relativ festen Boden, ein schwammiges Polster zu schaffen, auf welchem zahlreiche Luftpflanzen wie: Cyperaceen, Juncaceen, Ericaceen und selbst grössere Holzgewächse und mithin auch zahlreiche Luftthiere gedeihen können. Dieser Zweck ist sehr vollkommen in den unbegrenzt an der Spitze fortwachsenden, selbständig assimilirenden, aus einem bewunderungswürdigen System feinster Capillaren und kohlensäure assimilirender Zellen zusammengesetzten Organismen erreicht worden, welche wir Torfmoose nennen.

Den beiden angedeuteten Hauptaufgaben entsprechend, nämlich Wasser aufzusaugen wie ein Schwamm und organische Substanz zu produciren, finden wir die Hauptmasse der vegetativen Organe der Torfmoose, die Blätter, construirt aus z w e i e r l e i Elementen, von denen die einen, die Chlorophyll führenden Zellen, das assimilatorische oder ernährungsphysiologische System darstellen, während die anderen, die hyalinen Zellen, das mechanisch wirksame System, gleichsam das Pumpwerk oder Wassersaugungssystem bilden. Diese beiden Zellensysteme sind mit einander zu einem Maschenwerk vereinigt, in welchem bekanntlich die Fäden von den relativ langen und schmalen, im Querschnitt dreieckigen oder trapezoidischen, quadratischen oder rectangulären oder linsenförmigen Chlorophyllzellen gebildet werden, während die rhombischen bis gestreckt sechsseitigen und schwach S-förmig gebogenen Maschen von den durchlöcherten Faser- oder Hyalinzellen eingenommen werden (Fig. 2, Taf. I). Entweder sind die Chlorophyllzellen, wenn ihr Querschnitt linsenförmig ist, vollständig von den Hyalinzellen umschlossen (Fig. 53, 56—63) oder es ist eine Wandfläche der Chlorophyllzellen frei, bei dreieckigem Querschnitt, wobei sie von der Innen- (Fig. 10, 11, 12) oder Aussenfläche des Blattes (Fig. 25—28 u. 30) sich zwischen die Faserzellen gleichsam einkeilen; oder zwei Wandflächen der Chlo-

rophyllzellen sind frei und in diesem Fall sind die Hyalinzellen vollkommen von einander getrennt; im letzteren Fall ist der Querschnitt der Chlorophyllzellen trapezoidisch (Fig. 15, 23, 40) oder rechteckig (Fig. 13, 14, 32, 46) oder tonnenförmig (Fig. 31, 33, 39, 50).

Den Ansprüchen an Festigkeit und Steifheit wird genügt von Seiten der Chlorophyllzellen durch deren relative Dickwandigkeit wie durch den Turgor, während die früh absterbenden, turgorfreien, äussert dünnwandigen, nur durch ihr Hautgerüst wirksamen und bedeutungsvollen Hyalinzellen, bei möglichst geringem Aufwande von Material, durch Aussteifung vermittelst ring- oder schraubenförmig verlaufender Leisten oder Fasern, die erforderliche Festigkeit erlangen.

Die Ansprüche an Festigkeit sind aber nicht in der ganzen Ausdehnung des Blattes dieselben, auch nicht bei den Blättern der abstehenden und herabhängenden Aeste gleich.

Die Astblätter sind bekanntlich dachziegelartig über einander gelegt, derart, dass etwa das oberste, mehr oder weniger zugespitzte Drittel des Blattes frei hervorragt und mehr oder weniger absteht, während die untere Hälfte gedeckt wird. Demnach steht zu erwarten, dass die obere Hälfte, zumal die frei abstehende Spitze der Blätter abstehender Aeste, fester gebaut sein muss als die untere Hälfte, was in der That der Fall ist, während eine erhebliche Verschiedenheit in dem Bau der oberen und unteren Blatthälfte bei den Blättern der herabhängenden Aeste nicht besteht, welche allseitig geschützt sind; desgleichen bei den Blättern der lang herabhängenden Enden abstehender Aeste, die gleichfalls geschützt sind gegen das Aufschlagen von Regentropfen oder den Anprall fallenden und bewegten Laubes benachbarter Gewächse, oder gegen die Verletzungen von Seiten kriechender Thiere.

In welchem Maasse das umgebende Medium den anatomischen Bau beeinflusst, tritt uns deutlich beim Vergleich der untergetauchten Formen mit den zwar Wasser liebenden, aber zeitweilig von Luft umgebenen Formen der Cuspidatum-Gruppe entgegen. Bei ersteren schwinden häufig die Fasern in den Hyalinzellen, oder sie stehen in grösseren Abständen von einander und sind zarter ausgebildet, und was noch auffallender, es bildet sich oft weitaus der grösste Theil der Zellen des Blattgewebes zu chlorophyllführenden aus, so dass die characteristische Zusammensetzung des Sphagnumblattes, aus ernährungsphysiologischen und mechanisch wirksamen Zellen, in der grösseren Ausdehnung des Blattes vermisst wird [1]). Bei den nicht untergetauchten Cuspidatis zeigen die Blätter den gewöhnlichen Bau mit sehr reichlicher und starker Faserbildung in den Hyalinzellen, weichen aber von den übrigen, weniger an reichliches Wasser gebundenen Arten durch die Lochbildung in den Wänden der Hyalinzellen ab, worüber

1) Vrgl. E. Russow, Beiträge z. Kennt. d. Torfmoose, p. 60 wo eine derartige auffallende Wasserform beschrieben ist.

wir später näher sprechen werden. Dass bei den vorherrschend im Wasser lebenden Formen die Aussteifung der Hyalinzellen durch Fasern nicht erforderlich ist, sehen wir an dem amerikanischen *Sph. macrophyllum Bernh.*, das in Bezug auf Porenbildung mit den Cuspidatis insofern übereinstimmt, als auch hier die Löcher von keinem Ringwall umgeben sind.

Sehen wir uns nun die Einrichtungen näher an, welche zum Zweck der grösseren Festigung der Blattspitze getroffen sind.

Ueberblicken wir die Fläche eines ausgebreiteten Blattes, das wir der unteren Hälfte eines abstehenden Astes entnommen haben (nur von solchen ist zunächst die Rede), so wird uns zunächst die bedeutende Grössenabnahme der Zellen von der Basis zur Spitze des Blattes in die Augen springen, ebenso die Zunahme der Einrollung der Blattränder zur Spitze hin. Bei stärkerer Vergrösserung werden wir, zumal am Querschnitt, wahrnehmen, dass die Wände der sehr viel kleineren Zellen, sowohl der Chlorophyll- als Hyalinzellen, im oberen Drittel des Blattes sehr viel stärker verdickt sind als in der unteren Hälfte, und dass die Fasern der kleineren Hyalinzellen, namentlich in der Acutifolium-Gruppe, stärker (in der Aufsicht breiter) sind als die der grösseren Hyalinzellen in der unteren Blatthälfte. Während die Membran der letztgenannten Zellen kaum messbare Dicke besitzt, erreicht sie bei den Zellen der oberen Blatthälfte etwa ein Mikron und darüber.

Dass die Festigkeit, d. h. die Widerstandsfähigkeit einer Zelle gegen Druck und Biegung, bei gleicher Wanddicke, mit Abnahme der Grösse entsprechend zunimmt, ist ein in der Gewebelehre längst beachtetes Moment. Da nun hier mit der Grössenabnahme der Zellen eine Zunahme ihrer Wanddicke verbunden ist, so wird dadurch die Festigkeit natürlich ganz ausserordentlich erhöht. Die Biegungsfestigkeit des ganzen Blattes wird gesteigert durch die Einrollung der Ränder, zumal an der Blattspitze, wo nicht selten die Ränder über einander greifen, so dass das Blatt in einen Trichter ausläuft. Der Rand des Blattes ist durch einen bald breiteren, bald schmäleren, aus derbwandigen, englichtigen und gestreckten Zellen gebildeten Saum (margo) gegen Einreissen geschützt.

Eine nähere Auseinandersetzung erheischt

die Aussteifung der Hyalinzellen,

da bisher ein wichtiges Moment in Bezug auf die Faserbildung übersehen, oder doch wenigstens nicht erkannt worden ist.

Bis vor kurzem habe ich mir, wie es wohl bisher allgemein von den Phytotomen und Sphagnologen geschehen, die Ring- wie Spiralfasern an den Wänden der Hyalinzellen vorgestellt als nur wenig in das Lumen der Zelle hineinragende Leisten, von etwa halbkreisförmigem oder quadratischem Querschnitt, mit etwas abgerundeten Kanten. Trifft das für die Fasern in der unteren Blatt-

hälfte oder in den Rindenzellen der Cymbifolium-Gruppe meist zu, so ist doch in der oberen Blatthälfte, zumal gegen die Spitze des Blattes, die Form der Fasern eine ganz andere. Es sind bald mehr, bald weniger breite Platten oder Bänder, die mit ihrer scharfen Kante der Zellmembran rechtwinklig ansitzen.

Eine derartige Faserbildung ist mir im übrigen Pflanzenreich nur bei den Mammillarien begegnet, wo bekanntlich die dünnwandigen Gefässe des Holzes von ringförmigen oder schraubig gewundenen Platten ausgesteift werden [1]).

Ein Blick auf die Abbildungen der Blattquerschnitte auf den beigefügten Tafeln 2—5 lässt sogleich diese, in das Lumen der Hyalinzellen mehr oder weniger tief hineinragenden Ring- und Spiralplatten erkennen (durch leichte Tönung sind die Platten kenntlicher gemacht worden). Es ist eine so auffallende Erscheinung, dass unwillkürlich der Leser die Frage aufwerfen wird, wie ist es möglich, dass eine so augenfällige Bildung sich bisher der Wahrnehmung entzogen? Es sind nun allerdings diese Platten gesehen, ja selbst abgebildet, aber nicht erkannt worden. Unter den zahlreichen Abbildungen von Blattquerschnitten, die Schimper in seiner genannten Monographie giebt, findet sich eine, aber auch nur eine Abbildung, auf Taf. XXVII (in der Mitte unten, mit s,4 bezeichnet) von *Sph. subsecundum, var. contortum*, an der wir mitten im Lumen der zwei Hyalinzellen einen quer-ovalen, ringförmigen Contour wahrnehmen, doch ist diese Erscheinung weder in der Tafelerklärung noch im Texte auseinandergesetzt. Unter den Abbildungen der Blattquerschnitte von Schliephacke, welche Warnstorf seinen „sphagnologischen Rückblicken“ [2]) beigegeben, sind an der Abbildung von *Sph. cyclophyllum*, zu beiden Seiten der Chlorophyllzellen, schattirte, meniskusförmige Partien gezeichnet, welche auch hier, weder im Texte, noch in der Figurenerklärung eine Besprechung erfahren. Diese Menisken sind nichts Anderes als der Ausdruck der hier wie bei *Sph. rigidum* und *aculeatum W.* vorkommenden, eigenthümlichen Ringfasern, welche meist nur an dem Theile der Wand, welche mit der der benachbarten Hyalinzelle verwachsen ist, plattenförmig verbreitert sind.

Mir sind bereits vor 24 Jahren bei der Untersuchung der Torfmoosblätter am Querschnitt die beregten Ringplatten, oder vielmehr die rundlich-ovalen Contouren im Lumen der Hyalinzellen, aufgefallen, doch glaubte ich diese Contouren, da sie nicht in allen Zellen und meist nur an Schnitten, welche die obere Blatthälfte getroffen hatten, sichtbar waren, als Schnittränder der am stark verjüngten Ende getroffenen Hyalinzellen auffassen zu müssen. Die damals von mir untersuchten Schnitte waren ausserordentlich dünn und daher erklärt sich die Abwesenheit der Ringplatten in zahlreichen Zellen. Jetzt, wo ich dickere Quer-

1) Cfr. Schleiden, Grundzüge der Botanik 3. und 4. Auflage 1849 u. 1861. pag. 187. Fig. 52, B.

2) Flora, 1884. Taf. V, Fig. 11.

schnitte, zumal von *Sph. cuspidatum*, untersuchte und in jeder Hyalinzelle die Ringplatten wahrnahm, musste ich natürlich an der Richtigkeit meiner alten Auffassung zweifelhaft werden. Die nähere Untersuchung des fraglichen Gegenstandes ergab Folgendes.

Die Ring- und Spiralfasern in den Blättern der abstehenden Aeste sämmtlicher Arten aus der Sectio Eusphagnum Lindbg und Hemitheca Lindbg, sind in der oberen Hälfte der Blätter mehr oder weniger tief bis sehr tief in's Lumen der Hyalinzellen hineinragende Ring- oder Schraubenplatten, deren Breite (d. h. der senkrecht zur Zellmembran orientirte Durchmesser) von der Spitze gegen die Basis des Blattes, absolut nicht sehr beträchtlich, relativ (im Verhältniss zum Querschnitt der Zelle) aber sehr auffallend abnimmt, (vergl. Fig. 17 und 20, 12 u. 14, 34 u. 33) um in der unteren, bedeckten Hälfte des Blattes meist als Fasern von etwa quadratischem Querschnitt, zu verlaufen; bei den cuspidatis und subsecundis ist auch in der unteren Blatthälfte meist die Plattenform noch deutlich ausgeprägt. Besonders breit sind die Ringplatten bei *Sph. Pylaiei*, zumal im oberen Drittel des Blattes, wo man die Hyalinzellen als, durch zahlreiche, in der Mitte eng perforirte Querscheidewände, septirt bezeichnen könnte. Fig. 34 u. 35. Wie mir scheint, hat bereits Limpricht[1]) hier den Sachverhalt richtig erkannt wenn er sagt: „Hyaline Zellen mit zahlreichen Ringfasern, die nach innen so stark vorspringen, dass ihr rundes Lumen im ausgebreiteten Blatte täuschend Poren längs der Zellmitte ähnlich sieht.“ Fast dasselbe gilt auch von den Hyalinzellen in der Blattspitze der acutifolia, cuspidata und subsecunda (Fig. 17 u. 22). Bei den acutifoliis, zumal bei *Sph. Warnstorfii m.* und *fuscum Klingg.* und bei *Sph. Wulfianum Girg.* erscheint der in's Lumen hineinragende Rand der Ringplatten (namentlich in der Blattspitze) doppelt contourirt (Taf. I, Fig. 7 und Taf. II, Fig. 10 u. 18) was daher rührt, dass der Rand gefurcht und auseinandergespreizt ist, wie Fig. 5a zeigt, die den Durchschnitt einer Hyalinzelle aus der Blattspitze, parallel zur Oberfläche geführt, darstellt; hierdurch wird natürlich die Biegungsfestigkeit der Ringplatte nicht unwesentlich erhöht.

Die Ringplatten verlaufen nicht selten schief zur Längsaxe der Zelle; solche Platten werden natürlich, wenn der Querschnitt die Zelle rechtwinklig zur Längsaxe getroffen und dabei sehr dünn ist, zum Theil abgeschnitten werden und als grösseres oder kleineres Bruchstück eines Ringes erscheinen, vergl. Fig. 7, Taf. I und 11, 13 u. 23; dasselbe gilt natürlich von den Spiralplatten.

Die Plattenform der Ring- wie Spiralleisten findet selbstverständlich auch in der Aufsicht eines Blattes, bei mittlerer Einstellung auf die Hyalinzellen, ihren optischen Ausdruck, und somit hätte man schon längst, auch ohne Herstellung von Querschnitten, nur durch den Anblick der Hyalinzellen im optischen

1) Rabenhorst's Kryptogamenflora, Bd. IV, Lief. 3. pag. 135. 1886.

Längsschnitt, von der Natur der „Fasern“ eine richtige Vorstellung gewinnen müssen, wenn man nicht von der vorgefassten Ansicht ausgegangen wäre, dass die „Fasern“ dünne Leisten von etwa halbkreisförmigem oder quadratischem Querschnitt, und in der oberen Blatthälfte ebenso wie in der unteren gebildet seien. Es erscheint nämlich jede Faser in den Hyalinzellen der Blattspitze, bei mittlerer Einstellung der Zellen, (zumal bei den acutifoliis und cuspidatis) wie aus drei Stücken zusammengesetzt (Fig. 1 u. 2), oder mit anderen Worten, in der Mitte jeder Faser erblicken wir zwei, bald einander, bald den Chlorophyllzellen mehr genäherte Querstreifen, die häufig gekrümmt, und zwar nach aussen, d. h. zu den Chlorophyllzellen hin convex, verlaufen, Fig. 1. Das Mittelstück erscheint wie beschattet und an den (quer zur Längsaxe der Zelle verlaufenden) Rändern etwas verwaschen contourirt, während die beiden Seitenstücke hell erleuchtet und sehr scharf contourirt sich projiciren. Das dunklere Mittelstück ist natürlich nichts Anderes, als der optische Querschnitt des ovalen Loches in der Mitte der Ringplatte. Ist der Innenrand dieser Platte gefurcht, so erblickt man im beschatteten Mittelstück einen dunklen Doppelcontour, parallel den freien Rändern, Fig. 1b, nämlich die Furche in der Aufsicht. Bereits vor 24 Jahren ist mir diese Dreitheilung der Fasern in den Spitzen der Astblätter sehr aufgefallen und hat mir viel Kopfbrechen verursacht. Ich vermochte mir die Ursache der Erscheinung nicht befriedigend zu erklären, mich mit der Mangelhaftigkeit meines Mikroscops tröstend, und da ich weder bei Schimper, noch Mohl oder Meyen diese Erscheinung erwähnt fand, glaubte ich es mit einer optischen Täuschung zu thun zu haben, durch deren Besprechung ich meine Unerfahrenheit vielleicht zu sehr zu documentiren fürchtete.

Noch einer Erscheinung möchte ich hier erwähnen, welche ich mir bis zur Entdeckung der Ringplatten nicht zu erklären vermochte und geneigt war in das Gebiet der optischen Täuschungen zu verweisen. Blickt man auf die, durch Krümmungen und Faltungen der Blattfläche, mehr oder weniger geneigt zur Sehaxe aufgerichteten Hyalinzellen der Blätter von *Sph. cuspidatum* und *subsecundum*, so nimmt man in der Mitte der Hyalinzellen, ganz regelmässig zwischen je zwei Fasern, querovale Ringe wahr, welche zunächst den Eindruck von Löchern in der Wand der Hyalinzelle hervorrufen, bei veränderter Einstellung aber sich bald von den gewöhnlichen Löchern als durchaus verschieden erweisen. Es sind diese querovalen Ringe eben nichts Anderes, als die perspectivisch verkürzten, kreisförmigen oder längsovalen Innenränder der Ringplatten. Ich vermuthe, dass dieselbe Erscheinung von Limpricht bei *Sph. Pylaiei* gesehen worden, denn ich wüsste keine andere Deutung für die oben citirte Angabe.

Bei spiraligem Verlauf der Platten lässt sich an schief aufgerichteten Hyalinzellen, durch Veränderung der Einstellung, sehr schön die schraubig gewundene Platte in ihrer ganzen Ausdehnung erkennen.

Das tiefe Hineinragen der Ring- und Spiralfasern in das Lumen der Hyalinzellen, zumal in den Blattspitzen, wird sehr augenfällig, wenn das Lumen der Hyalinzellen nicht mit Wasser, sondern mit Luft erfüllt ist. Das fast schwarze Zelllumen erscheint dann tief gefurcht oder eingeschnürt, durch helle, einander gegenüberstehende Streifen, zwischen deren Enden schmale, aschgraue Brücken die Verbindung zwischen den schwarzen perlenartigen Partien herstellen. Zu einer derartigen Beobachtung eignet sich ganz besonders *Sph. Pylaiei*, weil wegen des fast gänzlichen Mangels an Löchern in der Membran der Hyalinzellen, in letztere Wasser nur sehr langsam und schwer eindringt, wenn die Blätter vorher ausgetrocknet waren. Für die Plattennatur der Ring- und Spiralfasern spricht endlich noch das Verhalten und Gebahren der in die Hyalinzellen eingeschlüpften Infusorien.

Dem Mitgetheilten zufolge ist an der platten- oder bandförmigen Gestalt der Ring- und Spiralfasern in der oberen Hälfte der Astblätter wohl nicht zu zweifeln und es ist der Zweck dieser Einrichtung leicht einzusehen. Die Aussteifung der Hyalinzellen wird durch breite Ring- oder Spiralplatten, die mit ihrer scharfen Kante der Membran aufsitzen, bei Sparung von Material, in viel höherem Grade erzielt als durch Fasern von quadratischem Querschnitt, bei gleicher Masse des aufgewandten Materials. Offenbar ist aber durch diese Einrichtung nicht nur eine sehr zweckmässige Aussteifung der einzelnen Zellen erreicht, sondern auch einer Verschiebung der Hyalinzellen gegen die Chlorophyllzellen und somit einer Einknickung der Blattfläche vorgebeugt. Beachten wir den Umstand, dass in den vier Ecken der Hyalinzellen, dort wo die freien Aussenwände derselben mit den Chlorophyllzellen einen fast rechten Winkel bilden, die Ringplatten den grössten Durchmesser besitzen (besonders auffallend in Fig. 22, 23, 34 u. 43) so ist der Schluss berechtigt, dass durch die getroffene Einrichtung eine Verbiegung des quadratischen oder paralleltrapezoidischen Querschnitts der Hyalinzelle in einen gestreckt rhombischen unmöglich gemacht wird. Die untere Blatthälfte ist geschützt durch die sie bedeckenden, nächst benachbarten Blätter und somit die Aussteifung hier nicht in dem Grade erforderlich als in der oberen, frei liegenden Hälfte, oder gar der Spitze, woher die relativ sehr viel schmäleren Ringplatten fast genau parallel den Umrissen der Hyalinzellen verlaufen.

Dass die plattenförmigen Ringleisten in erster Linie die angedeutete Verschiebung oder Verbiegung der Hyalinzellen zu verhindern berufen sind, scheint mir zur Evidenz hervorzugehen aus der Construction der Platten bei *Sph. rigidum*, *cyclophyllum* und *aculeatum* [1]). Hier kann von Ring- oder Spiralplatten in dem bisher kennengelernten Sinne, kaum die Rede sein, denn wie die Quer-

1) Material von beiden letztgenannten Arten und *Sph. cribrosum* verdanke ich der Güte Warnstorfs.

schnittsansichten der Blätter genannter Arten zeigen (vergl. Fig. 58, 60—63) sind bloss den Innenwänden der Hyalinzellen breite Platten angesetzt, die sich ein Stück auf die Aussenwände fortsetzen (in Fig. 3 u. 4 bis a) um dann in eine zarte Faser von etwa rundlich-quadratischem Querschnitt überzugehen. Der freie Rand der meniscusförmigen Platte ist beträchtlich verdickt, gleichsam gewulstet, was sowohl in der Aufsicht des Meniscus (Fig. 60 u. 61) als im optischen Querschnitt desselben (in der Aufsicht des Blattes, Fig. 3, 4 bei a) zu erkennen ist. Wir könnten demnach hier von Ringplatten sprechen, die aus zwei breiten, meniskenartigen Stücken und zwei schmalen, leistenartigen Stücken zusammengesetzt sind, von denen letztere an der Innenfläche der Aussenwände verlaufen.

Von nicht geringerem Interesse sind die weiteren Aussteifungsvorrichtungen bei den genannten Arten. Ein Blick auf die Blattfläche lässt zwischen den quer zur Längsaxe der Zellen verlaufenden Fasern, zahlreiche, der Längsaxe der Zelle parallel verlaufende Queranastomosen erkennen (Fig. 3, 4, 5 bei 9), die dort ansetzen, wo die meniskenförmigen Platten an den Aussenwänden der Hyalinzellen ihr Ende erreichen; von hier setzen sich häufig die Querfasern an der Oberfläche der meniskenförmigen Platte verlaufend, dieser gleichsam als Rippe aufgesetzt, bis gegen die Wand der Chlorophyllzellen fort (Fig. 61a). Somit erkennen wir hier eine sehr vollkommene, complicirte Steifungsvorrichtung, welche in erster Linie eine Formveränderung der Hyalinzellen verhüten soll. Es wäre noch hinzuzufügen, dass gegen die Spitze der Blätter abstehender Aeste, die Queranastomosen an Zahl sehr zunehmen [1]) und hier besonders häufig als Rippen auf den Meniskusplatten sich herabziehen. In den Blättern der herabhängenden Aeste finden wir fast nur gewöhnliche Ringplatten (Fig. 59), keine oder äusserst selten vereinzelte Queranastomosen und keine Meniscusrippen.

Einige Formen des *Sph. subsecundum*, zumal *contortum*, zeigen die Queranastomosen [2]) und meniscusartigen Ringplatten fast in derselben Ausbildung wie *Sph. rigidum* oder *cyclophyllum*.

In den Blättern der herabhängenden Aeste, wie herabhängenden Enden abstehender Aeste weicht der anatomische Bau nicht unbeträchtlich ab, insofern die Zellen zur Blattspitze hin nur wenig an Grösse abnehmen und ihre Wände nicht dicker werden; die Ring- und Schraubenplatten besitzen geringe Breite und sind von fast gleicher Bildung in der ganzen Ausdehnung des Blattes. Im Vergleich mit den Blättern abstehender Aeste tritt uns hier ein viel geringerer Aufwand von Material entgegen, weil die Ansprüche an Festigkeit viel geringere sind, und eine gleichmässige Ausbildung, weil in der ganzen Ausdehnung des Blattes die Ansprüche an Festigkeit dieselben sind.

1) Vergl. Schimper, a. a. O. Taf. XVIII, Fig. 13 u. 12.

2) Cfr. Schimper, a. a. O. Taf. XXIII, Fig. 1 u. 2.

Ueberblicken wir das bisher Mitgetheilte, so tritt uns in der Construction der Sphagnumblätter als oberstes Princip, das der Sparsamkeit entgegen: mit möglichst geringen Mitteln das vorgesteckte Ziel zu erreichen; nur wo es durchaus erforderlich, finden wir einen grösseren Aufwand von Material zum Zweck der Aussteifung, und diese nach den rationellsten Principien getroffen.

Es ist mir nur eine Ausnahme hiervon bisher bekannt geworden, nämlich bei *Sph. Mülleri Schmpr.* (*Sph. molle Sulliv.*). Hier stimmen die Blätter der abstehenden Aeste mit den zarten Blättern der herabhängenden Aeste fast genau überein in der Construction des Zellnetzes! Vielleicht ist hierin der Grund der äusserst geringen und beschränkten Verbreitung dieser merkwürdigen Art zu suchen. Die Hauptmasse der Assimilations- wie Wassersaugungsorgane, die Blätter der abstehenden Aeste, erscheinen zu wenig geschützt gegen Wetterungunst etc., mithin ist diese Art ihren Genossen gegenüber benachtheiligt im Kampf ums Dasein. Meine Kenntniss dieser Art beruht leider nur auf der Untersuchung weniger getrockneter Exemplare und den Litteraturangaben, woher ich das „Vielleicht" in meiner Annahme nochmals betonen möchte.

Ziehen wir noch

die Stengel- und Fruchtastblätter

in den Kreis unserer Betrachtung, so tritt uns auch hier im anatomischen Bau eine dem Zweck entsprechende Construction entgegen.

Im Vergleich mit den Astblättern sind die Fruchtast- und Stengelblätter von kurzer Functionsdauer und während dieser meist ganz verdeckt, letztere von den herabhängenden Aesten, erstere von den abstehenden Aesten des Schopfes, oder bei tieferer Insertion, von den Astbüscheln; daher bedarf es hier keiner besonderen Schutz- und Aussteifungsvorrichtungen; in Uebereinstimmung hiemit finden wir Faserbildung in den Hyalinzellen nur selten und meist von schwacher Ausbildung.

Die Fruchtastblätter, unter allen europäischen Arten nur bei *Sph. rigidum Schimp.* in Bezug auf anatomischen Bau den Astblättern gleich gebildet, zeichnen sich durch die Abwesenheit der Fasern in den Hyalinzellen aus wie durch die Bildung von Chlorophyll in den ihrer Lage nach den hyalinen zuzuzählenden Zellen, wie endlich dadurch, dass der Unterschied von Hyalin- und Chlorophyllzellen (zumal im unteren Theile der Blätter) auch der Lagerung nach, gänzlich aufgehoben wird und ein gleichartiges, chlorophyllführendes Gewebe das Blatt zusammensetzt. Dieses hängt offenbar mit der Function der Blätter als vorherrschend assimilatorischer Organe zusammen, deren Aufgabe in der Versorgung des Sporogoniums mit Nährstoffen besteht.

Da die Mehrzahl der die Fruchtastblätter zusammensetzenden Zellen während der ganzen Functionsperiode des Blattes lebt, so genügt der Turgor um

die erforderliche Steifung zu bewirken. Sobald der Turgor schwindet sehen wir die Zellen mehr oder weniger bis gänzlich collabiren, wodurch die zahlreichen Verkrümmungen und Falten der Blattfläche verursacht werden, welche wir so häufig gerade hier antreffen [1]).

In ungleich höherem Grade als die Fruchtastblätter, stimmen die Stengelblätter mit den Astblättern im anatomischen Bau überein, da sie stets aus beiderlei Zellen, Chlorophyll- wie Hyalinzellen zusammengesetzt sind, welche in ihrer gegenseitigen Lagerung dieselben Verhältnisse aufweisen wie die Astblätter derselben Pflanze, nur weniger scharf ausgeprägt, doch ist ihre assimilatorische wie wasseraufsaugende Function meist stark reducirt; denn meist sind in den Chlorophyllzellen die Chromatophoren bald geschwunden und die Membran der Hyalinzellen, wenn sie nicht durch Fasern ausgesteift wird, entweder vollständig oder zum grössten Theil resorbirt. Wo die Membran vorhanden, wird sie entweder gar nicht, oder nur durch wenige, zarte Fasern gefestigt und entbehrt meist der, für die Astblätter so characteristischen, umwallten Poren. Die Spitze ist so wenig gefestigt, dass sie häufig fransenartig aufgelöst ist oder wie ausgefressen erscheint.

Nach Alledem müssen wir schliessen, dass die Stengelblätter in den meisten Fällen fast functionslos geworden; daher die geringe Veranlassung zur Abänderung und in Folge dessen die relativ grosse Constanz in Bezug auf Grösse, Form und anatomischen Bau, so dass wir in den Stengelblättern meist das vorzüglichste Unterscheidungsmerkmal der Arten besitzen.

Zweifelsohne sind die Stengelblätter durch Umbildung hervorgegangen aus Blättern, welche in Bezug auf Form und inneren Bau von den Astblättern nicht oder nur wenig sich unterscheiden; das geht aus dem in anatomischer Beziehung der Hauptsache nach übereinstimmenden Bau hervor und noch mehr aus dem Umstande, dass junge Pflanzen, mögen sie aus Protonema entstehen oder aus Theilen älterer Pflanzen hervorsprossen, am Stengel stets den Astblättern gleiche oder äusserst ähnlich gebildete Blätter bilden. Ja, sind doch fast bei sämmtlichen europäischen Arten unter den zahlreichen Formen, die sich in übereinstimmender Weise innerhalb jedes Formenkreises, den wir Art nennen, wiederholen, solche beobachtet worden, die sich durch den Astblättern mehr oder weniger gleiche Stengelblätter auszeichnen: die s. g. isophyllen (besser hemiisophyllen) Formen. Wie mir scheint, sind diese Formen, abgesehen von einigen wenigen Fällen, durch den Standort, und zwar einen solchen, der sehr wechselnde Lebensbedingungen mit sich führt, erzeugt worden, denn die meisten isophyllen Formen habe ich an Localitäten gefunden, die zeitweilig tief unter Wasser gesetzt werden und dann vollständig austrocknen, so namentlich in der Acutifolium- und Subsecundum-Gruppe. In Folge des Austrocknens wird der

1) Cfr. meine Beiträge pag. 17—20 und Fig. 13 u. 14. Taf. II.

Entwickelungsgang soweit unterbrochen, dass bei wieder eintretendem Wachsthum die Sprosse sich wie Innovationssprosse verhalten und wie diese am Stengel, wenigstens in der ersten Zeit, den Astblättern gleiche oder sehr ähnliche Blätter erzeugen. In der Cuspidatum-Gruppe wird durch permanentes Verweilen unter dem Wasser die Bildung von Fasern in den Stengelblättern begünstigt und die Gestalt derselben sehr verlängert, wodurch sie astblattähnlich werden. Wie mir scheint findet das seinen Grund darin, dass durch die Streckung des Stengels dessen Blätter in eine so güstige Lage gebracht werden, dass sie dauernd zu assimiliren vermögen und mithin den Astblättern möglichst gleich sich auszubilden streben.

In seltenen Fällen findet man an sonst normal gewachsenen Pflanzen unter normalen Stengelblättern auch isophylle, was wohl als attavistische Erscheinung zu deuten ist. Haben also die Stengelblätter allmälig ihre jetzige Form und Beschaffenheit erlangt, so ist klar, dass die Arten mit faserlosen Stengelblättern, die auch stets in ihrer Form von den Astblättern weit abweichen, ihrer Entstehung nach die ältesten sein müssen. Es wären demnach in der Acutifolium-Gruppe ***Sph. fimbriatum Wils.*** und ***Girgensohnii m.*** die ältesten, daneben ***fuscum Klingg***, und ***subnitens W. & R.*** (= ***Sph. acutifolium Ehrh. var. luridum Hüben. ampl.***). Dann folgen ***Sph. quinquefarium*** (***Braith.***) ***W.***, ***Russowii W.***, ***Warnstorfii m.*** und ***tenellum Klingg.*** Die jüngste Art wäre ***Sph. acutifolium Ehrh. s. str.*** mit den faserreichsten, überhaupt im zelligen Bau wie in Bezug auf Gestalt, den Astblättern am nächsten stehenden Stengelblättern. Will man ***Sph. Mülleri Schimp.***, wie es bereits von Warnstorf geschehen, zu den Acutifoliis ziehen, so wäre auch diese Art als eine der jüngsten unter den Genossen aufzufassen. Da ***Sph. acutifolium*** mit beiden erstgenannten Arten wie mit ***Russowii*** und ***quinquefarium*** unter ganz gleichen Lebensbedingungen vorkommt, so können äussere Umstände die Verschiedenheit in dem Bau der Stengelblätter nicht veranlasst haben.

Aus diesen Gesichtspunkten wäre auf die Ab- oder Anwesenheit der Fasern, im letzteren Falle, auf deren Häufigkeit und kräftigere oder zartere Ausbildung, wenn es sich um die systematische Betrachtung handelt, Gewicht zu legen, um so mehr, als mit der Faserbildung die Form der Hyalinzellen oder vielmehr die ganze Configuration des Zellnetzes Hand in Hand geht. Die faserlosen Hyalinzellen der Stengelblätter in deren oberer Hälfte sind stets fast quadratisch oder breit rhombisch, während die faserreichen gestreckt rhombisch bis schmal S-förmig gestreckt sind und dann auch häufig umwallte Poren führen, kurz den Hyalinzellen der Astblätter äusserst ähnlich sehen. Sind die Hyalinzellen rhombisch und durchgängig faserlos, so ist ihre Membran grösstentheils oder vollständig resorbirt; nur sehr selten bilden sich bei theilweiser Resorbtion zahlreiche rundliche, zart umwallte Löcher aus, die dann gewöhnlich einander so nahe gerückt sind, dass die zwischen ihnen stehengebliebenen Membranstücke die Gestalt von

Fasern annehmen (Fig. 16, Taf.) wofür sie auch bisher in den Beschreibungen der Autoren erklärt worden.

Dass diese falschen Fasern oder Pseudofibrillen eine von den echten Fasern oder Leisten durchaus verschiedene Bildung darstellen, ist in den Fällen besonders klar ersichtlich, wo in der Mitte der Pseudofaser eine wirkliche, leistenartige Faser verläuft (Fig. 16, f), was indess bei *Sph. Girgensohnii* nur sehr selten vorkommt, häufiger sich bei *Sph. squarrosum* und *teres* findet, wo die angeblichen Fasern in den Stengelblättern gleichfalls Pseudo-Fasern sind. In den normalen Stengelblättern von *Sph. Girgensohnii* habe ich wirkliche Faserleisten nur auf den Pseudofasern beobachtet, während bei *Sph. squarrosum* und *teres* auch ganz am Grunde der Stengelblätter wirkliche Fasern, aber nur äusserst selten, ohne Pseudofasern zur Ausbildung gelangen.

Hier möchte ich noch einer an den Stengelblättern zu beobachtenden Erscheinung gedenken, welche bisher übersehen zu sein scheint, oder die wenigstens in der Litteratur bisher keiner Erwähnung findet. Es finden sich nämlich fast durchgängig an den Stengelblättern sämmtlicher Arten, besonders auffallend in der Cuspidatum-Gruppe, an den Wänden der Hyalinzellen, am Grunde oder in der unteren Hälfte der Blätter, Falten, die quer, oder mehr oder weniger geneigt zur Längsaxe der Zelle verlaufen (vergl. Fig. 9, Taf. I). Bei *Sph. fimbriatum* und *Girgensohnii*, wo die Membran der Hyalinzellen fast immer resorbirt ist, können selbstverständlich diese Falten nicht vorkommen.

Oft sind diese Falten sehr scharf ausgeprägt und in grosser Zahl, dicht bei einander gestellt. In den meisten Fällen ist die ganze Blattfläche in der Ausdehnung der gefältelten Hyalinzellen verkrümmt oder wellig verbogen, so dass ein Causalzusammenhang zwischen der Fältchenbildung der Hyalinzellen und der Faltenbildung des ganzen Blattes zu bestehen scheint. Sind die gefältelten Hyalinzellen septirt, so erscheint die Scheidewand zierlich wellig geschlängelt; an den Wänden der benachbarten Chlorophyllzellen dagegen ist keinerlei Fältelung oder Verbiegung wahrzunehmen. Diese Faltenbildung vermag ich mir nur durch die Annahme zu erklären, dass bei den Hyalinzellen die Elasticität der Membran verloren geht zu einer Zeit, wo bei den Chlorophyllzellen die elastische Membran noch durch den Turgor gespannt ist. Hört letzterer auf, so ziehen sich die Membranen der Chlorophyllzellen zusammen, sich nicht unbeträchtlich verkürzend und die unelastische, mit den Chlorophyllzellen fest verbundene, nunmehr zu grosse Membran der Hyalinzellen, muss Falten werfen wie der unelastische, verkorkte Streifen in der radialen Membran der Schutzscheidezellen der Gefässpflanzen, sobald nach Verlust des Turgors die Zellen sich zusammenziehen. Von einer Verkorkung oder überhaupt chemischen Veränderung der Membran lässt sich an den betreffenden Hyalinzellen der Stengelblätter nichts nachweisen. Die gefältelten Membranen werden ebenso wie die ungefältelten und wie die der Chlorophyllzellen durch Jod und Schwefelsäure blau gefärbt.

In den nicht mit Fasern ausgesteiften. oder nur mit wenigen sehr zarten Fasern versehenen Hyalinzellen der oberen Stengelblatthälfte, begegnen wir fast regelmässig Längsfalten und zwar meist je einer langen Falte, die in der Richtung des längsten Durchmessers der Zelle verläuft; oft machen diese Falten den Eindruck von scharfen Rissen, welche bei *Sph. squarrosum* und *teres* thatsächlich vorhanden, durch nachträgliche Resorbtion zu weit klaffenden Spalten erweitert werden.

Endlich sei hier noch der Längsfalten erwähnt, die sich häufig an den Membranen der Hyalinzellen in der unteren Hälfte von Astblättern bei sämmtlichen Arten finden, quer über sämmtliche Fasern einer Zelle sich erstrecken, so dass jede Faser dort, wo sie von der Falte getroffen wird, scharf eingeknickt oder verbogen erscheint. Kommen in der oberen Hälfte der Blätter Längsfalten vor, so erstrecken sie sich nur über die Membranstücke zwischen je zwei Ringplatten, weil letztere einer Knickung widerstehen, während die zarten, wenig in's Lumen vorspringenden Fasern in der unteren Blatthälfte nicht genug widerstandsfähig sind.

Zuweilen bilden sich auch tiefe Furchen in der Mittellinie der Hyalinzellen aus, namentlich bei *Sph. riparium* und anderen Cuspidatis (Fig. 27), aber auch in der Acutifolium-Gruppe und bei *squarrosum* und *teres*. Im Querschnitt gewinnen die Hyalinzellen dann einen etwa herzförmigen Umriss.

Wir haben bisher die Hyalinzellen in Bezug auf ihre Aussteifungsvorrichtungen kennen gelernt, wenden wir uns jetzt der Betrachtung jener Einrichtungen zu, welche dieselben Zellen befähigen Wasser rasch aufzunehmen und festzuhalten, der

Betrachtung der Poren.

Sind die Hyalinzellen in Folge ihres engen Lumens befähigt bedeutende Capillarkräfte zu entwickeln, so können diese doch erst wirksam werden durch die Perforation der Wände, insofern hierdurch nicht nur ein rascher und leichter Eintritt des Wassers, sondern auch ein Entweichen der eingeschlossenen Luft ermöglicht wird. Wir sehen daher bei allen Torfmoosen mit Ausnahme des auch sonst abweichenden und eigenthümlichen *Sph. Pylaiei* die Hyalinzellen der Astblätter mit zahlreichen, grösseren oder kleineren Poren versehen. Bei vielen Arten sind die Rindenzellen des Stengels gleichfalls perforirt, wenn auch nur durch ein Loch, wie bei den Acutifoliis, oder die Rindenzellen der Aeste, die merkwürdigen Retortenzellen. Bei *Sph. Pylaiei* habe ich nur hie und da zarte, durch Resorbtion entstandene, nicht umwallte Löcher gefunden.

Mit Ausnahme der Cuspidata, welche von allen Torfmoosen am meisten an reichliches Wasser gebunden sind und oft ganz untergetaucht wachsen, sind die Poren, wenigstens an der Aussenseite der Blätter, zumal an deren freier Spitze

von einer Ringfaser umgeben, d. h. umwallt. Bei den Cuspidatis fehlen zwar die Porenringe nicht ganz, doch finden sie sich im Ganzen selten.

Der Zweck der „Ringfaser" als eines Schutzmittels gegen Einreissen der Löcher und mithin einer nachtheiligen Vergrösserung der Oeffnungen in der Zellhaut, ist evident, da bei allen den während der längsten Dauer der Vegetationszeit, wenigstens in ihren oberen Theilen von Luft und nicht von Wasser umspülten Arten, die Löcher umwallt sind, zumal an den freien Theilen der Blattoberfläche. Sehen wir uns aber die bisher nicht erkannte, eigenthümliche Form der ringförmigen Einfassung näher an, so drängt sich uns die Annahme auf, dass noch ein anderer Zweck mit der Umwallung verbunden sein könnte.

Nach den Beschreibungen zu urtheilen, hat man bisher wohl allgemein die den Porus umgebende Ringfaser, gleich den Ring- und Spiralleisten, für eine nur wenig in's Lumen der Hyalinzelle hineinragende Leiste oder Faser von ringförmiger Gestalt gehalten. Sehen wir uns darauf die Abbildungen bei Schimper an, so sollte man meinen, dass die Ringfaser kaum merklich in's Lumen vorspringt oder durch eine sanfte Einbiegung des Lochrandes nach Innen zu Stande kommt (vergl. Schimper a. a. O. Taf. VI, Fig. 7 und Taf. XXVII). Vergleicht man mit diesen Abbildungen die auf den hier beigegebenen Tafeln dargestellten Blattquerschnitte (Fig. 10, 11, 12, 31, 48, 52, 55—60, 62), so werden an diesen, ebenso wie die in's Lumen der Hyalinzellen weit hineinragenden Ringplatten, sogleich die merkwürdigen, trichterartigen, nach Aussen ebenso wie nach Innen zart gewulsteten, oder richtiger, von einem häutigen Doppelsaum umgebenen Löcher in die Augen springen. Besonders scharf ausgeprägt tritt die eigenthümliche Bildung an den auffallend kleinen Löchern in der Spitze der Blätter abstehender Aeste von *Sph. Warnstorfii* uns entgegen (Fig. 10), auch bei *Sph. fuscum* und den übrigen Acutifoliis wie auch bei den Subsecundis und etwas modificirt bei den Cymbifoliis und bei *rigidum*. Die Form des Porendurchschnitts erinnert in sehr auffallender Weise an die Gestalt des Spaltöffnungsdurchschnitts zahlreicher Phanerogamen, wo die Spalte zwischen den Schliesszellen einen s. g. Vor- und Hinterhof bildet. Die Wandung des Loches verläuft nicht glatt, sondern zeigt zwei Einbuchtungen, die durch einen mittleren Vorsprung getrennt werden, oder mit anderen Worten: die Lochwandung wird von drei in's Lumen (des Loches) vorspringende Ringe eingeengt, zwischen denen sich zwei ringartige Erweiterungen (oder Einbuchtungen in die Lochwand) befinden. Bald sind alle drei Ringe gleich stark entwickelt, bald der mittlere am stärksten, bald die beiden äusseren oder auch nur einer von beiden und zwar gewöhnlich der nach aussen liegende.

Entsprechend der Breitenabnahme der Ringplatten von der Spitze zur Basis des Blattes, sehen wir auch die Umwallung der Löcher an Mächtigkeit abnehmen, umgekehrt dagegen den Durchmesser der Löcher von der Spitze zur Basis des Blattes zunehmen, ebenso wie die Grösse der Zellen; doch nehmen im Allge-

meinen die Löcher von der Basis zur Spitze des Blattes hin nicht in dem Verhältniss an Grösse ab als die Zellen, so dass die kleineren Zellen der Spitze durch relativ grössere Löcher vor den Zellen der unteren Blatthälfte sich auszeichnen. Um so auffallender treten daher bei *Sph. Warnstorfii m.* und einigen Formen des *Sph. fuscum* wie bei *Sph. Wulfianum* die Löcher in der oberen Blatthälfte durch ihre ausserordentliche Kleinheit hervor. Die Löcher der letztgenannten Art sind durch die äusserst stark nach innen vorspringende Umwallung ausgezeichnet (Fig. 42, Taf. IV) während der äussere Rand nur wenig oder kaum merklich vorspringt.

Wie die Aussteifungs-Ringe und Spiralen der Hyalinzellen aus Sparsamkeitsrücksichten in der unteren Blatthälfte, die hinlänglich geschützt ist, nur als zarte Fasern zur Entwickelung gelangen, so unterbleibt die Umwallung der Poren häufig an Orten, wo eine Festigung der Lochränder entbehrlich ist, an der Innenfläche der Blätter und auch an der Aussenfläche, wenn diese nach Innen eingeschlagen ist, so namentlich bei den Acutifoliis und Squarrosis. Bei den Cuspidatis, wie bereits erwähnt, ist die Umwallung der Löcher sehr selten ausgebildet, da sie hier durch das die Pflanzen umgebende Medium überflüssig wird; ebenso verhält sich *Sph. macrophyllum Bernh.*

Nicht ohne Interesse ist bei den Cuspidatis eine nähere Untersuchung der Löcher in Bezug auf ihre Vertheilung, Häufigkeit und Grösse. Bei den untergetauchten oder schwimmenden Formen, (formae immersae Schimpers), sind die Löcher meist sehr klein und sparsam an den Blättern der abstehenden wie herabhängenden Aeste (wenn letztere überhaupt vorhanden) in jeder Beziehung gleich gebildet. Bei den aus dem Wasser hervorragenden Formen (formae emersae Schimpers) sind die Löcher in den Blättern abstehender Aeste meist klein und ziemlich zahlreich, in den Blättern der herabhängenden Aeste meist gross bis sehr gross und zumal in der oberen Blatthälfte sehr zahlreich. Als Typus dieser Ausbildung kann *Sph. riparium* genannt werden. Zwischen diesen beiden angeführten Extremen kommen alle denkbaren Zwischenbildungen vor, je nach dem Standort. Als besonders characteristisch für die ganze Gruppe ist die Ausbildung von Löchern in den der Blattspitze zugekehrten Spitzen der Hyalinzellen, entweder nur an der Aussenseite des Blattes (einseitige Spitzenlöcher) oder auch an der Innenseite (zweiseitige Spitzenlöcher). Diese Spitzenlöcher treten meist nur in der oberen Hälfte des Blattes auf und zwar sind sie beim Riparium-Typus in den Blättern der herabhängenden Aeste zweiseitig, sehr gross und zahlreich [1]), in den Blättern der abstehenden Aeste auch meist zweiseitig, aber viel kleiner und weniger zahlreich. Ausserdem sind grosse zweiseitige Spitzenlöcher bei *riparium* und einigen anderen Formen an den Flanken der Blätter abstehender Aeste eine auffallende Erscheinung.

---

1) Cfr. meine Beiträge pag. 12 und Taf. I, Fig. 3

Hiezu möchte ich bemerken, dass die erwähnten Verhältnisse bei den Cuspidatis nur mit Hilfe tingirender Mittel zu erkennen sind wegen der ausserordentlichen Durchsichtigkeit der Zellhaut. Die etwas umständliche und nicht immer gleichförmig ausfallende Tinction vermittelst Jod und Schwefelsäure, kann in einfachster und bequemster Weise durch Anwendung von Anilinfarbstoffen ersetzt werden, unter welchen ich Methylviolett als besonders geeignet gefunden habe. Man tauche feuchte Aeste in eine dunkle Lösung des genannten Farbstoffes nur auf ein Paar Minuten, wasche dann aus und löse in üblicher Weise die Blätter ab um sie in einem Tropfen Wasser auf dem Objectträger auszubreiten. Dagegen ist die Herstellung gefärbter Dauerpräparate eine recht umständliche, denn in Glycerin oder Gelatineglycerin wird der Anilinfarbstoff aus der Membran der Sphagnumblätter vollständig extrahirt. Die Fixirung der Tinction gelingt nur in Balsam [1]).

Unter allen untersuchten Arten steht *Sph. rigidum Schmpr.* einzig da in Bezug auf Porenbildung, insofern hier die Löcher nicht nur an den Aussenwänden auftreten, sondern auch in den zweien Hyalinzellen gemeinsamen Wänden grosse umwallte Löcher gebildet werden, so dass die Hyalinzellen unter einander in offene Communication treten. (Fig. 58, L). Es kommt diese eigenthümliche Bildung dadurch zu Stande, dass die Membranen der Hyalinzellen sich äusserst stark vorwölbend, an den Berührungsflächen mit einander verwachsen und dort, wo zwei Löcher (die hier dicht an den Commissuren mit den Chlorophyllzellen stehen) aufeinander treffen, diese zu einem Loch verschmelzen. Diese inneren Löcher bilden sich sowohl an den langen als kurzen Wänden der Hyalinzellen aus.

Ergiebt sich aus der bisherigen Betrachtung der Löcher zur Evidenz der Zweck der Umwallung als einer festigenden Einrichtung, so ist uns die Bedeu-

1) Da ein tingirtes Sphagnumblatt zu den schönsten und zierlichsten mikroscopischen Objecten gehört, welche uns die Pflanzenwelt liefert, so mag das Verfahren tingirte Dauerpräparate herzustellen, hier mitgetheilt werden.

Man bringe, um Ueberfärbung zu vermeiden, die betreffenden Sphagnum-Aeste zunächst in eine diluirte wässrige Anilinlösung (Methylviolett, Fuchsin, Bismarkbraun, Nachtgrün etc. nur Anilinblau eignet sich nicht) und lasse die Aeste hier einige Tage liegen, bis sich die Lösung verfärbt; es wird ihr der Farbstoff von den Blättern entzogen. Darauf breitet man die Blätter auf einem Objectträger aus, bedeckt mit einem Deckglass und fügt am Rande des letzteren diluirten Alcohol zu, den man von der entgegengesetzten Seite des Deckglases mit Fliespapier abzieht und ersetzt allmälig den diluirten Alkohol, durch immer stärkeren bis zu 96 %. Thut man die Aeste gleich in starken Alcohol, so schrumpfen die Blätter zusammen; auch beim Uebertragen aus schwächerem Alcohol in stärkeren sind beträchtliche Verkrümmungen des Blattes nicht zu vermeiden, liegt aber das Deckglas den Blättern dicht auf, so behalten sie bei allmäliger Wasserentziehung ihre Gestalt. Die so entwässerten Blätter werden in Bergamottöl gebracht und nach einigem Verweilen in diesem in Canadabalsam gebettet. Auf einer dünn ausgestrichenen Schicht des Balsams lassen sich die Blätter auf dem Objectträger nach Belieben aufstellen und ordnen; man bestreiche nun die aufzulegende Fläche des Deckglases mit flüssigem Balsam und legt dasselbe auf die Blätter. Das Deckglas muss beschwert werden mit einem geeigneten Gewicht, das bis zum Eintrocknen des Balsams liegen bleibt. Ohne diese Belastung wird das Deckglas von den gewölbten Blättern bald emporgehoben, Luft tritt ein und das Präparat wird unbrauchbar.

tung der merkwürdigen Form der Umwallung noch nicht klar geworden. Da Resorption der Membran ohne Umwallung der resorbirten Stelle zu Stande kommt, so ist die eigenthümliche Form der Umwallung unabhängig von dem Resorbtionsvorgange. Käme es nur darauf an, den Lochrand gegen Einreissen zu schützen, so wäre ein einfacher Ringwulst nicht nur ausreichend, sondern vielleicht wirksamer als der complicirt gebaute, nach Aussen wie Innen oft sehr fein zugeschärfte Lochrand. Es lässt sich denken, dass beim Eintrocknen etwa die beiden Ränder sich einander näherten, wodurch das Lumen des Loches verkleinert würde; doch wäre diese Verengerung des Loches in den meisten Fällen eine so geringe, dass sie nicht in Betracht käme. Somit erscheint es unthunlich den umwallten Löchern die Rolle von Oeffnungen mit wechselnder Weite des Lumens zu vindiciren, wie wir solche in den Spaltöffnungen der höheren Gewächse kennen, auch ist es mir nicht geglückt eine Verschiedenheit in der Stellung der Lochränder im feuchten und trocknen Zustande wahrzunehmen. Bedeutungslos aber können die Doppelränder der Poren nicht sein, sonst hätten sie sich nicht gebildet und e r h a l t e n. Die wiederholt von mir beobachtete Thatsache, dass die Arten, bei welchen die Löcher einen stark entwickelten Doppelrand zeigen wie bei *Sph. Warnstorfii*, gegen Austrocknen besser geschützt sind als die Arten bei denen die Umwallnng der Poren gering ist oder gar ganz fehlt, drängt zur Annahme, dass die eigenthümliche Umwallung der Löcher eine Vorrichtung darstellt, vermittelst welcher das in den Zellen befindliche Wasser leichter zurückgehalten oder Wasser von aussen, etwa in Form von Thau oder Nebel, leichter aufgenommen werden kann. Jedenfalls ist es eine auffallende, oft von mir beobachtete Erscheinung, dass bei dicht neben und durcheinander wachsenden Rasen von Arten aus der Acutifolium-Gruppe und Cuspidatum-Gruppe, letztere zu allererst trocken werden, zuletzt *Sph. acutifolium* seine Feuchtigkeit verliert, das unter allen Gruppengenossen (gleiche Bedingungen vorausgesetzt) am längsten seine Feuchtigkeit bewahrt. Eine bessere Begründung, oder aber auch Widerlegung dieser Annahme von der Bedeutung der doppelrandigen Lochumwallungen bleibe der Zukunft vorbehalten.

Wir können diesen Abschnitt, welcher sich mit den Einrichtungen der Wasseraufsaugung beschäftigt nicht schliessen, ohne nochmals der Steifungsvorrichtungen zu gedenken und deren Bedeutung auch in Hinsicht der Wasser-Aufnahme und Abgabe zu beleuchten.

Selbstverständlich wird ein Capillarröhrchen (was ja die Hyalinzelle eines Sphagnumblattes ist) um so ergiebiger Wasser anziehen und dieses festhalten, je grösser die Oberfläche des Lumens bei gleichem Durchmesser des letzteren ist, also je mehr Rauhigkeiten die Wand des Capillarrohrs bietet. Offenbar wird nun durch die tief in's Lumen der Hyalinzellen hineinragenden Ring- und Spiralplatten die innere Oberfläche der betreffenden Zellen ganz ausserordentlich vergrössert und somit die Adhäsionskraft der Zellen für Wasser sehr gesteigert. Wir sehen,

dass in der unteren Hälfte der Blätter abstehender Aeste die Steifungsringe nur wenig in's Lumen vorspringen, weil dieser Theil durch Deckung von Seiten benachbarter Blätter geschützt ist gegen Verletzungen; er ist aber auch ebenso geschützt gegen Verdunstung, und somit kann aus diesem Gesichtspunkt hier die innere Oberflächenvergrösserung eine geringere sein. Wenn wir dagegen die Papillen an den Wänden der Hyalinzellen bei *Sph. papillosum Ldbg., squarrosum, teres* und *Wulfianum* und die Kammfasern bei *Sph. Austini Sulliv,* welche Gebilde jedenfalls neben einer anderen, später zu besprechenden Hauptaufgabe noch als Nebenzweck den der Oberflächenvergrösserung besitzen, meist in der unteren Blatthälfte stärker und zahlreicher ausgebildet finden als in der oberen, so wird dieser Mangel durch die stärkere Entwickelung der Ringplatten in der oberen Blatthälfte reichlich compensirt.

Ueberblicken wir nun noch einmal kurz den Bau der Hyalinzellen, indem wir den durch dieselben angestrebten Zweck in's Auge fassen und die je nach der örtlichen Lage ungleichen Anforderungen in Bezug auf Festigkeit und Wasserabsorption berücksichtigen, so müssen wir bekennen, dass uns überall eine höchst vollkommene Construction entgegentritt, die mit einem möglichst geringen Aufwande von Mitteln erreicht wird.

Fassen wir jetzt die den assimilatorischen Zwecken dienenden Elemente in's Auge:

die Chlorophyllzellen.

Da die Blätter der abstehenden und herabhängenden Aeste dem Lichte in sehr ungleichem Maasse exponirt sind, so können wir erwarten in Bezug auf die Lagerung und Form der Chlorophyllzellen in den beiderlei Blättern eine Verschiedenheit anzutreffen, was thatsächlieh der Fall ist; wir wollen daher zunächst von den Blättern der abstehenden Aeste sprechen und an diesen auch nur zunächst die freie, unbedeckte obere Hälfte in's Auge fassen.

Bei der Dünne und Durchsichtigkeit der Sphagnumblätter sollte man meinen, dass es gleichgültig sei wie die Chlorophyllzellen liegen, Licht müssen sie ja in jedem Fall in genügender Menge erhalten. Wie mir scheint, muss man bei der Beurtheilung der verschiedenen Lagerung der Chlorophyllzellen in den Sphagnumblättern nicht von dem Gesichtspunkt des Lichtbedürfnisses, sondern des Lichtschutzes ausgehen.

Bekanntlich ist das Chlorophyll der Muscineen meist lichtscheu, um es kurz auszudrücken, im Vergleich zum Chlorophylle der meisten höheren Gewächse, das, wie wir wissen, ebenfalls vor zu vielem Licht geschützt werden muss um nicht zerstört zu werden. Wir finden daher die Mehrzahl der Laub- wie namentlich Lebermoose an mehr oder weniger schattenreichen Orten, ja im tiefsten Waldesdunkel gedeihen und wissen, dass bei diesen Gewächsen das die Chlorophyllkörner einschliessende Protoplasma in Folge Lichtreizes Bewegungen ausführt,

durch welche Chlorophyllkörner aus der Schattenlage in die Lichtlage versetzt werden, d. h. in eine Stellung gebracht werden, bei der sie viel weniger Licht empfangen als vorher.

Unter der Voraussetzung nun, dass das Chlorophyll der Torfmoose ebenso wie das der übrigen Muscineen lichtempfindlich ist und nicht ungeschützt der Sonne exponirt werden darf, werden uns die Form- und Lagerungsverhältnisse der Chlorophyllzellen wie die bei den Torfmoosen so sehr verbreiteten, starken Pigmentirungen der Zellwände verständlich.

Gehen wir von der ursprünglichen Lagerung der Chlorophyllzellen im jugendlichen, noch in Entwickelung begriffenen Blatte aus. Ein Querschnitt zeigt uns hier die beiderlei Zellen an der Aussen- wie Innenfläche des Blattes plan und von gleicher Ausdehnung in der Richtung senkrecht zur Blattfläche. Die Hyalinzellen erscheinen etwa quadratisch, die Chlorophyllzellen rectangulär, um ein Drittel bis zur Hälfte schmäler als erstere. Bei der weiteren Entwickelung dehnen sich die Hyalinzellen beträchtlich aus, ihre Aussenwände mehr oder weniger abrundend und über die Chlorophyllzellen vorwölbend, derart, dass letztere entweder (meist) an die Innenfläche oder (selten) an die Aussenfläche des Blattes gedrängt werden oder auch beiderseits gleichmässig umschlossen werden. In beiden Fällen ändert sich die ursprüngliche rectanguläre Gestalt der Chlorophyllzellen nicht unbeträchtlich; im ersten Fall wird sie dreieckig, indem die eine Aussenwand gebrochen und soweit ausgezogen wird, bis aus dem Rechteck ein Dreieck geworden, dessen Spitze entweder nach der Aussenfläche (Fig. 18, 19, 21) oder nach der Innenfläche des Blattes zu liegen kommt (Fig. 26, 27, 28); im zweiten Fall werden beide Aussenwände gebrochen und soweit ausgedehnt, bis der Querschnitt linsenförmig geworden (Fig. 42, 43, 48, 51, 56—63). In einigen Fällen behalten aber die Chlorophyllzellen ihren ursprünglichen rectangulären Querschnitt fast genau bei, nur die mit den Hyalinzellen verwachsenen Wände ein wenig in letztere hineinwölbend, wie bei einigen Formen der Subsecunda (Fig. 31, 39) oder die Chlorophyllzellen bleiben rectangulär oder werden fast quadratisch oder paralleltrapezoidisch und trennen die Hyalinzellen, welche ein nahezu kreisrundes Lumen gewonnen, vollständig von einander, wie das gewöhnlich bei den Blättern der herabhängenden Aeste in den Gruppen der Acutifolia, Cuspidata und Squarrosa der Fall ist (Fig. 24, 13, 14, 15, 46).

In der Jugend, wo das Chlorophyll am leichtesten durch Lichteinwirkung zersetzbar ist, wird es sehr wirksam geschützt durch die Einbettung der jungen Sprosse in den dichten Astschopf.

Durch die Stellung, wie sie uns bei den Acutifoliis und zum Theil bei den Cymbifoliis entgegentritt, d. h. wo die dreieckigen Chlorophyllzellen an die Innenfläche gerückt sind und von den Hyalinzellen nach der Aussenfläche des Blattes hin vollständig überwölbt werden, ist das Chlorophyll direct einfallenden Lichtstrahlen entzogen. Noch wirksamer gegen directes Licht erscheint mir die all-

seitige Umschliessung der Chlorophyllzellen, bei linsenförmigem Querschnitt letzterer, wodurch die Chloroplastiden nur unter sehr spitzen Winkeln von den Sonnenstrahlen getroffen werden können und mithin die Lichtwirkung bedeutend abgeschwächt wird. Doch in beiden Fällen scheint dieser Schutz nicht zu genügen, wenn die Pflanzen an der Sonne sehr exponirten Localitäten wachsen. Dann sehen wir F a r b s t o f f e auftreten, welche die Zellhaut sehr intensiv tingiren, wodurch offenbar ein „L i c h t s c h i r m" geschaffen wird.

So ist die auf sonnigen Hochmooren verbreitetste Art *Sph. fuscum Klingg.* wie der Name sagt, tief braun gefärbt; Formen derselben Art welche an beschatteten Stellen wachsen sind lichtbraun bis hellgrün-bräunlich gefärbt. Die an sonnigen Stellen des Hochmoors ebenfalls sehr verbreiteten Formen des *Sph. tenellum Klingg. v. rubellum* (= *Sph. rubellum Wils.*) sind tief roth gefärbt, desgleichen die hier wachsenden Formen des *Sph. cymbifolium Ehrh.* (*Sph. medium Limpr.*), während andere dieser Art angehörende Formen wie das nah verwandte *Sph. Austini Sulliv.* braun bis tief braun gefärbt sind. Die rothe Farbe ist ferner bei den Auctifoliis, mit Ausnahme des schattenliebenden *Sph. fimbriatum Wils.* und *Sph. Girgensohnii m.*, sehr verbreitet, ja fast stets vorhanden, zumal bei den an sonnigen Plätzen wachsenden Formen. Bei *Sph. Girgensohnii m.* tritt, wenn es an freien, lichten Plätzen wächst, ein gelb-brauner bis brauner Farbstoff auf.

Eine ganz exquisite Lichtschutz-Vorrichtung tritt uns, wie mir scheint, in den Papillen des *Sph. papillosum Lindbg.*, *Sph. squarrosum*, *teres* und *Wulfianum*, wie in den Kammfasern des *Sph. Austini Sulliv.* entgegen. Bedeutungslos können die genannten Gebilde für die betreffenden Pflanzen nicht sein; die Adhäsion für Wasser wird zwar durch dieselben vermehrt, aber nur in beschränktem Maasse, da sie sich nicht in der ganzen Ausdehnung der Wände der Hyalinzellen finden, sondern nur soweit, als letztere mit den Chlorophyllzellen verwachsen sind und das ist es eben, was uns die Ansicht aufdrängt, dass wir es hier mit einer Einrichtung zu thun haben, welche in erster Linie den Chlorophyllzellen zu Gute kommt; einen anderen Nutzen aber, als den eines „L i c h t - s c h i r m s", können die Chlorophyllzellen wohl kaum aus dieser Einrichtung ziehen.

In der Subsecundum-Gruppe, wo die im Querschnitt tonnenförmigen oder linsenförmigen Chlorophyllzellen gerade in der Mitte zwischen den Hyalinzellen stehen und dem Licht von beiden Seiten gleich freien Zugang in's Innere gestattet ist, wird durch die sehr dicken Aussenwände (Fig. 31), zumal an der Aussenseite des Blattes, die Wirkung des Lichtes einigermaassen abgeschwächt, mehr aber jedenfalls durch die in dieser Gruppe häufig auftretenden dunkelgelben bis schwarzbraunen Pigmente, welche nie bei den an sonnigen Orten wachsenden Individuen fehlen.

Am meisten dem Lichte exponirt ist das Chlophyll in der Cuspidatum-

Gruppe, da die freien Wände der Chlorophyllzellen an der Blattaussenfläche liegen; vielleicht wird die Intensität des Lichtes gemildert durch die dachartige Zuspitzung, resp. Einsenkung der freien Wand (Fig. 22, 25, 28), eine Erscheinung, die ich fast durchgängig in dieser Gruppe, freilich nicht in der ganzen Ausdehnung der Blätter gefunden habe und darin liegt, wir ich zu zeigen hoffe, die wahre Bedeutung dieser Erscheinung. In Folge der dachartig zugespitzten, resp. eingesenkten Aussenwände kann das Licht nur gebrochen in's Innere der Zellen gelangen; das käme aber nur den betreffenden Zellen zu gute. Die eigentliche Bedeutung dieser Erscheinung scheint mir aber darin zu bestehen, dass beim Verlust des Turgors (die Cuspidata verlieren ausserordentlich leicht das imbibirte Wasser) die Chlorophyllzellen sich in der Weise zusammenziehen, dass der Winkel der dachartigen Zuspitzung kleiner wird, oder was dasselbe, die beiden inneren Wände der Chlorophyllzelle sich einander nähern; dadurch wird die Blattfläche in der Ausdehnung jener, die dachartige Zuspitzung besitzender Zellen, sich zusammenziehen und da andere Theile der Blattfläche solch' eine Contraction nicht erfahren, nämlich überall da, wo die besagte Erscheinung an der Aussenwand der Chlorophyllzellen nicht vorkommt, so wird die Blattfläche sich wellig verbiegen oder kräuseln, was thatsächlich der Fall und ein auszeichnendes Merkmal der Cuspidata bildet. Anders vermag ich mir die so characteristische Kräuselung der eintrocknenden Cuspidatum-Blätter nicht zu erklären und in der Kräuselung vermag ich wiederum nur ein Schutzmittel gegen allzu starke Insolation zu erblicken. Durch braune Farbstoffe sind nur wenige Formen geschützt, wie *Sph. Lindbergii Schmpr.*, das der Kräuselung ermangelt und dessen Chlorophyllzellen die dachartige Zuspitzung nicht zeigen (Fig. 30). Da im turgescirenden Zustande die meisten Formen der Cuspidata gegen Licht weniger als die übrigen geschützt sind, so erklärt sich die Thatsache, dass, mit Ausnahme der im Waldschatten wachsenden Formen, welche oft tief grün sind, wie oft bei *Sph. riparium* und *recurvum* der Fall, die meisten Cuspidata sich durch bleiches, weissliches Ansehen vor allen Gattungsgenossen auszeichnen.

Bei den Squarrosa (oder Papillosa) sind die Chlorophyllzellen zwar auch meist dreieckig (im Querschnitt) und wie bei den Cuspidatis von der Aussenseite her zwischen die Hyalinzellen gekeilt, doch, wie ein Blick auf die Figg. 36—47 zeigt, sind die schmal dreieckigen Lumina in die Mitte zwischen den Hyalinzellen gerückt, indem die Aussenwände der Chlorophyllzellen stark verdickt sind, oder die Zellen sind (gerade in der freien Spitze des Blattes) linsenförmig, allseitig umschlossen und dann sind die Chlorophyllzellen hier durch Papillen geschützt. Ausserdem sind es zum grössten Theil Waldbewohner und die an sonnigen Orten vorkommenden Formen, zumal von *teres*, sind meist dunkelbraun gefärbt.

Bei *Sph. rigidum Schmpr.*, *Ångstroemii Hartm.*, *aculeatum Warnst.*, *cyc-*

lophyllum S. L. und zahlreichen Formen des *Sph. palustre L.*, so *Sph. medium Limpr.* und *papillosum Lindbg.*, sind die Chlorophyllzellen durch die sie umschliessenden Hyalinzellen wie durch braune und rothe Farbstoffe geschützt.

Wir haben bisher nur die freie, unbedeckte obere Hälfte der Blätter berücksichtigt. Betrachten wir nun die Lagerungs- und Formverhältnisse der Chlorophyllzellen auch in der unteren bedeckten Blatthälfte, die natürlich weniger Licht empfängt als die obere Hälfte. Die längst bekannte Thatsache, dass in der Acutifolium-Gruppe z. B. in der unteren Hälfte der Blätter die Hyalinzellen sich nicht (wie in der oberen Hälfte) über die Chlorophyllzellen vorwölben, so dass letztere an ihrer Aussenfläche ungedeckt sind, wird uns nunmehr verständlich; es wird dem gedämpften Licht freier Zugang gewährt ins Innere der Chlorophyllzellen; eine noch weitere Abschwächung des Lichts durch Vorwölbung der Hyalinzellen würde den Assimilationsvorgang beeinträchtigen. (Man vergleiche Fig. 10, 11, 12, Querschnitte aus der oberen Blatthälfte und Fig. 13, 14, 15, Querschnitte aus der unteren Blatthälfte, mit einander). Ebenso, oder noch eclatanter ist es bei *Sph. squarrosum, teres* und *Wulfianum* (Fig. 36—47). Bei den Arten, wo die Chlorophyllzellen von den Hyalinzellen in der oberen Blatthälfte umschlossen werden, finden wir in der unteren Blatthälfte, bis auf *Sph. rigidum* und *aculeatum*, die Chlorophyllzellen mehr oder weniger dreieckiges Lumen gewinnen und bis an die Innenfläche des Blattes heranrücken.

Dass Form und Lagerung der Chlorophyllzellen abhängig sind von dem Maass des die betreffenden Blätter treffenden Lichts, tritt uns am deutlichsten entgegen an den Blättern der herabhängen Aeste. Wie schon oben bemerkt wurde, ist hier der Querschnitt der Chlorophyllzellen rectangulär bis quadratisch oder trapezoidisch, wodurch die Hyalinzellen vollkommen von einander getrennt werden und somit die ersteren das bereits mehrfach gebrochene, reflectirte und gedämpfte Licht, ohne weitere Abschwächung durch Vorwölbung der Hyalinzellen, empfangen; eine weitere Abschwächung des Lichts wäre hier eher nachtheilig als vortheilhaft.

Ein Umstand aber ist hierbei noch zu berücksichtigen, nämlich dass die Chlorophyllzellen in den Blättern der herabhängenden Aeste in der Mitte zwischen den Hyalinzellen stehen, auch bei den Cuspidatis (Taf. III, 24), obwohl hier der Beleuchtungsverhältnisse wegen solch' eine Lagenveränderung nicht nothwendig erscheint. Somit ist wohl mit der centralen Lage der Chlorophyllzellen hier noch ein anderer Zweck verbunden. Da den herabhängenden Aesten wohl in erster Linie die Saugung des Wassers von unten her obliegt, so könnte die erwähnte Stellung der Chlorophyllzellen für die Wasserbewegung von unten nach oben vortheilhaft sein, insofern als dadurch zwischen den aufeinanderliegenden Blättern relativ weite capillare Gänge oder Röhren hergestellt werden, die einer ergiebigen Verbreitung des Wassers günstig sind. Vielleicht hängt aber auch die centrale Stellung der Chlorophyllzellen mit der Zugfestigkeit zusammen,

insofern durch diese Stellung die von den Chlorophyllzellen hauptsächlich zu tragende Masse des wassererfüllten Blattes, gleichmässig zu beiden Seiten der Träger vertheilt wird. Diese letzte Annahme erscheint mir am plausibelsten.

Es erübrigt nun noch darauf hinzuweisen, dass in Bezug auf Festigkeit in der Construction des ganzen Blattes, die Form und Lagerung der Chlorophyllzellen von wesentlichem Einfluss ist.

Der Antheil, den die Chlorophyllzellen an der Gesammtfestigkeit des Blattes haben, scheint mir sehr verschieden, ja nachdem dieselben von den Hyalinzellen gänzlich umschlossen werden, oder letztere mehr oder weniger von einander trennen. Im ersten Fall, wie bei *Sph. rigidum* (Fig. 58, 60, 61) *Sph. aculeatum* (Fig. 63) und *medium* sind die Wände der Chlorophyllzellen relativ sehr dünn und sie können daher nur wenig zur Festigkeit des Ganzen beitragen. Dafür sind hier die Berührungsflächen der Hyalinzellen unter einander sehr gross und deren Aussteifungsvorrichtungen, (wenigstens bei beiden erstgenannten) sehr vollkommen und eigenthümlich, so dass der Hauptantheil in Bezug auf Steifigkeit des Blattes den Hyalinzellen zukommt.

Im zweiten Fall finden wir die Wände der Chlorophyllzellen meist beträchtlich verdickt, zumal an den freien Flächen, wodurch nicht selten ihr Lumen in die Mitte zwischen Aussen- und Innenfläche des Blattes rückt und hierdurch die Aehnlichkeit mit denen des ersten Typus eine sehr grosse wird, so dass in Folge dessen von verschiedenen Autoren die Form und Lagerung der Chlorophyllzellen bei derselben Art sehr verschieden angegeben wird [1]).

---

1) So schreibt Schimper *Sph. squarrosum* (incl. *teres*) „cellulae virides compressae undique inclusae“ zu, während Lindberg [1]) den Sachverhalt richtig angiebt indem er sagt: „cellulae chlorophylliferae subrectangulari - ovatae, in margine convexo positae ibidemque distincte rotundatae, in marginibus utrinque perfecte liberae nec ab eisdem inanibus inclusae, praesertim ad marginem convexum sat valde incrassatae, lumine subelliptico et majusculo“; ebenso Limpricht [2]): „Chlorophyllzellen der Astblätter bald triangulär und der Aussenfläche genähert, doch meist in der Mitte zwischen den Hyalinen und beiderseits frei; im oberen Blatttheile beiderlei Zellen von gleicher Höhe, daher die hyalinen Zellen biplan, die grünen mit stark verdickten, freien Wänden; im unteren Theile die grünen viel niedriger, daher die hyalinen biconvex“. Dagegen weichen die beiden letztgenannten Autoren in ihren Angaben betreffs der Chlorophyllzellen von *Sph. Angstroemii* nicht unbeträchtlich von einander ab. Lindberg [3]) sagt zutreffend: „Cellulae chlorophylliferae subovatulo - oblongae, fere in medio, licet marginem concavum distinctiuscule propius, inter easdem inanes positae, sed ab iis non inclusae, ut in marginibus, praesertim in eodem concavo, liberae, parum et conformiter incrassatae, lumine oblongo et magno.“ Dagegen Limpricht [4]) „grüne Zellen im Querschnitt schmal elliptisch, centrirt und rings von den biplanen hyalinen eingeschlossen, unten beiderseits frei und die hyalinen biconvex.

Noch grösser finden wir die Differenzen in den Angaben der Lagerungs- und Formverhältnisse der Chlorophyllzellen bei verschiedenen Autoren in Bezug auf *Sph. papillosum Ldbg.* die sich aus der thatsächlichen grossen Variabilität der beregten Verhältnisse erklären.

---

1) Europas och Nord-Amerikas Hvitmossor. 1882. Helsingfors, pag. 42
2) Rabenhorst, Kryptogamenflora, 4. Band, 2. Lief. 1885. pag. 124.
3) a. a. O. pag. 32.
4) a. a. O. pag. 112.

Die Neigung, nicht nur das Lumen der Chlorophyllzellen in die Mitte des Blattquerschnitts zu rücken, sondern auch die ganzen Zellen zu centriren, tritt uns in der Cymbifolium-Gruppe in auffallender Weise entgegen. Hier finden wir (abgesehen von *Sph. Austini Sulliv.*) an den Blättern derselben Pflanze so beträchtliche Schwankungen in Betreff der Lagerungs- und Formverhältnisse der Chlorophyllzellen, dass von der rein centrischen Lage und Linsenform alle denkbaren Uebergänge zu der lateralen Lage und Dreieckform zu finden sind. Wenn wir bedenken, dass in der Jugend die Chlorophyllzellen, mögen sie später dem einen oder anderen Typus angehören, durchaus gleich gebildet sind, so ist es verständlich, dass Zwischenformen vorkommen können, es ist eben in der genannten Gruppe das Stellungsverhältniss noch nicht so fixirt wie bei *Sph. rigidum* und *aculeatum*, daher ist es unzulässig auf diese noch sehr wandelbaren Verhältnisse hin eine Artentrennung vorzunehmen wie es Limpricht gethan, der sein *Sph. medium* auf Stellung und Form der Chlorophyllzellen begründet.

Kehren wir zurück zur Betrachtung des Antheils der Chlorophyllzellen an der Aussteifung des Blattes.

Berücksichtigen wir den Umstand, dass die Stengelblätter von *Sph. Girgensohnii m.*, trotzdem dass die Hyalinzellen fast gänzlich resorbirt sind, eine beträchtliche Steifigkeit besitzen, welche letztere also nur von den Chlorophyllzellen herrührt, und dass bei anderen Arten die Stengelblätter mit faserlosen Hyalinzellen auch nicht der Steifigkeit entbehren, so dürfen wir annehmen, dass auch in den Astblättern (mit Ausnahme von *Sph. rigidum, aculeatum* und *medium*) es die Chlorophyllzellen sind, welche gleichsam das feste Gerüst darstellen, welches als Träger dem complicirt gebauten Wassersaugungs- und Speicherungs-System dient. Die einzelnen Elemente des letzteren, die Hyalinzellen, sind der ihnen zugetheilten Aufgabe entsprechend, äusserst rationell construirt und derart mit den assimilatorischen Gerüstzellen verbunden, dass sie sich gegenseitig unterstützend, dem ganzen Blatt erhöhte Festigkeit verleihen. In der oberen Hälfte der abstehenden Blätter wird die in höherem Maasse erforderliche Festigkeit dadurch erzielt, dass die Berührungs- oder Verwachsungsflächen zwischen Chlorophyll- und Hyalinzellen viel grössere sind als in der unteren, bedeckten Blatthälfte, die weniger fest construirt zu sein braucht (vergl. Fig. 10, 11, 12 mit 13, 14, 15 oder 17, 18 mit 20 u. 21). Noch auffallender ist der Unterschied in der Grösse der Berührungsflächen von beiderlei Zellen, wenn wir die obere Hälfte der Blätter abstehender Aeste mit den Blättern der herabhängenden Aeste vergleichen, wie leicht ersichtlich aus dem bisher Mitgetheilten und den betreffenden Abbildungen.

Versuchen wir es jetzt noch

die morohplogischen Verhältnisse des anatomischen Baus

im Interesse der Systematik zu verwerthen, sind doch vorliegende Untersuchungen zunächst nur im Interesse der Systematik unternommen worden und

haben sich die mitgetheilten Entdeckungen und Reflexionen, gewissermaassen, beiläufig ergeben.

Wenn wir nochmals die dargelegten anatomischen Verhältnisse der Sphagnumblätter überblicken, so tritt uns wie auch anderwärts im Pflanzenreich die Thatsache entgegen, dass je nach dem Bedürfniss, d. h. je nach den Anforderungen, welche an die physiologischen Leistungen eines Organs gestellt sind, der anatomische Bau abändert, dass aber bei allen Abänderungen doch etwas, wenigstens relativ, Stabiles übrig bleibt, das sich unserem Verständniss durchaus entzieht, weil es unabhängig von äusseren, oder überhaupt uns wahrnehmbaren, Bedingungen ist. Es ist das Morphologische oder Morphotische, das Geheimniss der Form.

Es ist leicht einzusehen, dass es zweckmässig ist, wenn z. B. die Hyalinzellen in der oberen Hälfte, zumal in der Spitze der Blätter abstehender Aeste anders gebaut sind als die in der unteren Blatthälfte oder wenn die der hängenden Aeste wieder anders construirt sind, aber wir sehen nicht ein, warum bei gewissen Formen die im Querschnitt dreieckigen Zellen sich von der Innenfläche des Blattes her, bei anderen von der Aussenfläche her zwischen die Hyalinzellen einkeilen, warum bei einigen die linsenförmigen Chlorophyllzellen genau in der Mitte, bei anderen etwas ausserhalb der Mitte zwischen den Hyalinzellen stehen, da doch in allen Fällen der gleiche Zweck erreicht wird. Wir müssen das als eine nicht weiter erklärbare Thatsache hinnehmen, denn wenn wir behaupten diese Eigenthümlichkeiten sind Folge der Vererbung, so haben wir damit im Grunde Nichts erklärt. Wir gewinnen aber für die Beurtheilung verwandtschaftlicher Beziehungen in diesen morphologischen Verhältnissen, wenn mit ihnen andere Eigenthümlichkeiten zusammenfallen und sich von Generation zu Generation im gleichen Zusammenhange vererben, ein sehr bedeutungsvolles Moment. Wir dürfen hiernach schliessen, dass alle Formen, welche in Bezug auf Form und Lagerung der Chlorophyllzellen und gleichzeitig in gewissen anderen Eigenthümlichkeiten übereinstimmen, zu einem engeren Verwandschaftskreise gehören. Wollten wir nach der Gestalt und Lagerung der Chlorophyllzellen allein die gleichen Formen zusammenstellen, so würden wir Heterogenes vereinigen und Verwandtes trennen.

Wenn wir nun sämmtliche anatomisch-morphologischen Verhältnisse berücksichtigen, so kommen wir zu folgender Gruppirung, in der wir für die einzelnen Gruppen und Untergruppen (der Kürze und Uebersichtlichkeit wegen) das besonders characteristische Merkmal allein namhaft machen.

I. Stengel-Rindenzellen sehr gross, mit Fasern und Poren.

II. „ relat. klein, ohne Fasern, mit oder ohne Poren.

Man könnte die erste Abtheilung als faserrindige (inophloea), die zweite als glattrindige (litophloea) bezeichnen.

Die erste Abtheilung fällt mit der natürlichen Gruppe der c y m b i f o l i a oder p a l u s t r i a zusammen.

In der zweiten Abtheilung können wir, unter Berücksichtigung der mittleren Blätter der abstehenden Aeste, nach der Gestalt und Lagerung der Chlorophyllzellen unterscheiden:

1) Chlorophyllzellen gleichschenklig oder gleichseitig dreieckig (triplagia).
   a. „ an der Innenfläche des Blattes (endopleura).
   b. „ „ „ Aussenfläche „ „ (exopleura).
2) „ linsen- oder tonnenförmig (diplagia).
   a. „ von den hyalinen ganz umschlossen (perikleista).
   b. „ „ „ „ nicht umschlossen (akleista).

In der Unterabtheilung 1, b ergeben sich wiederum zwei Untergruppen: α Chlorophyllzellen breit bis sehr breit, mit dreieckigem Lumen, ohne Papillen und β Chlorophyllzellen schmal bis sehr schmal mit fast linsenförmigem und centrischem Lumen, mit Papillen.

Stellen wir nun die Gruppen und Untergruppen zusammen, sie mit den hergebrachten Namen bezeichnend, mit Aufführung der zu den betreffenden Gruppen gehörenden Arten, so ergiebt sich folgende Uebersicht.

I. Inophloea.

1. P a l u s t r i a (cymbifolia)
   a. variabilia.
      Sph. palustre L.
      subspecies:
         1. cymbifolium (Ehrh).
         2. intermedium m.
         3. medium (Limpr).
         4. papillosum (Ldbg).
   b. pectinata.
      Sph. imbricatum (Hornsch) m. (= *Sph. Austini Sulliv*).

II. Litophloea.

A. Triplagia.
   a. Endopleura.

2. A c u t i f o l i a.
   α. porosa.
      Sph. fimbriatum Wils., Girgensohnii m., Russowii Warnst.
   β. tenella.
      Sph. Warnstorfii m., tenellum Klingg., fuscum Klingg.
   γ. deltoidea (oxyphylla).
      Sph. quinquefarium (Braith) W., subnitens W. & R., auctifolium Ehrh. ex parte.

δ. sulcata.

Sph. molle Sulliv. (= *Sph. Mülleri Schimpr.*)

b. Exopleura.

3. Papillosa (squarrosa).

α. megalophylla.

Sph. squarrosum Pers., *Sph. teres Ångstr.*

β. microphylla.

Sph. Wulfianum Girg.

4. Cuspidata.

α. laciniata.

Sph. Lindbergii Schmpr.

β. erosa.

Sph. riparium Ångstr.

γ. triangularia.

Sph. cuspidatum Ehrh. ex. p.

subspecies (4—5 ?)

δ. tenerrima.

Sph. molluscum Bruch.

B. Diplagia.

a. Pericleista.

5. Rigida.

Sph. rigidum Schmpr.

b. Acleista.

6. Truncata.

Sph. Ångstroemii Hartm.

7. Cavifolia.

Sph. cavifolium Warnst.

subspecies.

heterophylla:

1. subsecundum (N. a. E.).
2. laricinum (Spruce).

hemiisophylla:

3. contortum (Schltz).
4. platyphyllum (Warnst.)

In einer kürzlich publicirten, kleinen Abhandlung [1]) habe ich sechs Gruppen unterschieden, aber zu einer dieser Gruppen, der der Truncata, bemerkt, dass die drei hier vereinigten Arten: *Sph. Mülleri*, *rigidum* und *Ångstroemii* so verschieden seien, dass man in jeder den Typus einer besonderen Gruppe erblicken dürfe; demnach stellt sich eigentlich die Zahl dieser Gruppen in jener

1) Sitzungsber. der Dorpat Naturforschergesellschaft. October-Sitzung.

Eintheilung auf a c h t heraus. *Sph. Mülleri Schmpr.* habe ich hier zu den Acutifoliis gebracht, was bereits vor mir W a r n s t o r f[2]) gethan, nicht nur wegen der Form und Lagerung der Chlorophyllzellen, sondern auch wegen Uebereinstimmung in der ganzen Configuration des Zellnetzes der Astblätter. Freilich weicht es von den übrigen Gruppengenossen in mancher Beziehung beträchtlich ab, so dass ihm eine Sonderstellung in der Acutifolium-Grunpe zukommt, doch schliesst es sich hier enger als irgend einer anderen Gruppe an. Mit Bezug auf die bekannte Randfurche der Astblätter nenne ich die Abtheilung Sulcata, ohne damit besonderes Gewicht auf diese Erscheinung legen zu wollen.

Sph. rigidum steht in mehrfacher Beziehung ganz einzig unter den Gattungsgenossen da, woher die Stellung, welche es hier gefunden wohl gerechtfertigt erscheinen möchte. Auch *Sph. Ångstroemii*, das ich leider nie lebend an seinem Standort beobachtet, scheint mir einen besonderen Gruppen-Typus zu repräsentiren, der die nächsten Verwandten in der Gruppe Cavifolia mir zu finden scheint.

Die Abgrenzung der Arten innerhalb der unterschiedenen 7 Gruppen wollen wir hier nur soweit in's Auge fassen, als sie auf rein anatomischen Merkmalen beruht. Demnach haben wir es hier nur mit drei Gruppen zu thun, den Cuspidatis, Cavifoliis und Cymbifoliis, denn in der Acutifolium- und Papillosum-Gruppe sind Form und Grösse der Stengelblätter in erster Linie maasgebend, die Rigida und Truncata sind monotypisch und fallen daher aus dieser Betrachtung heraus.

Bei den Cuspidatis sind zwei Arten, *Lindbergii* und *riparium* durch ihre Stengelblätter dermaassen characterisirt, dass sie hier nicht in Betracht kommen, *molluscum* ist durch seine Chlorophyllzellen (Fig. 29) und die Form der Astblätter leicht kenntlich. Bleibt also nur das alte *cuspidatum Ehrh.*, das neuerdings mehrfach gespalten worden und zwar auf Grundlage des anatomischen Baus der Rinde, mit Berücksichtigung der Form und Grösse der Stengelblätter, der An- und Abwesenheit von Fasern in letzteren. Den Bau der Rinde wird man nach Untersuchung genügend zahlreichen Materials keineswegs als maassgebend anerkennen können, da die Abgrenzung oder Nichtabgrenzung der Rinde gegen den Holzkörper sogar bei einem und demselben Exemplar vorkommt, ja derselbe Stengel-Querschnitt auf der einen Seite deutliche Abgrenzung, auf der entgegengesetzten Seite durchaus keine Abgrenzung der Rinde erkennen lässt. Auch in Betreff der übrigen Merkmale sind so zahlreiche Uebergangsbildungen vorhanden, dass eine Unterscheidung von *Sph. recurvum, cuspidatum, obtusum, fallax, laxifolium* etc. als A r t e n durchaus unzulässig ist, widrigenfalls uns der Begriff „A r t“, — als eine Formengruppe, die aus unter einander nach allen Richtungen verbundenen Gliedern zusammengesetzt, sich gegen eine zweite

1) Hedwigia, 1886, Heft VI. Zwei Artentypen der Sphagna aus der Acutifolium-Gruppe.

ähnliche Formengruppe s c h a r f abgrenzt, — verloren gehen und die Systematik daher in einen chaotischen Zustand gerathen muss.

In der Subsecundum - Gruppe hat man sogar nach der Zahl der Rindenschichten, ob ein oder zwei bis mehrschichtig, zwei Artengruppen unterschieden, in jeder, je nach der Häufigkeit der Fasern in den Stengelblättern, je 2 Arten aufgestellt. Meine Untersuchungen haben mir gezeigt, dass die Zahl der Rindenschichten hier durchaus schwankend ist, dass es Formen giebt, die anderthalb Rindenschichten besitzen, insofern am halben Stengelumfang die Rinde aus zwei Zelllagen besteht. Es passt natürlich solch' eine Form weder in die eine noch andere Art, oder sie kann mit demselben Recht der einen wie der anderen zugezählt werden, zumal in Bezug auf die Stengelblätter auch nach allen Beziehungen Zwischenformen vorkommen. Ich kann daher in *Sph. subsecundum, laricinum, contortum* und *platyphyllum* nur Formen einer Art sehen und dieselben höchstens als „subspecies" gelten lassen.

Was nun schliesslich die Cymbifolia betrifft, so hat man hier je nach der Lagerung und Form der Chlorophyllzellen und dem Vorhandensein von Papillen oder Kammfasern die alte Art in vier neue gespalten: *cymbifolium, medium, papillosum* und *Austini.* Von *Sph. glaucum Klingg.* und *subbicolor Hmpe.* wollen wir hier ganz absehen, da ersteres eine durch Färbung und squarrose Blattbildung ausgezeichnete Form von Cymbifolium ist, während letzteres nur eine hemiisophylle Form darstellt.

Abgesehen von den Kammfasern, (die mitunter nur sehr spärlich ausgebildet sind) ist *Sph. Austini* durch die constante Form und Lagerung der Chlorophyllzellen so ausgezeichnet, dass wir keinen Augenblick über dessen Artenwerth im Zweifel bleiben können. Dagegen finden wir bei den drei anderen Arten in Bezug auf Form und Lagerung der Chlorophyllzellen wie Ausbildung von Papillen solch' eine Variabilität, dass es schlechterdings unmöglich ist auf Grundlage genannter Merkmale Arten zu begründen. Dazu kommt, dass in Bezug auf Rindenbildung (d. h. Häufigkeit der Faserung und Perforation der Rindenzellen), Grösse, Form und Faserung der Stengelblätter keine festen Anhaltspunkte zu gewinnen sind, weil auch hier nach allen Richtungen hin Schwankungen vorkommen.

In Bezug auf Form und Stellung der Chlorophyllzellen sind die Blätter in der Cymbifolium-Gruppe in Umformung begriffen, es hat sich in dieser Beziehung noch kein stabiler Zustand herausgebildet. Man vergleiche unter einander die Figg. 55, 56 und 57; sie sind nach Querschnitten gezeichnet, die von Blättern derselben Pflanze stammen und etwa in derselben Region die Blätter getroffen. Ebenso Fig. 52 und 53, denen ich noch eine dritte hätte hinzufügen können mit durchaus centrischer Lage und linsenförmiger Gestalt der Chlorophyllzellen, von Blättern derselben Pflanze einer papillösen Form. Zeichnungen von Blattquerschnitten des *Sph. medium Limpr.* konnte ich nicht mehr auf

den Tafeln unterbringen, ich liess sie fort im Interesse anderer, da die typische Lagerung der Form der Chlorophyllzellen hier gleichkommt der in Fig. 63 dargestellten, und die Uebergangsformen den in Fig. 56 und 57 dargestellten Lagerungs- und Formverhältnissen entsprechen. Im Ganzen selten habe ich an Limprichts *medium*, bei centrischer Lage der Chlorophyllzellen, die Convexität der Hyalinzellen an beiden Blattflächen gleich gefunden; meist ist die Wölbung an der Blatt-Aussenfläche stärker, bis sehr viel stärker als an der Innenfläche und damit hängt auch die Verdickung der Membranstücke zwischen dem Lumen der Chlorophyllzellen und der Blattoberfläche zusammen. Gar oft habe ich mir beim Durchmustern der Blatt-Querschnitte einer Cymbifolium-Form am Ende die Frage stellen müssen: wohin ist wohl dieses Sphagnum zu bringen, zu *cymbifolium* oder *medium*? Der Mehrheit der Querschnittsansichten nach entscheide ich mich für *medium*. Nach einiger Zeit habe ich dieselbe Pflanze nochmals untersucht und habe mich dann veranlasst gesehen mich für *cymbifolium* zu entscheiden! Ich denke, da hört jede Artunterscheidung auf.

Dasselbe gilt von den Papillen. Hat man Blätter mit stark ausgeprägten Papillen vor Augen, so möchte man nicht einen Augenblick anstehen, hierin ein treffliches Art-Unterscheidungsmerkmal zu erblicken. Wenn man aber auf Formen stösst, die nur hie und da in der unteren Blatthälfte spärlich gesäete Papillen aufweisen oder die Papillen so klein werden, dass man zweifelhaft bleibt ob man es noch überhaupt mit Papillen zu thun hat, so steht es, wird wohl jeder Unbefangene gestehen, gar misslich mit der Artunterscheidung. Wollte man ferner der Lagerung und Form der Chlorophyllzellen specifischen Werth zuerkennen, so müsste man das *Sph. papillosum Lindbg.* wiederum in zwei Arten spalten, denn es kommen hier rein centrische, linsenförmige und gestrecktdreieckige, an der Blattinnenfläche befindliche Chlorophyllzellen vor; daher erklären sich auch die bei verschiedenen Autoren sich widersprechenden Angaben in Bezug auf die Lagerungs- und Formverhältnisse der Chlorophyllzellen bei *Sph. papillosum*. Man müsste nach demselben Princip auch innerhalb der Squarrosa die nicht papillösen Formen (solche kommen vor) von den papillösen trennen.

Alles in Allem kommen wir, wenn es sich um die Beurtheilung verwandtschaftlicher Verhältnisse handelt, in Bezug auf den anatomischen Bau, ebenso wie in Bezug auf äussere Gliederung, zu dem Schluss, dass wir hier wie dort morphologische und physiologische Dignität wohl zu unterscheiden haben, wollen wir uns nicht grober Missgriffe schuldig machen.

Erklärung der Abbildungen.

Sämmtliche Figuren sind mit Hülfe der Camera lucida nach Nachet gezeichnet worden. Fig. 2 und 9 sind mit Objectiv V und Ocular O von Seibert, alle übrigen Figuren mit Objectiv VII (Immersion) und Ocular O von Seibert aufgenommen worden.

Taf. I.

Fig. 1. Einige Hyalin- und Chlorophyllzellen aus dem oberen Drittel eines Blattes abstehender Aeste von *Sph. fuscum Klingg*, bei mittlerer Einstellung auf die Hyalinzellen. Cl. Chlorophyllkörner; a gefurchteter Innenrand der Ringplatte; b Furche in der Aufsicht; p ein umwalltes Loch.

Fig. 2. Stück des Zellnetzes aus der oberen Blatthälfte (abst. Aeste) von *Sph. Warnstorfii m.* von der Aussenfläche gesehen.

Fig. 3. Stück einer Hyalinzelle von *Sph. rigidum Schmpr.* in der Aufsicht; die punktirten Linien deuten die Ausdehnung und den Verlauf der, ausserhalb des Focus liegenden, Chlorophyllzellen an. a Wulst des Meniscusrandes im optischen Querschnitt; p Porus; q Queranastomosen der Fasern.

Fig. 4. Stücke dreier Hyalinzellen von *Sph. aculeatum Warnst.* Bedeutung der Buchstaben wie in voriger Figur.

Fig. 5. Parallel zur Oberfläche (längs-)durchschnittene Hyalin- und Chlorophyllzellen von *Sph. Warnstorfii m.*

Fig. 6. Stück einer Hyalinzelle von *Sph. imbricatum (Hornsch.) m.* die „Kammfasern" KF. zeigend in der Ausdehnung der Chlorophyllzellen, deren nach oben gerichtete Kante dem Beschauer zugekehrt ist.

Fig. 7. Stück eines Querschnitts durch das Blatt von *Sph. Russowii W.*, in der oberen Hälfte des Blattes. Bei a abgeschnittener Rand der Ringplatte.

Fig. 8. Stück einer Hyalinzelle mit Chlorophyllzellen aus dem Blatte von *Sph. cyclophyllum F. L.* Bedeutung der Buchstaben wie in Fig. 3 u. 4.

Fig. 9. Stück des Zellnetzes aus dem unteren Theil eines Stengelblattes von *Sph. teres Angstr.* die Querfältchen, F, zeigend.

Taf. II.

Der Kürze halber bediene ich mich im Folgenden einiger Abkürzungen. A Blatt bedeutet Blatt eines abstehenden Astes. H Blatt das eines herabhängenden Astes. O $^1/_3$ oberes Drittel; O $^1/_2$ obere Hälfte; U $^1/_2$ untere Hälfte des betreffenden Blattes. Bis auf Fig. 16 und 35 stellen alle übrigen Stücke von Querschnitten durch Blätter dar.

Fig. 10. *Sph. Warnstorfii m.* A Blatt, O $^1/_3$. a gespreizter Wulst der Ringplatte Rp, b mittlerer ringförmiger Vorsprung der Lochwandung.

Fig. 11. *Sph. Russowii W.* A Blatt, O $^1/_3$.
Fig. 12. *Sph Girgensohnii m.* A Blatt O $^1/_3$.
Fig. 13. *Sph. fimbriatum Wils.* A Blatt, U $^1/_2$, bei a abgeschnittene Ränder der Ringplatte.
Fig. 14. *Sph. Girgensohnii m.* A Blatt, U $^1/_2$.
Fig. 15. *Sph. Warnstorfii m.* A Blatt, U $^1/_2$. Hyalinzellen von der Mitte zum Rande beträchtlich an Grösse zunehmend.
Fig. 16. *Sph. Girgensohnii m.* Stück des Zellgewebes aus der oberen Hälfte eines Stengelblattes. Pf. Pseudofasern; bei F eine wirkliche Faser auf der Pseudofaser.
Fig. 17. *Sph. subnitens W. & R.* A Blatt nicht weit unterhalb der Spitze getroffen.
Fig. 18. *Sph. quinquefarium (Braith) W.* A Blatt, O $^1/_3$.
Fig. 19. *Sph. acutifolium Ehrh.* A Blatt, O $^1/_2$.
Fig. 20. *Sph. subnitens*, A Blatt, U $^1/_2$.
Fig. 21. *Sph. Mülleri Schmpr.* A Blatt. O $^1/_2$.

Taf. III.

Fig. 22. *Sph. riparium Ångstr.* A Blatt, O $^1/_3$.
Fig. 23. " A Blatt, O $^1/_2$.
Fig. 24. " H Blatt, U $^1/_2$.
Fig. 25. *Sph. cuspidatum Ehrh. v. mollissimum m.* A Blatt, O $^1/_2$.
Fig. 26. *Sph. cuspidatum Ehrh.*, grosse Wasserform. A Blatt O $^1/_2$.
Fig. 27. *Sph. riparium*, A Blatt, O $^1/_2$.
Fig. 28. *Sph. recurvum P. d. B.* A Blatt, Mitte.
Fig. 29. *Sph. molluscum Bruch.* A Blatt, Mitte.
Fig. 30. *Sph. Lindbergii Schmpr.* A Blatt, O $^1/_2$.
Fig. 31. *Sph. subsecundum v. contortum*, A Blatt, O $^1/_2$.
Fig. 32. *Sph. cribrosum Lindbg.* A Blatt, U $^1/_2$.
Fig. 33. *Sph. Pylaiei Brid.* A Blatt, U $^1/_2$.
Fig. 34. " A Blatt, O $^1/_3$.
Fig. 35. " Hyalinzelle in der Aufsicht. F. Falten in der Membran. Clz. Chlorophyllzelle.

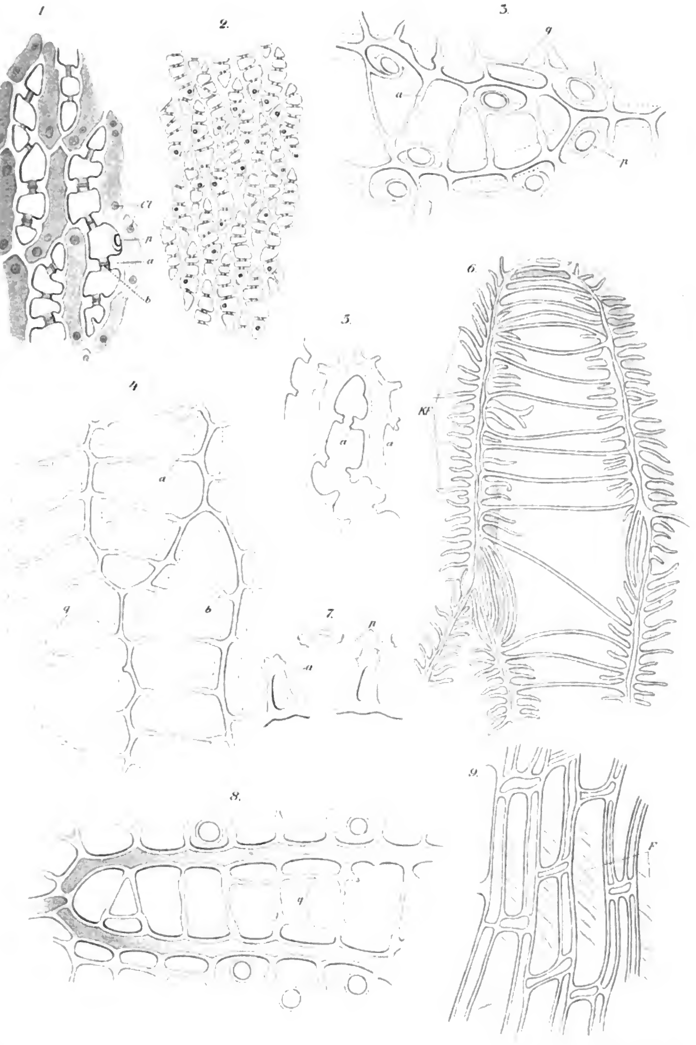
Taf. IV.

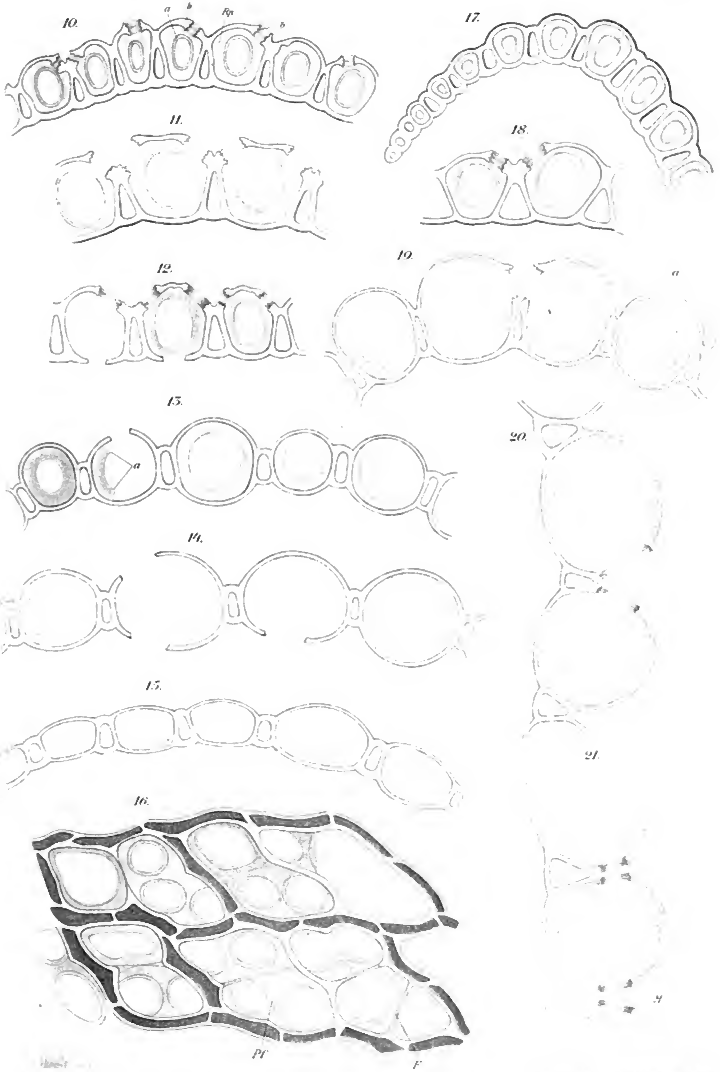
Fig. 36. *Sph. squarrosum Pers.* A Blatt, O $^1/_3$.
Fig. 37. " " O $^1/_2$.
Fig. 38. " " U $^1/_2$.
Fig. 39. *Sph. teres Ångstr.* " U $^1/_2$.
Fig. 40. " " O $^1/_2$.
Fig. 41. " " O $^1/_3$.
Fig. 42. *Sph. Wulfianum Girg.* A Blatt, O $^1/_3$.
Fig. 43. " " O $^1/_3$.
Fig. 44. " " O $^1/_2$.
Fig. 45. " " U $^1/_2$.
Fig. 46. " H Blatt U $^1/_2$.
Fig. 47. " A Blatt, U $^1/_2$

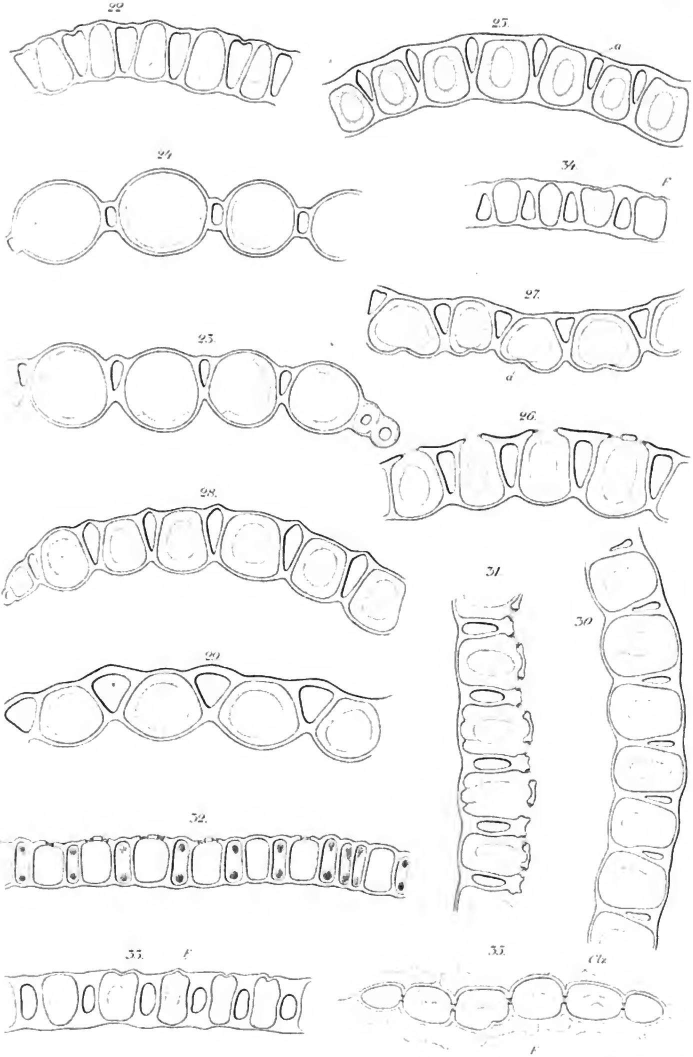
Fig. 48. *Sph. Ångstroemii Hartm.* A. Blatt, O 1/3.
Eig. 49. " " U 1/2.
Fig. 50. " " U 1/2.
Fig. 51. " " O 1/2.

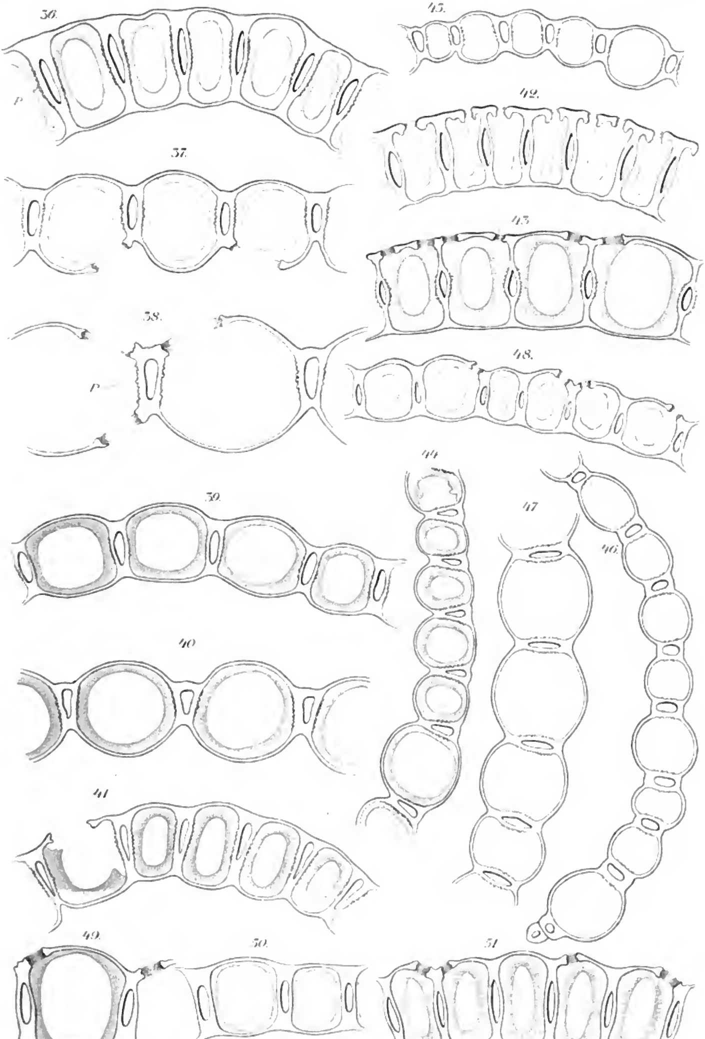
Taf. V.

Fig. 52 u. 53. *Sph. papillosum Lindbg.* A Blatt, U 1/2.
Fig. 54. *Simbricatum (Hornsch) m.* A Blatt, U 1/2.
Fig. 55—57. *Sph. cymbifolium Ehrh.* A Blatt, Mitte.
Fig. 58. *Sph. rigidum Schmpr.* A Blatt, Mitte.
Fig. 59. " H Blatt, U 1/2.
Fig. 60 u. 61. " A Blatt, Mitte.
Fig. 62. *Sph. cyclophyllum S. L.* A Blatt, U 1/2.
Fig. 63. *Sph. aculeatum Wernst.* A Blatt, Mitte.

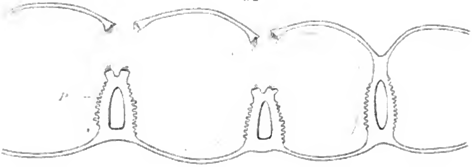

1
2.
3.
4
5.
6.
7.
8.
9.
a
p
b
q
KF
F


10.
a
b
Rp
11.
12.
13.
a
14.
15.
16.
Pf
F
17.
18.
19.
a
20.
21.

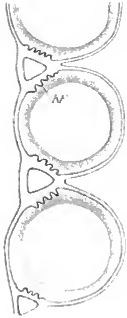

22.
23.
a
24.
34.
F
27.
d
25.
26.
28.
31.
30.
29.
32.
33.
F
35.
Clz
F


36.
45.
42.
37.
43.
38.
48.
44.
47.
46.
39.
40.
41.
49.
50.
51.

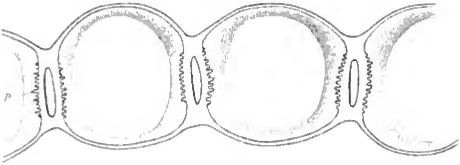
52.



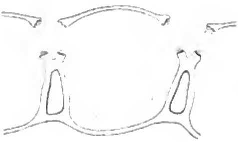
54.



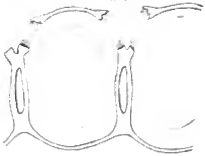
53.



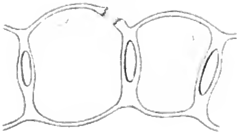
55.



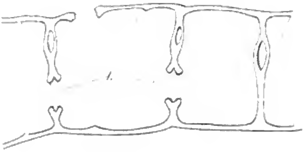
56.



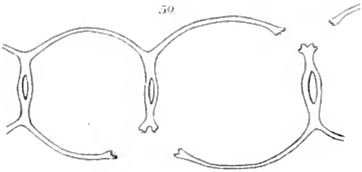
57.



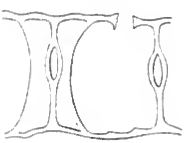
58.



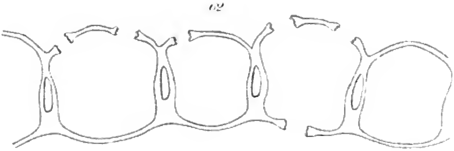
59.



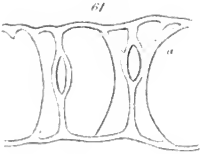
60.



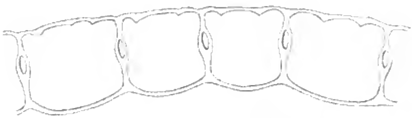
62.



61.



63.



Schriften
herausgegeben von der Naturforscher-Gesellschaft
bei der Universität Dorpat.
IV.

Neue Untersuchungen

über die

Bessel'sche Formel und deren Verwendung in der Meteorologie

von

Dr. **Karl Weihrauch**,
ord. Professor der physikalischen Geographie an der Universität Dorpat.

Dorpat.

Druck von C. Mattiesen.

1888.

In Commission bei

K. F. Koehler in Leipzig, Th. Hoppe und E. J. Karow in Dorpat.

Schriften
herausgegeben von der Naturforscher-Gesellschaft
bei der Universität Dorpat.
IV.

Neue Untersuchungen

über die

Bessel'sche Formel und deren Verwendung in der Meteorologie

von

Dr. **Karl Weihrauch**,
ord. Professor der physikalischen Geographie an der Universität Dorpat.

Dorpat.
Druck von C. Mattiesen.
1888.
In Commission bei
K. F. Koehler in Leipzig, Th. Hoppe und E. J. Karow in Dorpat.

Дозволено цензурою. — Дерптъ, 18. Марта 1888 г.

Der

Finländischen Gesellschaft der Wissenschaften

zur Feier

Ihres fünfzigjährigen Bestehens

am 29. April 1888

dargebracht

von der

Naturforscher-Gesellschaft

bei der Universität Dorpat.

Erster Theil.

Ueber die bei der Bessel'schen Formel auftretenden Gleichungssysteme.

Periodische Erscheinungen, wie sie unter anderem in der Meteorologie vorkommen, können immer durch eine Reihe von folgender Gestalt dargestellt werden:

$$y = \Sigma\, u_m \sin\left(U_m + \frac{2\pi m}{K} x\right) \qquad 1)$$

Hier ist y die zur Phase x gehörende Amplitude, wo x in Theilen der Periode K auszudrücken ist, die u_m sind Konstanten von derselben Einheit, wie die Amplituden, die U_m dagegen Angularkonstanten, und für m sind ganz beliebige ganze Zahlen zu setzen.

Es wird nun im zweiten Theil gezeigt werden, dass bei allen meteorologischen Fragen, wenn n Beobachtungen zu Grunde gelegt werden, man gezwungen ist die Gleichung 1) in folgender Form aufzustellen

1) für $n = 2\nu + 1$

$$y = u_0 + \sum_{m=1}^{m=\nu} u_m \sin\left(U_m + \frac{2\pi m}{K} x\right) \qquad 2)$$

2) für $n = 2\nu$

$$y = u_0 + \sum_{m=1}^{m=\nu-1} u_m \sin\left(U_m + \frac{2\pi m}{K} x\right) + u_\nu \sin\left(U_\nu + \frac{2\pi\nu}{K} x\right) \qquad 3)$$

mit der Bedingung, dass U_ν gleich der negativen halben Summe aller gegebener 2ν, auf Bogen reducirter Phasen gesetzt werde.

Führt man, wie gebräulich, die neuen Grössen ein

$$\left.\begin{aligned} p_m &= u_m \sin U_m \\ q_m &= u_m \cos U_m\,, \end{aligned}\right\} \qquad 4)$$

so lautet die Formel

1) für $n = 2\nu + 1$

$$y = u_0 + \sum_{m=1}^{m=\nu} \left(p_m \cos \frac{2\pi m}{K} x + q_m \sin \frac{2\pi m}{K} x\right)$$

2) für $n = 2\nu$

$$y = u_0 + \sum_{m=1}^{m=\nu-1} \left(p_m \cos \frac{2\pi m}{K} x + q_m \sin \frac{2\pi m}{K} x\right) + u_\nu \sin\left(U_\nu + \frac{2\pi\nu}{K} x\right) \qquad 5)$$

Es mögen die n gegebenen Amplituden durch $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, die dazu gehörenden Phasen durch $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ bezeichnet werden. Setzt man noch

$$\frac{2\pi}{K} \xi_h = x_h \qquad 6)$$

so hat man folgende Gleichungssysteme:

1) $n = 2\nu + 1$

$$\alpha_h = u_0 + \sum_{m=1}^{m=\nu} (p_m \cos m x_h + q_m \sin m x_h) \qquad 7)$$

$$h = 1, 2, \ldots (2\nu + 1)$$

d. h. $2\nu + 1$ Gleichungen für die $2\nu + 1$ Unbekannten $u_0, p_1 \ldots p_\nu, q_1 \ldots q_\nu$.

2) $n = 2\nu$

$$\alpha_h = u_0 + \sum_{m=1}^{m=\nu-1} (p_m \cos m x_h + q_m \sin m x_h) + u_\nu \sin(U_\nu + \nu x_h) \qquad 8)$$

$$h = 1, 2, \ldots (2\nu)$$

d. h. 2ν Gleichungen für die 2ν Unbekannten $u_0, p_1, \ldots p_{\nu-1}, q_1, \ldots q_{\nu-1}, u_\nu$ und mit der obigen Bedingung

$$U_\nu = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=2\nu} x_k \qquad 9)$$

Für den Fall aequidistanter Phasen hat bekanntlich Bessel[1]) die Ermittelung der Konstanten in höchst einfacher und eleganter Weise gelehrt, weshalb die Ausdrücke 2) und 3) gewöhnlich als Bessel'sche Formel bezeichnet werden. Hier soll nun diese Ermittelung bei beliebig in der Periode vertheilten Phasen vorgenommen werden. Dabei ergibt sich, dass die Systeme 7) und 8) eine getrennte Behandlung fordern.

---

1) Astronom. Nachrichten Nr. 136, Bd. 6, S. 333.

I. $n = 2\nu + 1$.

Die Auflösung des Systems 7)

$$a_h = u_0 + \sum_{m=1}^{m=\nu} (p_m \cos m x_h + q_m \sin m x_h) \qquad 9a)$$

$$h = 1,\ 2, \ldots (2\nu + 1)$$

ist vollzogen, sobald die Determinante desselben und die ersten Unterdeterminanten allgemein bestimmt sind. Für die Determinante $D_{2\nu+1}$ des Systems hat man

$$D_{2\nu+1} = \left| \begin{matrix} 1,\ \cos x_m,\ \sin x_m,\ \cos 2x_m,\ \sin 2x_m \ldots \cos \nu x_m,\ \sin \nu x_m \\ m = 1,\ 2, \ldots (2\nu + 1) \end{matrix} \right| \qquad 10)$$

Es werde für $i = \sqrt{-1}$ gesetzt

$$e^{ix_m} = a_m \qquad 11)$$

Zuerst addire man in $D_{2\nu+1}$ die mit i multiplicirte 3te, 5te, ... $(2\nu + 1)$te Kolonne entsprechend zur 2ten, 4ten, ... 2νten; dann stehen in letzteren die Werthe $a_m,\ a_m^2, \ldots a_m^\nu$. In der so transformirten Determinante multiplicire man die 3te, 5te, ... $(2\nu + 1)$te Kolonne mit $-2i$, wodurch der Faktor $(-2i)^\nu$ eingefürt wird, und addire dazu die Elemente der 2ten, 4ten, ... 2νten Kolonne. Dadurch gehn die Elemente jener Kolonnen über in $a_m^{-1},\ a_m^{-2}, \ldots a_m^{-\nu}$, und man erhält

$$D_{2\nu+1} = \frac{(-1)^\nu}{(2i)^\nu} \left| \begin{matrix} 1,\ a_m,\ a_m^{-1},\ a_m^2,\ a_m^{-2}, \ldots a_m^\nu,\ a_m^{-\nu} \\ m = 1,\ 2, \ldots (2\nu + 1) \end{matrix} \right| \qquad 12)$$

Durch Multiplikation der einzelnen Zeilen mit a_m^ν entsteht hieraus

$$D_{2\nu+1} = \frac{(-1)^\nu}{(2i)^\nu (a_1 a_2 \ldots a_{2\nu+1})^\nu} \left| \begin{matrix} a_m^\nu,\ a_m^{\nu+1},\ a_m^{\nu-1}, \ldots a_m^{2\nu},\ a_m^0 \\ m = 1,\ 2, \ldots (2\nu + 1) \end{matrix} \right| \qquad 13)$$

Man kann nun leicht zeigen, dass die Anzahl der Inversionen in der Permutation

$$\nu,\ \nu + 1,\ \nu - 1,\ \nu + 2,\ \nu - 2, \ldots 2\nu,\ 0$$

der Elemente $0, 1, 2 \ldots (2\nu)$ eine gerade, nämlich $\nu(\nu + 1)$, ist. Setzt man ferner

$$\sum_{m=1}^{m=2\nu+1} x_m = \sigma \qquad 14)$$

so erhält man mit Rücksicht auf 11)

$$D_{2\nu+1} = \frac{(-1)^\nu}{(2i)^\nu e^{i\nu\sigma}} \begin{vmatrix} 1, & a_m, & a_m^2, \ldots & a_m^{2\nu} \\ m = 1, 2, \ldots (2\nu+1) \end{vmatrix} \qquad 15)$$

Die hier auftretende Determinante ist bekanntlich das Produkt aller Differenzen von je zweien der Grössen $a_1, a_2, \ldots a_{2\nu+1}$, wenn immer die Grösse mit dem kleineren Index als Subtrahend genommen wird, d. h.

$$D_{2\nu+1} = \frac{(-1)^\nu}{(2i)^\nu e^{i\nu\sigma}} \cdot \Delta_{2\nu+1} \qquad 16)$$

wo

$$\Delta_{2\nu+1} = \prod_{h=1}^{h=2\nu} \prod_{m=h+1}^{m=2\nu+1} (a_m - a_h) = \Delta(a_1, a_2, \ldots a_{2\nu+1}) \qquad 16a)$$

Aus 11) folgt

$$a_m - a_h = 2i \sin \frac{x_m - x_h}{2} \cdot e^{\frac{i}{2}(x_h + x_m)} \qquad 17)$$

Es werde nun

$$\prod_{h=1}^{h=2\nu} \prod_{m=h+1}^{m=2\nu+1} \sin \frac{x_m - x_h}{2} = P_{2\nu+1} \qquad 18)$$

gesetzt, d. h. es ist $P_{2\nu+1}$ das Produkt der Sinus aller halben Differenzen zwischen je zweien der Grössen $x_1, x_2, \ldots x_{2\nu+1}$, wenn die Grösse mit kleinerem Index immer als Subtrahend verwendet wird. Berücksichtigt man, dass $\Delta_{2\nu+1}$ genau $\nu(2\nu+1)$ Faktoren besitzt, so geht mit Zuziehung von 17) und 18) die Gleichung 16) nach einfachen Reduktionen über in

$$D_{2\nu+1} = \frac{4^{\nu^2}}{e^{i\nu\sigma}} \cdot P_{2\nu+1} \cdot e^{\frac{i}{2} \sum_{h=1}^{h=2\nu} \sum_{m=h+1}^{m=2\nu+1} (x_h + x_m)} \qquad 19)$$

In der exponentiellen Doppelsumme kommt jedes Argument 2ν mal vor, d. h. der Exponent wird $i\nu\sigma$, und hiermit ergibt sich endlich

$$D_{2\nu+1} = 4^{\nu^2} \cdot P_{2\nu+1} \qquad 20)$$

Unterdrückt man in $D_{2\nu+1}$ die erste Kolonne und die l^{te} Zeile, so bleibt eine Determinante $2\nu^{ter}$ Ordnung übrig, die durch $c_{o,l}$ bezeichnet werden mag. Aus 9a) folgt sofort

$$u_o \,.\, D_{2\nu+1} = \left| \begin{matrix} a_m\,, \ \cos x_m\,, \ \sin x_m\,, \ldots \cos \nu x_m\,, \ \sin \nu x_m \\ m = 1,\ 2, \ldots (2\nu + 1) \end{matrix} \right| \qquad 21)$$

oder

$$u_o \,.\, D_{2\nu+1} = \sum_{h=1}^{h=2\nu+1} (-1)^{h-1} a_h \, c_{o,h} \qquad 22)$$

Ich werde nur $c_{o,1}$ direkt ableiten, da die übrigen Werthe sich dann nach Analogie bilden lassen. Man hat

$$c_{o,1} = \left| \begin{matrix} \cos x_m\,, \ \sin x_m\,, \ \cos 2x_m\,, \ \sin 2x_m\,, \ldots \cos \nu x_m\,, \ \sin \nu x_m \\ m = 2,\ 3, \ldots (2\nu + 1) \end{matrix} \right| \qquad 23)$$

Transformirt man hier ebenso, wie es bei der Ueberführung von 10) in 13) geschah, so erhält man

$$c_{o,1} = \frac{(-1)^\nu}{(2i)^\nu \, e^{i\nu\sigma_1}} \left| \begin{matrix} a_m^{\nu+1}\,, \ a_m^{\nu-1}\,, \ a_m^{\nu+2}\,, \ a_m^{\nu-2}\,, \ldots a_m^{2\nu}\,, \ a_m^{o} \\ m = 2,\ 3, \ldots (2\nu + 1) \end{matrix} \right| \qquad 24)$$

wo

$$\sigma_1 = \sigma - x_1 \qquad 25)$$

ist. Die Permutation $\nu + 1,\ \nu - 1,\ \nu + 2,\ \nu - 2, \ldots 2\nu,\ o$ der Elemente

$$o,\ 1, \ldots (\nu - 1),\ (\nu + 1), \ldots 2\nu,$$

worin also ν fehlt, enthält ν^2 Inversionen, d. h.

$$c_{o,1} = \frac{1}{(2i)^\nu \, e^{i\nu\sigma_1}} \left| \begin{matrix} 1\,, \ a_m\,, \ a_m^{2}\,, \ldots a_m^{\nu-1}\,, \ a_m^{\nu+1}\,, \ldots a_m^{2\nu} \\ m = 2,\ 3, \ldots (2\nu + 1) \end{matrix} \right| \qquad 26)$$

Man erkennt in der hier auftretenden Determinante den mit $(-1)^\nu$ multiplicirten Koeffizienten von $a_1^{\,\nu}$ in der Determinante $\varDelta_{(2\nu+1)}$. Nun ist

$$\varDelta_{2\nu+1} = \varDelta\,(a_1,\ a_2, \ldots a_{2\nu+1}) = \varDelta\,(a_2,\ a_3, \ldots a_{2\nu+1}) \,.\, \prod_{m=2}^{m=2\nu+1} (a_m - a_1) \qquad 27)$$

Bezeichnet man durch $\Sigma K_{p,1}$ die Summe aller als Produkte aufgefasster Kombinationen der Elemente $a_2,\ a_3, \ldots a_{2\nu+1}$ zur p^{ten} Klasse, so liefert die Entwickelung des Produkts in 27)

$$\varDelta_{2\nu+1} = \varDelta\,(a_2,\ a_3, \ldots a_{2\nu+1}) \,.\, \sum_{p=o}^{p=2\nu} (-1)^p \, a_1^{\,2\nu-p} \Sigma K_{p,1} \qquad 28)$$

Da der Koeffizient von a_1^{ν} gesucht wird, ist $p = \nu$ zu setzen, und man erhält dann

$$c_{o,1} = \frac{\Delta (a_2, a_3, \ldots a_{2\nu+1}) \cdot \Sigma K_{\nu,1}}{(2i)^{\nu} e^{i\nu\sigma_1}} \tag{29}$$

Zufolge der Bedeutung von a_m lässt sich $K_{\nu,1}$ ersetzen durch $e^{i\gamma_{\nu,1}}$, wo $\gamma_{\nu,1}$ eine als Summe ihrer Bestandtheile aufzufassende Kombination der Grössen $x_2, x_3, \ldots x_{2\nu+1}$ zur ν^{ten} Klasse darstellt.

Wird das analog der Grösse $P_{2\nu+1}$ gebildete Produkt der Sinus aller halben Differenzen zwischen je zwei der Grössen $x_2, x_3, \ldots x_{2\nu+1}$ durch $P_{2\nu+1,1}$ bezeichnet, und berücksichtigt man, dass hierin $\nu(2\nu - 1)$ Faktoren stecken, und dass jede Grösse x_m in $2\nu - 1$ Faktoren vorkommt, so hat man entsprechend 17) und 18)

$$\Delta (a_2, a_3, \ldots a_{2\nu+1}) = (2i)^{\nu(2\nu-1)} \cdot P_{2\nu+1,1} \cdot e^{\frac{i}{2}(2\nu-1)\sigma_1} \tag{30}$$

Hierdurch geht 29) über in

$$c_{o,1} = 4^{\nu(\nu-1)} \cdot P_{2\nu+1,1} \cdot e^{-\frac{i\sigma_1}{2}} \cdot \Sigma e^{i\gamma_{\nu,1}} \tag{31}$$

Verwandelt man die exponentiellen Ausdrücke in goniometrische, so erhält man

$$c_{o,1} = 4^{\nu(\nu-1)} \cdot P_{2\nu+1,1} \cdot \left(\Sigma \cos\left(\gamma_{\nu,1} - \frac{1}{2}\sigma_1\right) - i\,\Sigma \sin\left(\gamma_{\nu,1} - \frac{1}{2}\sigma_1\right)\right) \tag{32}$$

Nun hat $\gamma_{\nu,1}$ immer ν Summanden, und wegen des Werthes von σ_1 erkennt man leicht, wie jeder Kombination $\gamma_{\nu,1}$ eine andere $\gamma'_{\nu,1}$ zugeordnet werden kann, derart, dass

$$\sin\left(\gamma_{\nu,1} - \frac{1}{2}\sigma_1\right) = -\sin\left(\gamma'_{\nu,1} - \frac{1}{2}\sigma_1\right) \tag{33}$$

wird. Der imaginäre Bestandtheil in 32) verschwindet also identisch, und es wird

$$c_{o,1} = 4^{\nu(\nu-1)} \cdot P_{2\nu+1,1} \cdot \Sigma \cos\left(\gamma_{\nu,1} - \frac{1}{2}\sigma_1\right) \tag{34}$$

Allgemein ergibt sich daher folgendes. Es sei $P_{2\nu+1,h}$ das Produkt der Sinus aller halben Differenzen der Grössen $x_1, x_2, \ldots x_{2\nu+1}$ unter Ausschluss von x_h, wenn immer die Grösse mit kleinerem Index als Subtrahend genommen wird. Es sei ferner, immer mit Ausschluss von x_h, die Summe aller Grössen $x_1, x_2, \ldots x_{2\nu+1}$ gleich σ_h, und $\gamma_{\nu,h}$ eine als Summe ihrer Bestandtheile aufgefasste Kombination dieser Grössenreihe zur ν^{ten} Klasse.

Dann wird

$$c_{o,h} = 4^{\nu(\nu-1)} \cdot P_{2\nu+1,h} \cdot \Sigma \cos\left(\gamma_{\nu,h} - \frac{1}{2}\sigma_h\right) \qquad 35)$$

Das Summenzeichen bedeutet, dass man alle möglichen Kombinationen $\gamma_{\nu,h}$ bilden solle.

Ich führe endlich das Produkt der Sinus der halben Differenzen ein, in welchen $x_1, x_2, \ldots x_{h-1}, x_{h+1}, \ldots x_{2\nu+1}$ als Minuenden und x_h immer als Subtrahend genommen wird, und bezeichne dies Produkt durch $R_h^{(2\nu+1)}$, so dass

$$R_h^{(2\nu+1)} = \prod_{m=1}^{m=h-1} \sin\frac{x_m - x_h}{2} \cdot \prod_{m=h+1}^{m=2\nu+1} \sin\frac{x_m - x_h}{2} \qquad 36)$$

ist. Man ermittelt dann sehr leicht, dass

$$P_{2\nu+1} = (-1)^{h-1} \cdot P_{2\nu+1,h} \cdot R_h^{(2\nu+1)} \qquad 37)$$

Aus der Zusammenstellung der Gleichungen 20), 22), 35) und 37) erhält man dann schliesslich

$$u_o = \frac{1}{4^\nu} \sum_{h=1}^{h=2\nu+1} \frac{a_h \, \Sigma \cos\left(\gamma_{\nu,h} - \frac{1}{2}\sigma_h\right)}{R_h^{(2\nu+1)}} \qquad 38)$$

Unterdrückt man in $D_{2\nu+1}$ die $(2k)^{te}$ Kolonne und die h^{te} Zeile, so bleibt eine Determinante $(2\nu)^{ter}$ Ordnung übrig, die ich durch $c_{k,h}$ bezeichnen will. Wird dagegen die $(2k+1)^{te}$ Kolonne und die h^{te} Zeile gestrichen, so mag die restirende Determinante $(2\nu)^{ter}$ Ordnung $s_{k,h}$ heissen. Man hat dann bekanntlich aus 9a) sofort

$$\left.\begin{aligned} p_k \cdot D_{2\nu+1} &= \sum_{h=1}^{h=2\nu+1} (-1)^h \, a_h \, c_{k,h} \\ q_k \cdot D_{2\nu+1} &= \sum_{h=1}^{h=2\nu+1} (-1)^{h-1} a_h \, s_{k,h} \\ k &= 1, 2, \ldots \nu \end{aligned}\right\} \qquad 39)$$

Ich will nur die beiden Determinanten

$$c_{k,1} = \qquad 40)$$

$$\left| 1, \cos x_m, \sin x_m, \ldots \cos(k-1)x_m, \sin(k-1)x_m, \sin kx_m, \cos(k+1)x_m, \sin(k+1)x_m, \ldots \cos\nu x_m, \sin\nu x_m \right|$$

$$s_{k,1} = \qquad 41)$$

$$\left| \begin{matrix} 1, \cos x_m, \sin x_m, \ldots \cos(k-1)x_m, \sin(k-1)x_m, \cos kx_m, \cos(k+1)x_m, \sin(k+1)x_m, \ldots \cos\nu x_m, \sin\nu x_m \\ m = 2, 3, \ldots (2\nu+1) \end{matrix} \right|$$

behandeln, da die übrigen sich nach Analogie bilden lassen. Man hat sofort

$$s_{k,1} + i\,c_{k,1} = \qquad 42)$$

$$\left| 1, \cos x_m, \sin x_m, .. \cos(k-1)x_m, \sin(k-1)x_m, a_m^k, \cos(k+1)x_m, \sin(k+1)x_m, .. \cos \nu x_m, \sin \nu x_m \atop m = 2, 3, \ldots (2\nu+1) \right|$$

Transformirt man diese Determinante in derselben Weise, wie $D_{2\nu+1}$ und $c_{o,1}$ behandelt wurden, wobei zu bemerken ist, dass die Zahl der Inversionen gleich $\nu^2 - k$ wird, so entsteht

$$s_{k,1} + i\,c_{k,1} = \frac{(-1)^{k+1}}{(2\,i)^{\nu-1}\,e^{i\nu\sigma_1}} \left| 1, \; a_m, \; a_m^2, \ldots a_m^{\nu-k-1}, \; a_m^{\nu-k+1}, \ldots a_m^{2\nu} \atop m = 2, 3, \ldots (2\nu+1) \right| \qquad 43)$$

In dieser Determinante erkennt man den mit $(-1)^{\nu-k}$ multiplicirten Koefficienten von $a_1^{\nu-k}$ in $\Delta_{2\nu+1}$, der sich aus 28) für $p = \nu + k$ bestimmen lässt. Man findet leicht

$$s_{k,1} + i\,c_{k,1} = \frac{(-1)^{k+1} \,.\, \Delta(a_2, a_3, \ldots a_{2\nu+1}) \,.\, \Sigma K_{\nu+k,1}}{(2\,i)^{\nu-1} \,.\, e^{i\nu\sigma_1}} \qquad 44)$$

Ersetzt man hier wieder $K_{\nu+k,1}$ durch $e^{i\gamma_{\nu+k,1}}$, benützt 30) und verwandelt die exponentiellen Ausdrücke in goniometrische, so erscheint nach einfachen Reduktionen:

$$s_{k,1} + i\,c_{k,1} = (-1)^{k+1} \,.\, 2 \,.\, 4^{\nu(\nu-1)} \,.\, P_{2\nu+1,1} \,.\, \left(-\Sigma \sin(\gamma_{\nu+k,1} - \tfrac{1}{2}\sigma_1) + i\,\Sigma \cos(\gamma_{\nu+k,1} - \tfrac{1}{2}\sigma_1)\right) \qquad 45)$$

Allgemein erhält man daher, wenn $P_{2\nu+1,h}$ und σ_h die früher angegebene Bedeutung haben, und wenn unter $\gamma_{\nu+k,h}$ eine als Summe ihrer Bestandtheile aufzufassende Kombination $(\nu+k)^{\text{ter}}$ Klasse aus der Reihe $x_1, x_2, \ldots x_{2\nu+1}$ unter Ausschluss von x_h ist, während das Summenzeichen die Bildung aller möglichen derartigen Kombinationen verlangt,

$$s_{k,h} + i\,c_{k,h} = (-1)^{k+1} \,.\, 2 \,.\, 4^{\nu(\nu-1)} \,.\, P_{2\nu+1,h} \,.\, \left(-\Sigma \sin(\gamma_{\nu+k,h} - \tfrac{1}{2}\sigma_h) + i\,\Sigma \cos(\gamma_{\nu+k,h} - \tfrac{1}{2}\sigma_h)\right) \qquad 46)$$

und daraus folgt

$$\left.\begin{aligned} c_{k,h} &= (-1)^{k+1} \,.\, 2 \,.\, 4^{\nu(\nu-1)} \,.\, P_{2\nu+1,h} \,.\, \Sigma \cos\left(\gamma_{\nu+k,h} - \tfrac{1}{2}\sigma_h\right) \\ s_{k,h} &= (-1)^{k} \,.\, 2 \,.\, 4^{\nu(\nu-1)} \,.\, P_{2\nu+1,h} \,.\, \Sigma \sin\left(\gamma_{\nu+k,h} - \tfrac{1}{2}\sigma_h\right) \end{aligned}\right\} \qquad 47)$$

Die Gleichungen 39) liefern dann unter Zuziehung von 20) und 37) als Endresultat

$$\left.\begin{aligned} p_k &= (-1)^k \cdot \frac{2}{4^\nu} \cdot \sum_{h=1}^{h=2\nu+1} \frac{\alpha_h \, \Sigma \cos\left(\gamma_{\nu+k,h} - \frac{1}{2}\sigma_h\right)}{R_h^{(2\nu+1)}} \\ q_k &= (-1)^k \cdot \frac{2}{4^\nu} \cdot \sum_{h=1}^{h=2\nu+1} \frac{\alpha_h \, \Sigma \sin\left(\gamma_{\nu+k,h} - \frac{1}{2}\sigma_h\right)}{R_h^{(2\nu+1)}} \\ k &= 1, 2, \ldots \nu \end{aligned}\right\} \qquad 48)$$

Die Gleichungen 38) und 48) enthalten die vollständige Auflösung des Systems 7) oder 9a). Man erkennt sehr leicht die Analogie des Aufbaus dieser Formeln mit demjenigen, unter welchem die Unbekannten in der Bessel'schen Formel für aequidistante Phasen erscheinen. Von Wichtigkeit ist namentlich die Gleichung 38), weil sie die einzig streng begründete Methode liefert, nach der bei irgendwie über gegebene Perioden vertheilten Beobachtungsterminen die Grösse u_0, das Periodenmittel, abgeleitet werden muss.

II. $n = 2\nu$.

Das aufzulösende System lautet entsprechend 8)

$$\alpha_h = u_0 + \sum_{m=1}^{m=\nu-1} (p_m \cos m x_h + q_m \sin m x_h) + u_\nu \sin (U_\nu + \nu x_h) \qquad 49)$$

$$h = 1, 2, \ldots (2\nu)$$

Die Anzahl der Bedingungen ist hier um eins kleiner, als die der Unbekannten. Es muss also entweder eine Unbekannte willkürlich gewählt werden, oder man muss eine weitere Bedingungsgleichung einführen. Ich habe schon früher erwähnt, dass aus gewissen, im zweiten Theil zu erörternden Gründen in der meteorologischen Praxis diese neue Bedingungsgleichung lauten muss

$$U_\nu = -\frac{1}{2} \sum_{h=1}^{h=2\nu} x_h = -\frac{1}{2}\sigma \qquad 50)$$

Die gegenwärtige Untersuchung soll indessen so durchgeführt werden, dass U_ν zunächst ganz beliebig angenommen werden kann.

Für die Determinante $D_{2\nu}$ des Systems 49) erhält man

$$D_{2\nu} = \left| \begin{matrix} 1, \cos x_m, \sin x_m, \ldots \cos (\nu-1) x_m, \sin (\nu-1) x_m, \sin (U_\nu + \nu x_m) \\ m = 1, 2, \ldots (2\nu) \end{matrix} \right| \qquad 51)$$

Setzt man

$$\left.\begin{aligned} C_{2\nu} &= \left| 1, \cos x_m, \sin x_m, \ldots \cos(\nu-1)x_m, \sin(\nu-1)x_m, \cos \nu x_m \right| \\ S_{2\nu} &= \left| \begin{matrix} 1, \cos x_m, \sin x_m, \ldots \cos(\nu-1)x_m, \sin(\nu-1)x_m, \sin \nu x_m \\ m = 1, 2, \ldots (2\nu) \end{matrix} \right| \end{aligned}\right\} \quad 52)$$

so wird

$$D_{2\nu} = C_{2\nu} \,.\, \sin U_\nu + S_{2\nu} \,.\, \cos U_\nu \qquad 53)$$

Bildet man die Determinante $C_{2\nu} + i \,.\, S_{2\nu}$, so lässt sich dieselbe genau wie in I transformiren, und man erhält auf diesem Wege sehr leicht

$$\left.\begin{aligned} C_{2\nu} &= (-1)^{\nu} \,.\, 2 \,.\, 4^{\nu(\nu-1)} \,.\, P_{2\nu} \,.\, \sin \frac{1}{2}\sigma \\ S_{2\nu} &= (-1)^{\nu-1} \,.\, 2 \,.\, 4^{\nu(\nu-1)} \,.\, P_{2\nu} \,.\, \cos \frac{1}{2}\sigma \end{aligned}\right\} \quad 54)$$

wo $P_{2\nu}$ wieder, analog $P_{2\nu+1}$, das Produkt der Sinus aller halben Differenzen zwischen je zweien der Grössen $x_1, x_2, \ldots x_{2\nu}$ ist mit der Bedingung, dass die Grösse mit kleinerem Index stets als Subtrahend verwendet wird, und wo σ die Summe aller x_m ist. Dadurch entsteht

$$D_{2\nu} = (-1)^{\nu-1} \,.\, 2 \,.\, 4^{\nu(\nu-1)} \,.\, P_{2\nu} \,.\, \cos\left(U_\nu + \frac{\sigma}{2}\right) \qquad 55)$$

Bezeichnet man die nach Unterdrückung der 1ten Kolonne und der $h$ten Zeile in $C_{2\nu}$ und $S_{2\nu}$ übrigbleibenden Determinanten $(2\nu - 1)$ter Ordnung durch $C_{o,h}^{(c)}$ und $S_{o,h}^{(s)}$, also

$$\left.\begin{aligned} C_{o,h}^{(c)} &= \left| \cos x_m, \sin x_m, \ldots \cos(\nu-1)x_m, \sin(\nu-1)x_m, \cos \nu x_m \right| \\ S_{o,h}^{(s)} &= \left| \begin{matrix} \cos x_m, \sin x_m, \ldots \cos(\nu-1)x_m, \sin(\nu-1)x_m, \sin \nu x_m \\ m = 1, 2, \ldots (h-1), (h+1), \ldots (2\nu) \end{matrix} \right| \end{aligned}\right\} \quad 56)$$

so ist offenbar

$$D_{2\nu} \,.\, u_o = \sum_{h=1}^{h=2\nu} (-1)^{h-1} \alpha_h \left(C_{o,h}^{(c)} \,.\, \sin U_\nu + S_{o,h}^{(s)} \,.\, \cos U_\nu\right) \qquad 57)$$

Bildet man nun wieder die Determinante $C_{o,h}^{(c)} + i S_{o,h}^{(s)}$, so lässt sich dieselbe ganz wie früher durch Transformation ermitteln, und man erhält

$$\left.\begin{aligned} C_{o,h}^{(c)} &= (-1)^{\nu-1} \cdot 4^{(\nu-1)^2} \cdot P_{2\nu,h} \cdot \Sigma \cos \gamma_{\nu,h} \\ S_{o,h}^{(c)} &= (-1)^{\nu-1} \cdot 4^{(\nu-1)^2} \cdot P_{2\nu,h} \cdot \Sigma \sin \gamma_{\nu,h} \end{aligned}\right\} \quad 58)$$

Hier bedeutet $P_{2\nu,h}$ das aus der Reihe $x_1, x_2, \ldots x_{2\nu}$ mit Ausschluss von x_h analog $P_{2\nu}$ gebildete Produkt der Sinus der halben Differenzen, und $\gamma_{\nu,h}$ ist eine als Summe ihrer Bestandtheile aufzufassende Kombination ν^{ter} Klasse aus der Reihe $x_1, x_2, \ldots x_{h-1}, x_{h+1}, \ldots x_{2\nu}$. Das Summationszeichen verlangt die Bildung aller möglichen Kombinationen.

In Analogie mit früheren Bezeichnungen sei $R_h^{(2\nu)}$ das Produkt der Sinus aller halben Differenzen, in denen x_h als Subtrahend, alle übrigen Phasen als Minuenden auftreten, d. h.

$$R_h^{(2\nu)} = \prod_{m=1}^{m=h-1} \sin \frac{x_m - x_h}{2} \cdot \prod_{m=h+1}^{m=2\nu} \sin \frac{x_m - x_h}{2} \quad 59)$$

Es findet dann analog 37) die Gleichung statt

$$P_{2\nu} = (-1)^{h-1} \cdot P_{2\nu,h} \cdot R_h^{(2\nu)} \quad 60)$$

und mit Hülfe der Gleichungen 55) und 57) bis 60) kommt schliesslich zum Vorschein

$$u_0 = \frac{2}{4^\nu \cos\left(U_\nu + \frac{1}{2}\sigma\right)} \sum_{h=1}^{h=2\nu} \frac{\alpha_h \, \Sigma \sin (U_\nu + \gamma_{\nu,h})}{R_h^{(2\nu)}} \quad 61)$$

Die Bestimmung der Grössen p_k und q_k kann folgendermassen vorgenommen werden.

Unterdrückt man in $C_{2\nu}$ und $S_{2\nu}$ die $(2k)^{\text{te}}$ Kolonne und die h^{te} Zeile, so mögen die übrigbleibenden Determinanten $(2\nu-1)^{\text{ter}}$ Ordnung $C_{k,h}^{(c)}$ und $S_{k,h}^{(c)}$ heissen. Werden dagegen die $(2k+1)^{\text{te}}$ Kolonne und die h^{te} Zeile unterdrückt, so sollen die übrigbleibenden Determinanten durch $C_{k,h}^{(s)}$ und $S_{k,h}^{(s)}$ bezeichnet. Aus dem aufzulösenden Systeme folgt dann sofort

$$\left.\begin{aligned} D_{2\nu} \cdot p_k &= \sum_{h=1}^{h=2\nu} (-1)^h \alpha_h \left(C_{k,h}^{(c)} \cdot \sin U_\nu + S_{k,h}^{(c)} \cdot \cos U_\nu\right) \\ D_{2\nu} \cdot q_k &= \sum_{h=1}^{h=2\nu} (-1)^{h-1} \alpha_h \left(C_{k,h}^{(s)} \cdot \sin U_\nu + S_{k,h}^{(s)} \cdot \cos U_\nu\right) \\ k &= 1, 2, \ldots (\nu-1) \end{aligned}\right\} \quad 62)$$

Man bildet nun die neuen Determinanten $C^{(s)}_{k,h} + i\, C^{(c)}_{k,h}$ und $S^{(s)}_{k,h} + i\, S^{(c)}_{k,h}$, ersetzt in jener $\cos\, \nu x_m$ durch $(a_m^{\nu} + a_m^{-\nu}) : 2$, in dieser $\sin\, \nu x_m$ durch $(a_m^{\nu} - a_m^{-\nu}) : 2i$ und kann dann jede der Determinanten in zwei neue zerfällen, die sich in der oft erwähnten Weise behandeln lassen. Bei der direkten Verfolgung dieses Weges kommen in den Endresultaten auch goniometrische Argumente von der Gestalt $\sigma_h - \gamma_{\nu+k-1,h}$ vor. Nun enthält $\gamma_{\nu+k-1,h}$, eine als Summe ihrer Bestandtheile aufzufassende Kombination der unter Ausschluss von x_h gebildeten Elementenreihe $x_1, x_2, \ldots x_{2\nu}$ zur $(\nu+k-1)^{\text{ten}}$ Klasse. genau $\nu + k - 1$ Summanden, während $\sigma_h = \sigma - x_h$ ist. Man erkennt daraus, dass $\sigma_h - \gamma_{\nu+k-1,h}$ auch jederzeit als eine Kombination jener Elemente zur Klasse $2\nu - 1 - (\nu + k - 1) = \nu - k$ aufgefasst werden kann. Mit Rücksicht auf diesen Umstand findet man dann

$$\left.\begin{aligned}
C^{(c)}_{k,h} &= (-1)^{\nu+k} \cdot 4^{(\nu-1)^2} \cdot P_{2\nu,h} \cdot \left(\Sigma \cos \gamma_{\nu-k,h} + \Sigma \cos \gamma_{\nu+k,h}\right) \\
C^{(s)}_{k,h} &= (-1)^{\nu+k} \cdot 4^{(\nu-1)^2} \cdot P_{2\nu,h} \cdot \left(\Sigma \sin \gamma_{\nu-k,h} - \Sigma \sin \gamma_{\nu+k,h}\right) \\
S^{(c)}_{k,h} &= (-1)^{\nu+k} \cdot 4^{(\nu-1)^2} \cdot P_{2\nu,h} \cdot \left(\Sigma \sin \gamma_{\nu-k,h} + \Sigma \sin \gamma_{\nu+k,h}\right) \\
S^{(s)}_{k,h} &= (-1)^{\nu+k} \cdot 4^{(\nu-1)^2} \cdot P_{2\nu,h} \cdot \left(-\Sigma \cos \gamma_{\nu-k,h} + \Sigma \cos \gamma_{\nu+k,h}\right)
\end{aligned}\right\} \qquad 63)$$

Unter Berücksichtigung von 55) und 60) resultirt dann aus 62)

$$\left.\begin{aligned}
p_k &= (-1)^k \cdot \frac{2}{4^{\nu} \cos\left(U_\nu + \frac{1}{2}\sigma\right)} \cdot \sum_{h=1}^{h=2\nu} \frac{a_h \left(\Sigma \sin\left(U_\nu + \gamma_{\nu-k,h}\right) + \Sigma \sin\left(U_\nu + \gamma_{\nu+k,h}\right)\right)}{R_h^{(2\nu)}} \\
q_k &= (-1)^k \cdot \frac{2}{4^{\nu} \cos\left(U_\nu + \frac{1}{2}\sigma\right)} \cdot \sum_{h=1}^{h=2\nu} \frac{a_h \left(\Sigma \cos\left(U_\nu + \gamma_{\nu-k,h}\right) - \Sigma \cos\left(U_\nu + \gamma_{\nu+k,h}\right)\right)}{R_h^{(2\nu)}} \\
& \qquad k = 1, 2, \ldots (\nu - 1)
\end{aligned}\right\} \qquad 64)$$

Die nun allein noch fehlende Bestimmung von u_ν ergibt sich in folgender Weise. Es ist

$$D_{2\nu} \cdot u_\nu = \left| \begin{matrix} 1, \cos x_m, \sin x_m, \ldots \cos(\nu-1) x_m, \sin(\nu-1) x_m, a_m \\ m = 1, 2, \ldots (2\nu) \end{matrix} \right| \qquad 65)$$

Entwickelt man hier nach den Elementen der letzten Kolonne, so wird, abgesehen vom Vorzeichen, der Faktor von α_h eine Determinante $(2\nu - 1)^{ter}$ Ordnung, welche genau so aufgebaut ist, wie $D_{2\nu+1}$ in 10). Der Werth dieses Faktors wird daher erhalten, wenn in 20) ν durch $\nu - 1$ und $P_{2\nu+1}$ durch $P_{2\nu,h}$ ersetzt wird, d. h. er ist $4^{(\nu-1)^2} \, . \, P_{2\nu,h}$: Man gewinnt mithin

$$D_{2\nu} \, . \, u_\nu = \sum_{h=1}^{h=2\nu} (-1)^h \alpha_h \, . \, 4^{(\nu-1)^2} \, . \, P_{2\nu,h} \qquad 66)$$

woraus durch Anwendung von 55) und 60) fliesst

$$u_\nu = (-1)^\nu \, . \, \frac{2}{4^\nu \cos\left(U_\nu + \frac{1}{2}\sigma\right)} \sum_{h=1}^{h=2\nu} \frac{\alpha_h}{R_h^{(2\nu)}} \qquad 67)$$

Die Gleichungen 61), 64) und 67) liefern die vollständige Auflösung des Systems 7), resp. 49).

Da die in der Formel für u_ν auftretende Summation unabhängig von U_ν ist, so kommt die früher erwähnte Bedingung, wie die rechnende Meteorologie sie aufstellen muss,

$$U_\nu = -\frac{1}{2}\sigma \qquad 68)$$

offenbar darauf hinaus, u_ν absolut genommen zu einem Minimum zu machen.

Gauss hat in seiner berühmten Abhandlung [1]): „Theoria interpolationis methodo nova tractata" die Gleichungen 5) ebenfalls behandelt, doch so, dass er nicht die Bestimmung der Koefficienten u_o, p_m, q_m vollzieht, sondern derart, dass er einen analytischen Ausdruck für y unmittelbar durch die gegebenen Amplituden α_h und die zugehörigen auf Bogen reducirten Phasen x_h aufsucht. Wenn nämlich zunächst wieder $n = 2\nu + 1$ gesetzt wird, so hat man nach Gauss (a. a. O. S. 281) in meiner Bezeichnungsweise als Darstellung für

$$y = u_o + \sum_{m=1}^{m=\nu} \left(p_m \cos \frac{2\pi m}{K} x + q_m \sin \frac{2\pi m}{K} x\right) \qquad 69)$$

den Ausdruck (man vergleiche 36)

$$y = \sum_{h=1}^{h=2\nu+1} \alpha_h \, . \, \frac{X_h^{(2\nu+1)}}{R_h^{(2\nu+1)}} \qquad 70)$$

1) Carl Friedrich Gauss Werke. Bd. III, S. 279 u. flgd.

wo $X_h^{(2\nu+1)}$ das Produkt ist, welches man erhält, wenn in $R_h^{(2\nu+1)}$ die Grösse x_h durch

$$\frac{2\pi}{K}\,x = x' \tag{70a}$$

ersetzt wird.

Die Gleichung 70) lässt sich leicht folgendermassen ableiten.

Kombinirt man die Gleichung 69) mit dem System 7), d. h. mit

$$\left.\begin{array}{c} \alpha_h = u_o + \sum\limits_{m=1}^{m=\nu} (p_m \cos m x_h + q_m \sin m x_h) \\ h = 1, 2, \ldots (2\nu + 1) \end{array}\right\} \tag{71}$$

so muss man haben

$$\left|\begin{array}{l} y,\ \ 1,\ \cos x',\ \sin x',\ \ldots\ \cos \nu x',\ \sin \nu x' \\ \alpha_m,\ 1,\ \cos x_m,\ \sin x_m,\ \ldots\ \cos \nu x_m,\ \sin \nu x_m \\ \qquad m = 1, 2, \ldots (2\nu + 1) \end{array}\right| = o \tag{72}$$

Die Entwickelung dieser Determinante nach den Elementen der ersten Kolonne gibt, unter Berücksichtigung der Gleichungen 20) und 37) sofort das in 70) aufgestellte Resultat. So elegant nun diese Darstellung auch ist, und so vortreffliche Dienste sie leistet, wenn zu einer beliebigen Phase x die Amplitude y gesucht werden soll, so ist doch eine Diskussion der Kurve selbst, wie die Meteorologie sie braucht, also eine Bestimmung der Phasen der Media und der Extreme und der Amplituden der letzteren, daran wohl kaum möglich. Für diese praktischen Zwecke dürfte es sich deshalb empfehlen lieber die in I gegebenen Formeln zu benutzen.

Für $n = 2\nu$ hat G a u s s (a. a. O. S. 283) die Formel, welche natürlich eine willkürliche Konstante einschliesst, ebenfalls gegeben. Ich will derselben eine andere und, wie es mir scheint, praktischere Form geben, die folgendermassen abgeleitet werden kann.

Kombinirt man die Gleichung 5), in der U_ν als willkürliche Konstante aufgefasst wird,

$$y = u_0 + \sum_{m=1}^{m=\nu-1} (p_m \cos mx' + q_m \sin mx') + u_\nu \sin (U_\nu + \nu x') \tag{73}$$

mit

$$\alpha_h = u_0 + \sum_{m=1}^{m=\nu-1} (p_m \cos mx_h + q_m \sin mx_h) + u_\nu \sin (U_\nu + \nu x_h) \tag{74}$$

$$h = 1,\ 2, \ldots (2\nu)$$

so hat man wieder die Determinante

$$\begin{vmatrix} y, \ 1, \cos x', \sin x', \ldots \cos (\nu - 1) x', \sin (\nu - 1) x', \sin (U_\nu + \nu x') \\ \alpha_m, \ 1, \cos x_m, \sin x_m, \ldots \cos (\nu - 1) x_m, \sin (\nu - 1) x_m, \sin (U_\nu + \nu x_m) \\ m = 1, 2, \ldots (2\nu) \end{vmatrix} = o \qquad 75)$$

Ist nun wieder

$$\sigma = \sum_{k=1}^{k=2\nu} x_k \qquad 76)$$

so erhält man aus 75) bei Entwickelung nach den Elementen der ersten Kolonne unter Rücksicht auf 55) und 60) sehr leicht

$$y = \frac{1}{\cos\left(U_\nu + \frac{1}{2}\sigma\right)} \sum_{h=1}^{h=2\nu} \alpha_h \cdot \frac{X_h^{(2\nu)}}{R_h^{(2\nu)}} \cdot \cos\left(U_\nu + \frac{1}{2}\sigma + \frac{x' - x_h}{2}\right) \qquad 77)$$

wo

$$X_h^{(2\nu)} = \left(R_h^{(2\nu)}\right)_{x_h = x'} \qquad 78)$$

zu setzen ist.

Bei Anwendung dieser Formel in der Meteorologie hat man, wegen

$$U_\nu = -\frac{1}{2}\sigma \qquad 79)$$

nach 68), einfach zu setzen

$$y = \sum_{h=1}^{h=2\nu} \alpha_h \cdot \frac{X_h^{(2\nu)}}{R_h^{(2\nu)}} \cdot \cos\frac{x' - x_h}{2} \qquad 80)$$

Neben den in I und II behandelten Gleichungssystemen treten unter gewissen Umständen, wie sich im zweiten Theil dieser Untersuchungen zeigen wird, noch zwei andere auf, bei denen die in I und II vorkommenden Vielfachen der ganzen Winkel x durch die ungeraden Vielfachen der halben Winkel ersetzt sind. Diese neuen Systeme lauten

$$\alpha_h = \sum_{m=1}^{m=\nu} \left(p_m \cos\frac{2m-1}{2} x_h + q_m \sin\frac{2m-1}{2} x_h\right) \qquad 81)$$

$$h = 1, 2, \ldots (2\nu)$$

und 82)

$$\alpha_h = \sum_{m=1}^{m=\nu} \left(p_m \cos\frac{2m-1}{2} x_h + q_m \sin\frac{2m-1}{2} x_h\right) + u_{\nu+1} \sin\left(U_{\nu+1} + \frac{2\nu+1}{2} x_h\right)$$

$$h = 1, 2, \ldots (2\nu + 1)$$

Die Analogie dieser Systeme mit 7), resp. 8) ist unverkennbar; beim zweiten System ist $U_{\nu+1}$ wieder als willkürliche Konstante zu betrachten. Die Auflösung vollzieht sich in genau derselben Weise, wie 7) und 8) behandelt worden sind. Ich beschränke mich daher auf die einfache Angabe der Resultate und verweise bezüglich der Bezeichnungen auf I und II.

III.

Für das System

$$\alpha_h = \sum_{m=1}^{m=\nu} \left(p_m \cos \frac{2m-1}{2} x_h + q_m \sin \frac{2m-1}{2} x_h\right) \tag{82a}$$

$$h = 1, 2, \ldots ; (2\nu)$$

sei die Determinante 83)

$$E_{2\nu} = \left| \cos \frac{x_m}{2}, \ \sin \frac{x_m}{2}, \ \cos \frac{3x_m}{2}, \ \sin \frac{3x_m}{2}, \ldots \cos \frac{(2\nu-1)x_m}{2}, \ \sin \frac{(2\nu-1)x_m}{2} \right| \quad m = 1, 2, \ldots (2\nu)$$

Man erhält leicht den mit 20) zu vergleichenden Ausdruck

$$E_{2\nu} = 4^{\nu(\nu-1)} \cdot P_{2\nu} \tag{84}$$

Unterdrückt man in $E_{2\nu}$ die $(2k-1)^{te}$ Kolonne und die h^{te} Zeile, so mag die übrig bleibende Determinante $(2\nu-1)^{ter}$ Ordnung durch $d_{k,h}$ bezeichnet werden; analog heisse $t_{k,h}$ die Determinante, welche man aus $E_{2\nu}$ durch Unterdrückung der $(2k)^{ten}$ Kolonne und h^{ten} Zeile erhält. Es ergibt sich dann in Analogie mit 47)

$$\left.\begin{aligned} d_{k,h} &= (-1)^{k-1} \cdot 4^{(\nu-1)^2} \cdot P_{2\nu,h} \cdot \Sigma \sin\left(\gamma_{\nu+k-1,h} - \frac{1}{2}\sigma_h\right) \\ t_{k,h} &= (-1)^{k-1} \cdot 4^{(\nu-1)^2} \cdot P_{2\nu,h} \cdot \Sigma \cos\left(\gamma_{\nu+k-1,h} - \frac{1}{2}\sigma_h\right) \end{aligned}\right\} \tag{85}$$

und als Auflösung des Systems 82a) in Analogie mit 48):

$$\left.\begin{aligned} p_k &= (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{4^{\nu-1}} \sum_{h=1}^{h=2\nu} \frac{\alpha_h \cdot \Sigma \sin\left(\gamma_{\nu+k-1,h} - \frac{1}{2}\sigma_h\right)}{R_h^{(2\nu)}} \\ q_k &= (-1)^{k} \cdot \frac{1}{4^{\nu-1}} \sum_{h=1}^{h=2\nu} \frac{\alpha_h \cdot \Sigma \cos\left(\gamma_{\nu+k-1,h} - \frac{1}{2}\sigma_h\right)}{R_h^{(2\nu)}} \end{aligned}\right\} \tag{86}$$

Lautete die ursprüngliche Gleichung, deren Koeffizienten durch 82a) bestimmt werden sollten

$$y = \sum_{m=1}^{m=\nu} \left(p_m \cos \frac{2m-1}{2} x' + q_m \sin \frac{2m-1}{2} x' \right) \qquad 87)$$

so fände man analog 70) nach sehr einfachen Umformungen aus der Kombination von 87) und 82a) unter Zuziehung von 84)

$$y = \sum_{h=1}^{h=2\nu} \alpha_h \cdot \frac{X_h^{(2\nu)}}{R_h^{(2\nu)}} \qquad 88)$$

eine Gleichung, die für gewisse praktische Anwendungen sehr bequem ist.

IV.

Für das System 89)

$$\alpha_h = \sum_{m=1}^{m=\nu} \left(p_m \cos \frac{2m-1}{2} x_h + q_m \sin \frac{2m-1}{2} x_h \right) + u_{\nu+1} \sin \left(U_{\nu+1} + \frac{2\nu+1}{2} x_h \right)$$

$$h = 1, 2, \ldots (2\nu + 1)$$

sei die Determinante 90)

$$E_{2\nu+1} = \left| \cos \frac{x_m}{2}, \sin \frac{x_m}{2}, \ldots \cos \frac{2\nu-1}{2} x_m, \sin \frac{2\nu-1}{2} x_m, \sin \left(U_{\nu+1} + \frac{2\nu+1}{2} x_m \right) \right. \atop m = 1, 2, \ldots (2\nu + 1)$$

Man denke sich nun hier $E_{2\nu+1}$ in die Summe zerspalten

$$E_{2\nu+1} = C_{2\nu+1} \cdot \sin U_{\nu+1} + S_{2\nu+1} \cdot \cos U_{\nu+1}$$

wo 52) und 53) zu vergleichen sind, dann sind $C_{2\nu+1}$ und $S_{2\nu+1}$ Determinanten $(2\nu + 1)^{\text{ter}}$ Ordnung, für welche sich analog 54) ergibt

$$\left. \begin{aligned} C_{2\nu+1} &= (-1)^{\nu} \cdot 4^{\nu^2} \cdot P_{2\nu+1} \cdot \cos \frac{1}{2} \sigma \\ S_{2\nu+1} &= (-1)^{\nu} \cdot 4^{\nu^2} \cdot P_{2\nu+1} \cdot \sin \frac{1}{2} \sigma \end{aligned} \right\} \qquad 92)$$

woraus sofort fliesst, analog 55)

$$E_{2\nu+1} = (-1)^{\nu} \cdot 4^{\nu^2} \cdot P_{2\nu+1} \cdot \sin \left(U_{\nu+1} + \frac{1}{2} \sigma \right) \qquad 93)$$

Unterdrückt man in $C_{2\nu+1}$ und $S_{2\nu+1}$ die $(2k-1)^{te}$ Kolonne und die h^{te} Zeile, so mögen die übrigbleibenden Determinanten $(2\nu)^{ter}$ Ordnung $D^{(c)}_{k,h}$ und $T^{(c)}_{k,h}$ heissen. Werden dagegen die $(2k)^{te}$ Kolonne und die h^{te} Zeile unterdrückt, so sollen die übrigbleibenden Determinanten durch $D^{(s)}_{k,h}$ und $T^{(s)}_{k,h}$ bezeichnet werden. Dann resultirt analog 63)

$$\left.\begin{aligned}
D^{(c)}_{k,h} &= (-1)^{\nu+k+1} \cdot 4^{\nu(\nu-1)} \cdot P_{2\nu+1,h} \left(\Sigma \cos \gamma_{\nu-k+1,h} - \Sigma \cos \gamma_{\nu+k,h}\right) \\
D^{(s)}_{k,h} &= (-1)^{\nu+k+1} \cdot 4^{\nu(\nu-1)} \cdot P_{2\nu+1,h} \left(\Sigma \sin \gamma_{\nu-k+1,h} + \Sigma \sin \gamma_{\nu+k,h}\right) \\
T^{(c)}_{k,h} &= (-1)^{\nu+k} \cdot 4^{\nu(\nu-1)} \cdot P_{2\nu+1,h} \left(-\Sigma \sin \gamma_{\nu-k+1,h} + \Sigma \sin \gamma_{\nu+k,h}\right) \\
T^{(s)}_{k,h} &= (-1)^{\nu+k} \cdot 4^{\nu(\nu-1)} \cdot P_{2\nu+1,h} \left(\Sigma \cos \gamma_{\nu-k+1,h} + \Sigma \cos \gamma_{\nu+k,h}\right)
\end{aligned}\right\} \quad 94)$$

Unterdrückt man in $E_{2\nu+1}$ die $(2\nu+1)^{te}$ Kolonne und die h^{te} Zeile, so erhält man eine Determinante F_h, welche ganz analog $E_{2\nu}$ gebildet ist, man findet deshalb leicht

$$F_h = 4^{\nu(\nu-1)} \cdot P_{2\nu+1,h} \qquad 95)$$

Mit Hülfe der Gleichungen 94) und 95) erhält man dann als Auflösung des Systems 89)

$$\left.\begin{aligned}
p_k &= \frac{(-1)^{k-1}}{4^\nu \sin\left(U_{\nu+1} + \frac{1}{2}\sigma\right)} \sum_{h=1}^{h=2\nu+1} \frac{\alpha_h\left(\Sigma \sin\left(U_{\nu+1} + \gamma_{\nu-1+k,h}\right) - \Sigma \sin\left(U_{\nu+1} + \gamma_{\nu+k,h}\right)\right)}{R^{(2\nu+1)}_h} \\
q_k &= \frac{(-1)^{k-1}}{4^\nu \sin\left(U_{\nu+1} + \frac{1}{2}\sigma\right)} \sum_{h=1}^{h=2\nu+1} \frac{\alpha_h\left(\Sigma \cos\left(U_{\nu+1} + \gamma_{\nu-1+k,h}\right) + \Sigma \cos\left(U_{\nu+1} + \gamma_{\nu+k,h}\right)\right)}{R^{(2\nu+1)}_h} \\
k &= 1,\ 2, \ldots (\nu)
\end{aligned}\right\} \quad 96)$$

$$u_{\nu+1} = \frac{(-1)^\nu}{4^\nu \sin\left(U_{\nu+1} + \frac{1}{2}\sigma\right)} \sum_{h=1}^{h=2\nu+1} \frac{\alpha_h}{R^{(2\nu+1)}_h} \qquad 97)$$

Man vergleiche hiermit 64) und 67).

War die Gleichung, welche das System 89) veranlasste,

$$y = \sum_{m=1}^{m=\nu} \left(p_m \cos \frac{2m-1}{2} x' + q_m \sin \frac{2m-1}{2} x' \right) + u_{\nu+1} \sin \left(U_{\nu+1} + \frac{2\nu+1}{2} x' \right) \quad 98)$$

so kann man wie früher einen Ausdruck ableiten, der, ohne dass die Koeffizienten p_m, q_m, $u_{\nu+1}$ direkt berechnet sind, eine Ermittelung der zu irgend einer in Bogen ausgedrückten Phase x' gehörenden Amplitude y gestattet. Aus der Kombination von 89) und 98) folgt nämlich

$$\begin{vmatrix} y, \cos \frac{x'}{2}, \sin \frac{x'}{2}, \ldots \cos \frac{2\nu-1}{2} x', \sin \frac{2\nu-1}{2} x', \sin \left(U_{\nu+1} + \frac{2\nu+1}{2} x' \right) \\ \alpha_m, \cos \frac{x_m}{2}, \sin \frac{x_m}{2}, \ldots \cos \frac{2\nu-1}{2} x_m, \sin \frac{2\nu-1}{2} x_m, \sin \left(U_{\nu+1} + \frac{2\nu+1}{2} x_m \right) \\ m = 1, 2, \ldots (2\nu+1) \end{vmatrix} = o \quad 99)$$

und daraus erhält man unter Benutzung von 93) nach einfachen Reduktionen

$$y = \frac{1}{\sin \left(U_{\nu+1} + \frac{1}{2} \sigma \right)} \sum_{h=1}^{h=2\nu+1} \alpha_h \cdot \frac{X_h^{(2\nu+1)}}{R_h^{(2\nu+1)}} \cdot \sin \left(U_{\nu+1} + \frac{1}{2} \sigma + \frac{x' - x_h}{2} \right) \quad 100)$$

eine Gleichung, deren Analogie mit 77) in die Augen springt.

Zweiter Theil.

Ueber die Gestalt und über die Verwendung der Bessel'schen Formel in der Meteorologie.

Auf den grösseren meteorologischen Stationen tritt meistens der Fall ein, dass neben der Hauptreihe von n täglichen Beobachtungen, die ich aequidistant voraussetzen will, noch r andere Beobachtungen vorliegen, welche gleichfalls an feste Zeiten des Tages gebunden sind. So wird hier in Dorpat auf dem Observatorium neben den dreistündigen Terminen (1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22^h) auch noch im Termin $13^h\ 47^m$ für die bekannten Simultanbeobachtungen und um 21^h für Dorpat als Glied des russischen Stationsnetzes beobachtet. Die Frage, in welcher Weise solche „überzählige" Beobachtungen zur schärferen Bestimmung der Tageskurve für die einzelnen meteorologischen Elemente neben den „regelmässigen" (aequidistanten) Beobachtungen verwerthet werden könnten, hat überhaupt die vorliegenden Untersuchungen veranlasst. Es ist hierbei klar vorgezeichnet, in welcher Richtung sich die theoretische Behandlung zu bewegen habe. Da es sich um den periodischen Gang irgend eines meteorologischen Elementes handelt, so wird man mit Hülfe periodischer Funktionen die Kurve in dem einen Fall für n aequidistante, in dem anderen Fall für n aequidistante und r weitere, nicht besonders charakterisirte Phasen aus den zugehörigen Amplituden, d. h. aus den Beobachtungsresultaten abzuleiten haben. Es kommt indessen hierbei eine Reihe von Umständen ins Spiel, die bisher nicht berücksichtigt worden sind. Ich sah mich hierdurch zu einer eingehenden Untersuchung über die Art und Weise, in welcher die Bessel'sche Formel in der Meteorologie aufzustellen ist, veranlasst und gebe die Resultate dieser Untersuchung in dem ersten Abschnitt dieses zweiten Theils. Darauf gestützt erfolgt dann im zweiten Abschnitt die Beantwortung obiger Frage, wobei sich eine Reihe von interessanten Sätzen ergibt.

Erster Abschnitt.

1.

Die Meteorologen haben meines Wissens bisher die Konstanten der Bessel'schen Formel immer nach der Methode der kleinsten Quadrate abgeleitet. Das neueste mir bekannte Beispiel für diese Behandlungsweise gibt W. Ferrel in seinem ausgezeichneten Buche „Recent. Advances in Meteorology", Washington 1886, chapter VI, woselbst sich S. 345 in den Formeln 27), 28) und 29) sogar die „wahrscheinlichen Fehler" für die Konstanten der Bessel'schen Formel finden. Ist aber die Anwendung der Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Darstellung einer Tages- oder Jahreskurve durch periodische Funktionen überhaupt berechtigt? Meiner Ansicht nach lautet das Problem einfach folgendermassen. An Stelle der in Wirklichkeit unbekannten Tages- oder Jahreskurve A wird eine andere B von gleichfalls periodischem Charakter gesetzt, welche mit A eine Anzahl von n Punkten gemeinsam hat; der mathematische Ausdruck für B muss n Konstanten umfassen, zu deren Bestimmung n Gleichungen, entsprechend den n gegebenen Beobachtungen, vorhanden sind. Statt also mit einer überschüssigen Anzahl von Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate zu rechnen, muss man in der periodischen Funktion genau so viele unbekannte Koeffizienten ermitteln, als Amplituden gegeben sind, oder es muss statt eines überbestimmten Systems von Gleichungen ein vollkommen bestimmtes zu Grunde gelegt werden. Was soll aber die Verwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung bei einer Aufgabe bedeuten, die sich nicht als überbestimmt, sondern als vollkommen bestimmt kennzeichnet? Die Wahrscheinlichkeitsrechnung darf nur angewandt werden, wenn es sich um zufällige Fehler handelt; im vorliegenden Fall kann aber überhaupt von „Fehlern" in den Koeffizienten gar keine Rede sein, da letztere nicht die wahrscheinlichsten, sondern ganz bestimmte, eindeutige Werthe erhalten. Als Beispiel führe ich an, dass, wie später genauer gezeigt wird, die Werthe, welche man bei n aequidistanten Beobachtungen nach der Methode der kleinsten Quadrate als die angeblich nur wahrscheinlichsten Werthe für die Unbekannten gewinnt, genau dieselben sind, wie die unbedingt gewissen Werthe, welche die Auflösung des betreffenden definiten Gleichungssystems liefert. Begnügt man sich, was in der Praxis ja fast unter allen Umständen gerechtfertigt sein mag, mit einer geringeren Zahl von Reihengliedern, als überhaupt bestimmbar sind, so fehlt etwas an der Vollständigkeit, und daher kommt es, dass die Urgleichungen nicht mehr vollkommen identisch erfüllt werden. Man hat es mit einem „Fehlenden", nicht mit einem „Fehler" zu thun. In ähnlicher Weise liefert die abgekürzte Multiplikation ein Produkt, das Niemand als „fehlerhaft" bezeichnen wird, weil demselben

zum vollständigen Produkt ein dem Ganzen gegenüber verschwindender Bruchtheil „fehlt". Wird hier wohl Jemand von den „wahrscheinlichen Fehlern" der einzelnen Dezimalstellen sprechen? Der einzige praktische Vortheil, den die Ableitung der Resultate nach der Methode der kleinsten Quadrate bei der Bessel'schen Formel gewährt, dass man nämlich jederzeit durch die bekannte Formel für die Summe der „Fehlerquadrate" erfahren kann, ob es zweckmässig ist behufs genauerer Darstellung noch einige Koeffizienten weiter zu berechnen, oder ob man die Reihe als schon genügend abbrechen kann, — dieser Vortheil haftet nur scheinbar an jener Methode, da die betreffende Formel sich auch für das definite System ohne Schwierigkeit ableiten lässt, wobei die Summe der „Fehlerquadrate" in Null übergehen muss. Bei dieser Auffassung der Bessel'schen Formel ist selbstverständlich der öfters ausgesprochenen Ansicht aller Boden entzogen, als ob der mathematische Ausdruck für die Tages- oder Jahreskurve eine Art Ausgleichung und Verbesserung der direkten Beobachtungsresultate herbeizuführen im Stande sei. Aus den angeführten Gründen sehe ich im folgenden von einer Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung ganz ab und werde immer nur definite Gleichungssysteme behandeln.

2.

Versteht man unter y die zur Phase x gehörende Amplitude, wobei die Phase in Theilen der Periode K ausgedrückt ist, unter m eine ganze Zahl $\overline{\gtrless}\ o$, unter u_m Konstanten, welche auf dieselbe Einheit wie die Amplituden bezogen sind, unter U_m Winkelkonstanten, — so ist der allgemeine Ausdruck für eine an die Periode K geknüpfte Erscheinung

$$y = \Sigma\, u_m \sin\left(U_m + \frac{2\pi m}{K} x\right) \qquad 101)$$

Die Summanden können als Sinuslinien m^{ter} Ordnung bezeichnet werden, deren Interferenz die gesuchte Kurve erzeugt. Im allgemeinen kann man der Grösse m ganz beliebige Werthe m_1, m_2, . . . beilegen und muss die Anzahl der Summanden als unendlich gross betrachten (Fourier'sche Reihe). Die durch 101) dargestellte Kurve werde wegen der unendlich grossen Anzahl der Konstanten durch C_∞ bezeichnet. In der meteorologischen Praxis spezialisirt sich die Aufgabe dahin, dass die Kurve durch n bestimmte Punkte gehen soll, welche n zusammengehörenden Phasen und Amplituden entsprechen. Es können nun offenbar unendlich viele periodische Kurven durch die n gegebenen Punkte gehn; um daher das Problem nicht ein unbestimmtes werden zu lassen, wobei z. B. Schlüsse auf die Phasen und Amplituden der Extreme in der wahren Tages- oder Jahreskurve u. dgl. in praxi unmöglich würden, muss zunächst die Anzahl der Summanden in C_∞ soweit beschränkt werden, dass die Zahl der zu bestimmenden Konstanten u_m und U_m gleich der Anzahl n der gegebenen Bedingungen ist.

Es mag zuerst angenommen werden, dass n eine ungerade Zahl, $2\nu + 1$, sei. Für $m = o$ reducirt sich der Summand in C_x auf eine einzige Konstante $u_o \sin U_o$, eine Sinuslinie nullter Ordnung, so dass man U_o willkürlich nehmen darf, natürlich mit Ausschluss der Werthe, für welche $\sin U_o$ verschwindet. Es ist zweckmässig, $U_o = \frac{\pi}{2}$ zu setzen, wie ich dies im folgenden immer thun werde, so dass jener Summand sich für $m = o$ einfach in u_o verwandelt. Die nach Verbrauch einer Bedingung noch übrigen 2ν Bedingungen sind zur Bestimmung von ν Grössenpaaren u_m und U_m, wo $m > o$, gerade ausreichend; man wird also für m die ν Werthe $m_1, m_2, \ldots m_\nu$ setzen müssen. Aber auch bei dieser nothwendigen Beschränkung auf u_o und ν verschiedene Sinuslinien, d. h. auf n Konstanten, sind immer noch unendlich viele Kurven C_n möglich, welche durch die n gegebenen Punkte gehen, wenn es nicht gelingt über die Grössen $m_1, m_2, \ldots m_\nu$ etwas bestimmtes in Erfahrung zu bringen. Hierzu dürfte man in folgender Weise gelangen. Das ganze Verfahren hat interpolatorischen Charakter, indem man aus n gegebenen Punkten der im allgemeinen unbekannten wahren Tages- oder Jahreskurve auf die übrigen unendlich vielen Punkten derselben Schlüsse zu ziehen sucht. Die einfachste Interpolation wäre die geradlinige zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Punkten der gegebenen Reihe, so dass diesmal die Kurve sich als eine mehrfach gebrochene Gerade darstellt. Die gesuchte Interpolationskurve C_n wird sich dieser gebrochenen Geraden insofern anzuschliessen haben, als gewisse Momente der letzteren auch in jener hervortreten müssen. Diese Momente sind die extremen Werthe der Amplituden. Man hat beispielsweise im allgemeinen keinen Grund zwischen zwei aufeinanderfolgenden Amplituden mehr als ein Extrem, sei es ein Maximum oder ein Minimum, in der Interpolationskurve anzunehmen. Die Anzahl der Extreme in der Interpolationskurve C_n darf daher nicht grösser werden, als die Anzahl der in der gebrochenen Geraden überhaupt möglichen Extreme, womit nicht gesagt ist, dass jene Anzahl diese erreichen muss. Die Anzahl der bei einer gebrochenen Geraden möglichen Extreme ist leicht festzustellen; sie ist vorhanden, sobald je zwei aufeinanderfolgende Punkte ein Maximum und ein Minimum darstellen. Im günstigsten Falle macht, da die Anzahl der Extreme eine gerade sein muss, ein Punkt des Linienzugs eine Ausnahme, d. h. die grösstmögliche Anzahl der Extreme bei einem gebrochenen Linienzug von $2\nu + 1$ Ecken, der am Ende der Periode wieder in seinen Anfangswerth zurückkehrt, ist 2ν. Die Interpolationskurve C_n darf also höchstens 2ν Extreme liefern können, womit nicht gesagt ist, dass sie schliesslich auch wirklich so viele liefern muss. Eine Sinuslinie m^{ter} Ordnung

$$z = u_m \sin\left(U_m + \frac{2\pi m}{K} x\right) \tag{102}$$

besitzt, wie man sich leicht überzeugt, innerhalb des Intervalles von $x = o$ bis $x = K$ (eventuell unter Ausschluss dieses letzten Werthes) genau m Maxima und m Minima, d. h. $2m$ Extreme. Daraus folgt nothwendigerweise, dass der grösste Werth, den

m in dem Ausdruck für C_n annehmen kann, $m = \nu$ ist. Höhere Werthe von m als ν würden im allgemeinen die unzulässige Existenz von mehr als 2ν Extremen in C_n ermöglichen. Nun verbraucht aber die Sinuslinie ν^{ter} Ordnung zwei Konstanten u_ν und U_ν, d. h. zwei der noch vorhandenen 2ν Bedingungen; es bleiben also noch $2\nu - 2$ Konstanten bestimmbar. Da nun für m die obere Grenze ν festgestellt worden ist, so sieht man sofort, dass unbedingt $m = 1, 2, \ldots \nu$ gesetzt werden muss, wodurch genau 2ν Konstanten eingeführt werden, für welche die 2ν Bedingungen ausreichen. Die Reihe $m_1, m_2, \ldots m_\nu$, welche oben ganz allgemein aufgestellt wurde, muss daher mit der Reihe $1, 2, \ldots \nu$ in irgend welcher Ordnung zusammenfallen. Für die meteorologische Praxis m u s s also, wenn $n = 2\nu + 1$ ist, die Darstellung der periodischen Interpolationskurve C_n lauten:

$$y = u_0 + \sum_{m=1}^{m=\nu} u_m \sin\left(U_m + \frac{2\pi m}{K} x\right) \qquad 103)$$

Eine andere Darstellung ist unmöglich, und das Problem erscheint vollkommen bestimmt. In der Meteorologie ist in der That bisher immer diese Form der Interpolationskurve benutzt worden, ohne dass man, soviel ich weiss, eine eingehende Begründung derselben versucht hätte.

Ist zweitens n eine gerade Zahl, $n = 2\nu$, so erkennt man leicht, wie vorher, als Maximalwerth der Anzahl von Extremen wieder 2ν, d. h. es kann höchstens $m = \nu$ vorkommen, so dass man auch für $n = 2\nu$ auf die allgemeine Gestalt 103) geführt würde

$$y = u_0 + \sum_{m=1}^{m=\nu} u_m \sin\left(U_m + \frac{2\pi m}{K} x\right) \qquad 104)$$

wenn nicht die Zahl der Konstanten in dieser Gleichung $2\nu + 1$, statt 2ν, wäre. Da nun in 103) für $n = 2\nu - 1$ die Summationsgrenzen von $m = 1$ bis $m = \nu - 1$, für $n = 2\nu + 1$ aber von $m = 1$ bis $m = \nu$ gehn, so sieht man, dass in der That die Gleichung 104) der allgemeine Ausdruck für den Fall $n = 2\nu$ ist, sobald eine der für $m = \nu$ hinzutretenden Konstanten, u_ν oder U_ν, willkürlich gewählt wird. Da U_ν als Argument einer Sinusfunktion auftritt, so könnte bei willkürlicher Wahl von u_ν der Fall eintreten, dass bei Auflösung des zur Bestimmung der 2ν Konstanten dienenden Systems von Gleichungen $\sin U_\nu > 1$ oder < -1 erhalten würde, d. h. dass für U_ν ein imaginärer Werth resultirte. Man schliesst hieraus, dass nur U_ν als willkürliche Konstante angesehen werden darf, wodurch aber immer noch die Zahl der Interpolationskurven C_n für $n = 2\nu$ unendlich gross würde. Es muss also für $n = 2\nu$ noch eine weitere Bedingung aufgestellt werden, damit nur eine einzige Interpolationskurve möglich sei, und das Problem wieder vollkommen bestimmt erscheine. Diese $(2\nu + 1)^{te}$ Bedingung muss nothwendigerweise eine eindeutige Bestimmung des Winkels U_ν ermöglichen; im nächsten Kapitel wird diese Bedingung in sehr einfacher Weise gewonnen werden.

3.

Für die weitere Behandlung des Gegenstandes ist es zweckmässig, wie es auch im ersten Theil geschehen, an Stelle der Konstanten u_m und U_m zwei neue vermittelst der Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} p_m &= u_m \sin U_m \\ q_m &= u_m \cos U_m \end{aligned}\right\} \qquad 105)$$

einzuführen. Man hat dann

für $n = 2\nu + 1$

$$y = u_0 + \sum_{m=1}^{m=\nu} \left(p_m \cos \frac{2\pi m}{K} x + q_m \sin \frac{2\pi m}{K} x \right) \qquad 106)$$

und für $n = 2\nu$

$$y = u_0 + \sum_{m=1}^{m=\nu-1} \left(p_m \cos \frac{2\pi m}{K} x + q_m \sin \frac{2\pi m}{K} x \right) + u_\nu \sin \left(U_\nu + \frac{2\pi\nu}{K} x \right) \qquad 107)$$

wo U_ν durch eine demnächst anzugebende Gleichung bestimmt wird.

Es mögen nun die n gegebenen Amplituden durch $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, die zugehörigen Phasen durch $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ bezeichnet werden; ausserdem sei der Kürze wegen

$$\frac{2\pi}{K} \xi_h = x_h \qquad 108)$$

Soll nun die Bessel'sche Formel für den Fall $n = 2\nu + 1$ bestimmt werden, so hat man nach 106) das Gleichungssystem aufzulösen

$$\alpha_h = u_0 + \sum_{m=1}^{m=\nu} (p_m \cos m x_h + q_m \sin m x_h) \qquad 109)$$

$$h = 1, 2, \ldots (2\nu + 1)$$

Die Auflösung dieses Systems ist durch die Gleichungen 38), 48) und 70) vollständig gegeben.

Für $n = 2\nu$ lautet das System

$$\alpha_h = u_0 + \sum_{m=1}^{m=\nu-1} (p_m \cos m x_h + q_m \sin m x_h) + u_\nu \sin (U_\nu + \nu x_h) \qquad 110)$$

$$h = 1, 2, \ldots (2\nu)$$

welches durch die Gleichungen 61), 64), 67) und 77) resp. 80) vollständig aufgelöst wird. Eine besondere Untersuchung erfordert nur noch die Gleichung 67)

$$u_\nu = (-1)^\nu \cdot \frac{2}{4^\nu \cos \left(U_\nu + \frac{1}{2}\sigma \right)} \sum_{h=1}^{h=2\nu} \frac{\alpha_h}{R_h^{(2\nu)}} \qquad 111)$$

Da die Summation bei u_ν von U_ν unabhängig ist, so erkennt man sofort, dass absolut genommen u_ν zwischen dem Werth unendlich $\left(\text{für } U_\nu + \frac{1}{2}\sigma = \frac{\pi}{2}\right)$ und einem Minimalwerth $\left(\text{für } U_\nu + \frac{1}{2}\sigma = o\right)$ liegt. Bedenkt man, dass u_ν der halbe Abstand zwischen den Maximis und Minimis der ν^{ten} Sinuslinie ist, und dass diese letzte Sinuslinie auf die durch Interferenz aller vorhergehenden $(\nu - 1)$ Sinuslinien erzeugte Kurve um so mehr deformirend wirkt, je grösser u_ν ist, so wird man zu dem Schlusse genöthigt, es müsse die Bedingung, welche noch fehlte, lauten, dass u_ν absolut genommen ein Minimum werde. Dadurch erhält u_ν zugleich den einzigen ausgezeichneten Werth, den es unter allen für dasselbe möglichen Werthen besitzt. Es muss daher für $n = 2\nu$ zu den Gleichungen 20) bis 23) noch die weitere treten

$$U_\nu = -\frac{1}{2}\sigma \tag{112}$$

oder es muss die letzte Winkelkonstante gleich der negativen halben Summe aller gegebenen mit $2\pi : K$ multiplizirten Phasen gesetzt werden. Man überzeugt sich leicht, dass, wenn man etwa $U_\nu + \frac{1}{2}\sigma = \pi$ setzte, was absolut genommen den nämlichen Minimalwerth für u_ν liefert, sich in 107) die Zeichen von u_ν und von $\sin\left(U_\nu + \frac{2\pi\nu}{K}x\right)$ gleichzeitig ändern. Man erhält also in der That durch die Forderung, es solle u_ν ein Minimum werden, immer nur eine einzige Interpolationskurve, oder das Problem ist dann auch für $n = 2\nu$ eindeutig bestimmt.

4.

Die Gleichungen 38) und 48) einerseits, 61), 64) und 67) andrerseits liefern die Mittel zur sofortigen Aufstellung der Bessel'schen Formel für n irgendwie über die Periode des Tages oder des Jahres vertheilte Phasen und Amplituden. Am wichtigsten sind hierbei die Gleichungen 38) und 61), welche u_o geben. Da nämlich ganz allgemein

$$\int_{x=o}^{x=K} \sin\left(U_m + \frac{2\pi m}{K}x\right) dx = o \tag{113}$$

so hat man, wie bekannt

$$u_o = \int_{x=o}^{x=K} y\, dx : K \tag{114}$$

oder es ist u_o unter allen Umständen der Mittelwerth für die Gesammtheit der unendlich vielen Amplituden in der Interpolationskurve, d. h. das Tages- resp. Jahresmittel, wie es aus der Bessel'schen Formel folgt. Die Formeln 38) und 61) zeigen nun, wie diese Mittel aus den innerhalb der betreffenden

Periode gegebenen Beobachtungen in streng wissenschaftlicher Weise abzuleiten sind, im Gegensatz zu den empirischen Methoden, die namentlich bei nichtaequidistanten Beobachtungen vielfach gebräuchlich. Der Wichtigkeit des Gegenstandes wegen will ich eine grössere Anzahl von Beispielen geben. Die numerischen Rechnungen sollen alle auf den täglichen Gang der Lufttemperatur im Juli für St. Petersburg bezogen werden. Ich entnehme dafür dem grossen Werke von H. Wild „Die Temperaturverhältnisse des russischen Reiches", Tabellenband, S. III folgende Werthe (in Graden Celsius):

1^h	15·16	7^h	16·31	13^h	20·36	19^h	19·72
2	14·66	8	17·26	14	20·57	20	18·89
3	14·26	9	18·19	15	20·68	21	17·92
4	14·08	10	18·97	16	20·71	22	17·05
5	14·42	11	19·54	17	20·50	23	16·30
6	15·29	12	20·02	18	20·21	24	15·67

Als wahres Tagesmittel M der Lufttemperatur für den Juli in St. Petersburg folgt hieraus als einfaches arithmetisches Mittel

$$M = 17{\cdot}78^0 \text{ C.}$$

1) Am häufigsten werden drei Beobachtungen täglich angestellt; man hätte also $n = 3$, $\nu = 1$. Aus der Formel 38) erhält man

$$u_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_1 \cos\frac{x_2-x_3}{2}}{\sin\frac{x_2-x_1}{2}\sin\frac{x_3-x_1}{2}} + \frac{\alpha_2 \cos\frac{x_3-x_1}{2}}{\sin\frac{x_1-x_2}{2}\sin\frac{x_3-x_2}{2}} + \frac{\alpha_3 \cos\frac{x_1-x_2}{2}}{\sin\frac{x_1-x_3}{2}\sin\frac{x_2-x_3}{2}}\right) \qquad 115)$$

Ich will diese Formel auf die gebräuchlichsten Kombinationen anwenden.

a) Kombination des russischen Stationsnetzes. Die Termine sind 7, 13, 21^h. Da man die Periode bei einer beliebigen Phase beginnen lassen kann, so ist es am zweckmässigsten, dem ersten Beobachtungstermin immer die Phase 0 zu geben. Man hat dann

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = \frac{\pi}{2}, \qquad x_3 = \frac{7\pi}{6}$$

Statt der Grössen α wähle ich jetzt die Bezeichnung b mit angehängtem Stundenindex, also

$$\alpha_1 = b_7, \qquad \alpha_2 = b_{13}, \qquad \alpha_3 = b_{21}$$

Die Formel 115) gibt dann

$$u_0 = 0{\cdot}3660\, b_7 + 0{\cdot}2113\,(b_{13} + 2\, b_{21}) = M_1$$

Im numerischen Beispiel ist

$$b_7 = 16{\cdot}31 \qquad b_{13} = 20{\cdot}36 \qquad b_{21} = 17{\cdot}92$$

und daraus ergibt sich $M_1 = 17{\cdot}85$

Vergleicht man mit M, so findet man als Korrektion für M_1

$$\delta_1 = -\,0{\cdot}07$$

Auf den russischen Stationen wird zunächst einfach das arithmetische Mittel M_2 aus den drei täglichen Beobachtungen als Tagesmittel angesehen. Man hat in obigem Beispiel

$$M_2 = 18{\cdot}20$$

also Korrektion $\delta_2 = -\,0{\cdot}42$

b) Kombination der Mannheimer Stunden 7, 14, 21^h. Man hat

$$x_1 = 0\,, \qquad x_2 = \frac{7\pi}{12}\,, \qquad x_3 = \frac{7\pi}{6}$$

$$a_1 = b_7\,, \qquad a_2 = b_{14}\,, \qquad a_3 = b_{21}$$

Die Formel 115) liefert

$$u_o = 0{\cdot}3972\,(b_7 + b_{21}) + 0{\cdot}2056\,b_{14} = M_3$$

wofür man füglich auch nehmen könnte

$$u_o = \frac{2\,(b_7 + b_{21}) + b_{14}}{5}$$

Das numerische Beispiel ergibt

$$M_3 = 17{\cdot}82$$

und daraus die Korrektion $\delta_3 = -\,0{\cdot}04$

Für die Mannheimer Kombination ist sehr häufig die empirische Formel in Anwendung gebracht worden

$$M_4 = \frac{b_7 + b_{14} + 2 \cdot b_{21}}{4}$$

Das Beispiel liefert $M_4 = 18{\cdot}18$

mit der Korrektion $\delta_4 = -\,0{\cdot}40$

Auf andere sehr gebräuchliche Kombinationen werde ich im zweiten Abschnitt zurückkommen.

2) Als Beispiel für 4 tägliche Termine wähle ich die Beobachtungen, wie sie während der Jahre 1856 bis 1863 in Lissabon auf dem „Observatorio do Infante D. Luiz“ angestellt wurden (vgl. Annaes do Observatorio. Lisboa 1863, S. CXIV). Die Termine waren 9, 12, 15, 21^h, also

$$x_1 = 0\,, \qquad x_2 = \frac{\pi}{4}\,, \qquad x_3 = \frac{\pi}{2}\,, \qquad x_4 = \pi$$

Mit $n = 4$, also $\nu = 2$ gibt die Formel 61), da

$$U_2 = -\frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = -\frac{7\pi}{8}$$

wird,

$$u_0 = \frac{2\,b_9 + b_{15} + b_{21}}{4} + \frac{(b_9 - 2\,b_{12} + b_{21})}{8\cos\frac{\pi}{4}} = M_5\,.$$

Die numerische Rechnung für Petersburg ergibt

$$M_5 = 18{\cdot}04$$

mithin als Korrektion $\qquad \delta_5 = -0{\cdot}26$

3) In Dorpat werden Wind und Bewölkung täglich nur in den sechs Terminen 7, 10, 13, 16, 19, 22^h beobachtet. Es fragt sich, wie bei diesen Terminen das Tagesmittel abzuleiten sei?

Man hat $n = 6$, $\nu = 3$ und

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{\pi}{4}, \quad x_3 = \frac{\pi}{2}, \quad x_4 = \frac{3\pi}{4}, \quad x_5 = \pi\,, \quad x_6 = \frac{5\pi}{4}.$$

Daraus ergibt sich

$$U_3 = -\frac{15\pi}{8}$$

und die Formel 61) liefert

$$u_0 = \frac{b_7 + b_{13} + b_{16} + b_{22}}{4} + \frac{(b_7 - b_{10} - b_{19} + b_{22})\cos\frac{\pi}{4}}{4} = M_6$$

Im numerischen Beispiel erhält man hiernach

$$M_6 = 17{\cdot}67$$

und als Korrektion $\qquad \delta_6 = +0{\cdot}11$

4) Als letztes Beispiel nehme ich einen Fall von 8 täglichen Beobachtungen, und zwar in den Terminen 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22[h], wie er für die russischen Stationen Bogoslowsk, Slatoust und Lugan während der Jahre 1839 bis 1851 vorliegt (vgl. Annalen des St. Petersburger Centralobservatoriums).

Man hat $n = 8$, $\nu = 4$ und

$$x_1 = 0\,, \qquad x_2 = \frac{\pi}{6}\,, \qquad x_3 = \frac{\pi}{3}\,, \qquad x_4 = \frac{\pi}{2}$$

$$x_5 = \frac{2\pi}{3}\,, \qquad x_6 = \frac{5\pi}{6}\,, \qquad x_7 = \pi\,, \qquad x_8 = \frac{7\pi}{6}$$

Man findet daraus

$$U_4 = -\frac{7\pi}{3}$$

und die Formel 61) liefert

$$u_o = \frac{b_{10} + b_{14} + b_{16} + b_{20}}{4} + \left(b_8 - b_{14} - b_{16} + b_{22} + 2\left(-b_{10} + b_{12} + b_{18} - b_{20}\right)\right) \cos\frac{2\pi}{12} = M_7$$

Das numerische Beispiel gibt

$$M_7 = 17{\cdot}70$$

und als Korrektion $\qquad \delta_7 = +\,0{\cdot}08$

5.

Für den Fall aequidistanter Beobachtungen liessen sich die Konstanten der Bessel'schen Formel aus den Gleichungen 38) und 48), resp. 61), 64) und 67) selbstverständlich ebenfalls ableiten, indessen gewinnt man die bekannten einfachen Resultate erst nach ziemlich verwickelten Untersuchungen. Ich will daher einen direkten Weg zur Auflösung der Systeme 109) und 110) unter Voraussetzung aequidistanter Beobachtungen einschlagen, werde aber dabei annehmen, dass die Phase der ersten Amplitude nicht, wie gewöhnlich vorausgesetzt wird, den Werth Null habe, sondern dass ihr ganz allgemein der Werth a zukomme. Die Reihe der n aequidistanten Phasen lässt sich dann allgemein vorstellen durch $a + \frac{K}{n}(h-1)$ für $h = 1, 2, \ldots n$, wozu die Amplituden α_h für $h = 1, 2, \ldots n$ gehören mögen. Ich führe noch die Bezeichnungen ein

$$\left.\begin{aligned} v &= \frac{2\pi}{n} \\ a_1 &= \frac{2\pi}{K}\,a \end{aligned}\right\} \qquad 116)$$

Zum Unterschiede von dem Falle, wo die Phasen ganz beliebig über die Periode vertheilt sind, sollen bei aequidistanten Werthen die Konstanten der Bessel-schen Formel immer durch u'_0, u'_m, U'_m, p'_m, q'_m bezeichnet werden.

Man hat nun erstens für $n = 2\nu + 1$ als zu konstruirende Formel entsprechend 106)

$$y = u'_0 + \sum_{m=1}^{m=\nu} \left(p'_m \cos \frac{2\pi m}{K} x + q'_m \sin \frac{2\pi m}{K} x\right) \qquad 117)$$

Daraus entspringt durch Einsetzen der aequidistanten Phasen und Amplituden als aufzulösendes System von Gleichungen:

$$a_h = u'_0 + \sum_{m=1}^{m=\nu} \left(p'_m \cos m\left(a_1 + v\,(h-1)\right) + q'_m \sin m\left(a_1 + v\,(h-1)\right)\right) \qquad 118)$$

$$h = 1, 2, \ldots (2\nu + 1)$$

Multiplizirt man die einzelnen Gleichungen dieses Systems entsprechend mit 1, oder mit $\cos k\left(a_1 + v\,(h-1)\right)$, oder mit $\sin k\left(a_1 + v\,(h-1)\right)$, wo k eine der Zahlen $1, 2, \ldots \nu$ ist, und addirt jedesmal alle so transformirten Gleichungen, so verschwinden zufolge bekannter goniometrischer Summenformeln immer alle Unbekannten mit Ausnahme von u'_0, oder p'_k, oder q'_k, und es erscheint u'_0 mit dem Faktor $2\nu + 1$, die andern Grössen aber mit dem Faktor $(2\nu + 1) : 2$ behaftet. Man erhält demnach die Auflösung des Systems 30) in folgender Form:

$$\left.\begin{aligned} u'_0 &= \frac{1}{2\nu+1} \sum_{h=1}^{h=2\nu+1} a_h \\ p'_k &= \frac{2}{2\nu+1} \sum_{h=1}^{h=2\nu+1} a_h \cos k\left(a_1 + v\,(h-1)\right) \\ q'_k &= \frac{2}{2\nu+1} \sum_{h=1}^{h=2\nu+1} a_h \sin k\left(a_1 + v\,(h-1)\right) \end{aligned}\right\} \qquad 119)$$

Man übersieht sofort, dass die algebraische Behandlung des Gleichungssystems 118) genau dieselbe ist wie die, auf welche man durch die Methode der kleinsten Quadrate geführt wird; die Resultate müssen also in beiden Fällen identisch sein.

Es sei zweitens $n = 2\nu$. Die Gleichung 112) liefert zunächst, da an Stelle des Werthes x_h diesmal tritt $a_1 + v\,(h-1)$,

$$U'_\nu = -\frac{1}{2} \sum_{h=1}^{h=2\nu} \left(a_1 + v\,(h-1)\right) = -\left(a_1 \nu + \frac{v\,\nu\,(2\nu - 1)}{2}\right) \qquad 120)$$

oder wegen $v\nu = \pi$ zufolge 116)

$$U'_\nu = -\left(a_1 \nu + \frac{\pi}{2}(2\nu - 1)\right) \qquad 121)$$

Für irgend eine der aequidistanten Phasen $a + \frac{K}{2\nu}(h-1)$ wird dann der Faktor von u'_ν gleich

$$\sin\left(U'_\nu + \nu\left(a_1 + v(h-1)\right)\right) = (-1)^{\nu+h+1} \qquad 122)$$

Man erhält daher entsprechend 107) als aufzulösendes System

$$\alpha_h = u'_o + \sum_{m=1}^{m=\nu-1}\left(p'_m \cos m\left(a_1 + (h-1)v\right) + q'_m \sin m\left(a_1 + (h-1)v\right)\right) + (-1)^{\nu+h+1} u'_\nu \qquad 123)$$

$$h = 1, 2, \ldots (2\nu)$$

Durch den nämlichen Prozess, wie bei $n = 2\nu + 1$, wozu nur noch kommt, dass alle Gleichungen 123) auch entsprechend mit $(-1)^{h-1}$ multiplizirt und dann addirt werden müssen, was alle Unbekannten mit Ausnahme von u'_ν zum Verschwinden bringt, erhält man die Resultate

$$\left.\begin{aligned}
u'_o &= \frac{1}{2\nu}\sum_{h=1}^{h=2\nu} \alpha_h \\
p'_k &= \frac{1}{\nu}\sum_{h=1}^{h=2\nu} \alpha_h \cos k\left(a_1 + v(h-1)\right) \\
q'_k &= \frac{1}{\nu}\sum_{h=1}^{h=2\nu} \alpha_h \sin k\left(a_1 + v(h-1)\right) \\
& k = 1, 2, \ldots (\nu - 1) \\
u'_\nu &= \frac{(-1)^\nu}{2\nu}\sum_{h=1}^{h=2\nu} (-1)^{h-1} \alpha_h
\end{aligned}\right\} \qquad 124)$$

Hierdurch sind alle Konstanten der für $n = 2\nu$ zu konstruirenden Bessel-schen Formel

$$y = u'_o + \sum_{m=1}^{m=\nu-1}\left(p'_m \cos\frac{2\pi m}{K}x + q'_m \sin\frac{2\pi m}{K}x\right) + u'_\nu \sin\left(-\nu a_1 - \frac{\pi}{2}(2\nu-1) + \frac{2\pi\nu}{K}x\right) \qquad 125)$$

(man vergleiche 121)) bestimmt.

Für $a_1 = 0$, d. h. wenn die erste Amplitude auf den Anfang der Periode fällt, reduziren sich die Gleichungen 119) und 124) auf die gewöhnlich zur Bestimmung der Konstanten der Bessel'schen Formel benutzten Ausdrücke. Nur bei u'_ν in 124) pflegt man den Faktor $(-1)^\nu$ wegzulassen, was insofern zulässig ist, als der Faktor, den u'_ν für $a_1 = 0$ in 125) erhält, nämlich $(-1)^\nu \cos \frac{2\pi\nu}{K} x$, dann einfach als $\cos \frac{2\pi\nu}{K} x$ angesetzt wird. Ich werde dies bei späteren Gelegenheiten ebenfalls thun.

Zweiter Abschnitt.

1.

Die eingangs erwähnte Frage kommt auf die Aufstellung der Bessel'schen Formel für n aequidistante und r überzählige Beobachtungen zurück. Dazu ist die Auflösung eines Systems von $n + r$ linearen Gleichungen für die $n + r$ Unbekannten u_o, p_m, q_m erforderlich, welche sich mittelst der im ersten Theile gegebenen Formeln unter allen Umständen bewerkstelligen lässt. Die folgende Ueberlegung führt indessen diese Auflösung auf wesentlich einfachere Verhältnisse zurück.

Man denke sich die Tages- oder Jahreskurve C_n zunächst für die n aequidistanten Beobachtungen aufgestellt; die betreffenden Koeffizienten mögen u'_o, p'_m, q'_m heissen. Die Zahl der Sinuslinien, durch deren Interferenz C_n erzeugt wird, ist 1 vermehrt um die Anzahl der Ganzen in $\frac{n}{2}$, wenn u'_o wie früher als eine Sinuslinie nullter Ordnung aufgefasst wird. Es sei ferner C_{n+r} die Tages- oder Jahreskurve für die $n + r$ Beobachtungen, wobei die Koeffizienten u_o, p_m, q_m sein mögen. Man kann sich dann vorstellen, es sei C_{n+r} durch eine Interferenz von soviel Sinuslinien entstanden, als Ganze in $\frac{n+r}{2} + 1$ enthalten sind.

Die n aequidistanten Beobachtungen können in der meteorologischen Praxis durch Sinuslinien nur auf eine einzige Art dargestellt werden, und diese Darstellung ist eben in der Kurve C_n gegeben, weil zur Bestimmung der letzteren n lineare, also eindeutige Gleichungen für die Unbekannten u'_o, p'_m, q'_m aufzulösen sind.

Die Kurve C_{n+r} stellt neben den r überzähligen Beobachtungen auch die n aequidistanten dar, muss also, da für letztere nach dem eben gesagten nur eine Darstellung möglich ist, immer mit C_n identisch werden, sobald für x eine der aequidistanten Phasen eingesetzt wird. Lässt man die Periode mit der ersten der aequidistanten Phasen beginnen, so sind letztere überhaupt darstellbar durch

$$x = \frac{K}{n}(h - 1) \qquad 126)$$

$$h = 1, 2, \ldots n$$

Soll nun für jeden dieser Werthe der Komplex C_{n+r} mit dem Komplex C_n identisch werden, so kann dies nur geschehen, indem immer eine gewisse Anzahl von Sinusfunktionen des Komplexes C_{n+r} für eine jener Phasen zu einer einzigen Sinusfunktion des Komplexes C_n verschmelzen. Es ist nun leicht zu übersehen, dass zwei Sinusfunktionen überhaupt nur in den beiden Fällen zu einer einzigen neuen Sinusfunktion verschmelzen können, wenn die veränderlichen Theile ihrer Argumente sich entweder zu einem Vielfachen von 2π ergänzen, oder um ein Vielfaches von 2π verschieden sind. Es sei ein solches Vielfaches etwa $2\pi s\,(h-1)$, dann hat man beispielsweise für die Phase $x = \frac{K}{n}\,(h-1)$ als verschmelzbare Sinusfunktionen

$$u_m \sin\left(U_m + \frac{2\pi m}{n}(h-1)\right) = p_m \cdot \cos\frac{2\pi m}{n}(h-1) + q_m \cdot \sin\frac{2\pi m}{n}(h-1) \qquad 127)$$

und 128)

$$u_{ns\pm m} \cdot \sin\left(U_{ns\pm m} + \frac{2\pi\,(ns\pm m)}{n}(h-1)\right) = p_{ns\pm m} \cdot \cos\frac{2\pi m}{n}(h-1) \pm q_{ns\pm m} \cdot \sin\frac{2\pi m}{n}(h-1)$$

Die Konstanten der durch Verschmelzung entstehenden Sinusfunktion sind $p_m + p_{ns\pm m}$ und $q_m \pm q_{ns\pm m}$, während der veränderliche Theil des Arguments $\frac{2\pi m}{n}\,(h-1)$ bleibt.

Ganz allgemein entsteht also durch Verschmelzung der Sinusfunktionen mit den Indices k und $ns \pm k$ aus dem Komplex C_{n+r} die Sinusfunktion mit dem Index k aus dem Komplex C_n, d. h. es muss sein

$$\left.\begin{aligned} p_k + \sum_{s=1} \left(p_{ns-k} + p_{ns+k}\right) &= p'_k \\ q_k + \sum_{s=1} \left(-q_{ns-k} + q_{ns+k}\right) &= q'_k \end{aligned}\right\} \qquad 129)$$

wo die Summationen soweit fortzusetzen sind, als es die Grösse der Zahl $n + r$ erlaubt.

In den Gleichungen 129) ist $k = 1, 2, 3, \ldots$ zu setzen, doch wird man k nur bis zu den in $\frac{n}{2}$ enthaltenen Ganzen gehen lassen, da sonst Gleichungen auftreten, die vorher schon für ein kleineres k vorgekommen sind. Wenn n eine gerade Zahl 2ν ist, so hat man für $k = \nu$, da dann je zwei der Indices $ns + k$ und $ns - k$ identisch werden, einfach zu setzen

$$p_\nu + \sum_{s=1} p_{2\nu s+\nu} = p'_\nu \qquad 130)$$

Aus der zweiten Gleichung 129) verschwindet dann für $k = \nu$ die Grösse q_ν, und man braucht deshalb diese Gleichung nicht weiter zu berücksichtigen. Auch

für $k = 0$ sind die Gleichungen 129) anwendbar, und man erhält wegen $p_o = u_o$, und weil die Indices $ns + k$ und $ns - k$ identisch werden

$$u_o + \sum_{s=1} p_{ns} = u'_o \tag{131}$$

Das ganze Resultat lässt sich folgendermassen auffassen. Vermittelst der Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} & u_o + \sum_{s=1} p_{ns} = u'_o \\ & p_k + \sum_{s=1} \left(p_{ns-k} + p_{ns+k}\right) = p'_k \\ & q_k + \sum_{s=1} \left(- q_{ns-k} + q_{ns+k}\right) = q'_k \\ & k = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}\right\} \tag{132}$$

werden die n ersten Unbekannten u_o, p_m, q_m durch die übrigen r Unbekannten in der einfachsten Weise ausgedrückt, nachdem die Koeffizienten u'_o, p'_m, q'_m der Bessel'schen Formel für die n aequidistanten Beobachtungen bestimmt worden sind. Dann bleibt nur noch die Auflösung eines Systems von r linearen Gleichungen für jene r Unbekannten auszuführen, um die gestellte Aufgabe vollständig zu erledigen. Es ist klar, dass der hier vorgezeichnete Weg ausserordentlich viel einfacher ist, als wenn man nach den im ersten Theile entwickelten Ausdrücken die Bessel'sche Formel für $n + r$ Beobachtungen, die keine aequidistante Reihe bilden, direkt ableiten wollte.

2.

Wohl weitaus am häufigsten ist in der meteorologischen Praxis der Spezialfall, in dem die Zahl der überzähligen Beobachtungen geringer ist, als die der aequidistanten, also $r < n$. Ich will denselben seiner hervorragenden Wichtigkeit wegen im Anschluss an das vorhergehende ausführlicher behandeln.

Die Tages- resp. Jahreskurve C_{n+r} hat die Gestalt

$$y = u_o + \sum_{m=1} \left(p_m \cos \frac{2\pi m}{K} x + q_m \sin \frac{2\pi m}{K} x\right) \tag{133}$$

Da nach der Voraussetzung $n + r < 2n$, so sind mindestens alle diejenigen p_m und q_m gleich Null zu setzen, bei denen der Index m den Werth $n - 1$ übersteigt, also

$$0 = p_n = q_n = p_{n+1} = q_{n+1} = \ldots \text{ u. s. f.} \tag{134}$$

Die Tageskurve C_n für die aequidistanten Beobachtungen allein werde wie früher durch

$$y = u'_0 + \sum_{m=1} \left(p'_m \cos \frac{2\pi m}{K} x + q'_m \sin \frac{2\pi m}{K} x\right) \tag{135}$$

dargestellt.

Die Gleichung 131) reduzirt sich zufolge der über die p und q mit höheren Indices in 134) gemachten Angaben sofort auf das bemerkenswerthe Resultat:

$$u_0 = u'_0 \tag{136}$$

Sobald also die Anzahl der überzähligen Beobachtungen kleiner ist als die der aequidistanten, ist der Mittelwerth (das Tages- oder Jahresmittel) für die auf $n + r$ Werthe gegründete Tages- oder Jahreskurve genau derselbe, wie der aus den n aequidistanten Beobachtungen allein abgeleitete. Die Hinzunahme von überzähligen Beobachtungen vermag daher, so lange $r < n$, unter keinen Umständen einen genaueren Werth für das Tages- oder Jahresmittel zu verschaffen. Die gewichtige Bedeutung der Aequidistanz tritt hierdurch auf das schärfste hervor.

Versteht man unter Kurvenfläche das von der Kurve selbst, von den zu den Phasen $x = 0$ und $x = K$ gehörenden Ordinaten und von der Abscissenaxe begrenzte Stück der Koordinatenebene, so ist das Produkt $K u_0$ gleich der Kurvenfläche, wenn die einzelnen Flächenelemente mit dem Zeichen der Ordinate behaftet werden. Das oben gewonnene Resultat kann dann auch folgendermassen ausgesprochen werden.

Zieht man zu einer Schaar von n aequidistanten Beobachtungen, denen eine Kurve C_n entspreche, der Reihe nach 1, 2, . . . r überzählige Beobachtungen hinzu, wodurch die Kurven C_{n+1}, C_{n+2}, . . C_{n+r} entstehen, so sind alle diese Kurven C_n bis C_{n+r} insofern wesentlich verschieden von einander, als z. B. die Phasen der Media und der Extreme, sowie die Amplituden der letzteren von Kurve zu Kurve wechseln; die Kurvenfläche aber ist bei allen dieselbe, so lange $r < n$ ist.

Die Gleichungen 129) reduziren sich nun auf

$$\left.\begin{aligned} p_k + p_{n-k} &= p'_k \\ q_k - q_{n-k} &= q'_k \end{aligned}\right\} \tag{137}$$

und die Gleichung 130) auf

$$p_\nu = p'_\nu \tag{138}$$

falls $n = 2\nu$ ist; für p'_ν kann direkt u'_ν gesetzt werden, mit Rücksicht auf 125) und die daran geknüpfte Bemerkung.

Solange r seine obere Grenze $n - 1$ nicht erreicht, werden für die kleineren Werthe von k, etwa $k = 1, 2, \ldots$, die Koeffizienten p_{n-k} und q_{n-k} verschwinden, d. h. es wird in diesen Fällen

$$p_k = p' \qquad\qquad q_k = q'_k \tag{139}$$

D a n n h a t d i e K u r v e C_{n+r} m i t d e r K u r v e C_n e i n e A n z a h l v o n S i n u s l i n i e n , u n d z w a r d i e e r s t e n , g e m e i n s a m. Dies sind aber in der Regel die Sinuslinien mit den grössten Werthen des Koeffizienten u_m, welche demzufolge am meisten bestimmend auf den allgemeinen Verlauf der Kurve einwirken, und so sieht man auch hier, wie die Bedeutung der Aequidistanz gegenüber dem Vorkommen von in der Periode irgendwie zerstreuten Beobachtungen hervorleuchtet. Erst für $r = n - 1$ werden alle Sinuslinien der Kurve C_n transformirt, nur u'_0, die Sinuslinie nullter Ordnung, bleibt noch unberührt, bis für $r = n$ auch dieser Werth eine Aenderung erleidet. Der neue Werth u_0 ist indessen im allgemeinen für das Intervall von $r = n$ bis $r = 2n - 1$ keineswegs konstant, wie es der alte Werth u'_0 für $r = 0$ bis $r = n - 1$ war; vielmehr ändert sich derselbe nun mit jeder neu hinzutretenden überzähligen Beobachtung, wie man leicht aus 132) ersieht.

E i n e V e r s c h ä r f u n g d e r a u s a e q u i d i s t a n t e n B e o b a c h t u n g e n g e w o n n e n e n M i t t e l w e r t h e i s t m i t t e l s t ü b e r z ä h l i g e r B e o b a c h t u n g e n n u r z u e r l a n g e n , w e n n d e r e n A n z a h l d i e d e r a e q u i d i s t a n t e n e r r e i c h t o d e r ü b e r t r i f f t.

Ich knüpfe an die vorstehenden Erörterungen ein paar Beispiele.

1) An sehr vielen meteorologischen Stationen, wo nur dreimal täglich beobachtet wird, sind zwei der Termine um 12 Stunden von einander entfernt. Die Beobachtungsresultate mögen durch b_h, b_{h+z}, b_{h+12} bezeichnet werden, wo h, $h + z$, $h + 12$ die Beobachtungsstunden vorstellen. Nach dem obigen ist dann als einziges streng wissenschaftlich begründetes Tagesmittel anzusehen das arithmetische Mittel $\frac{1}{2}(b_h + b_{h+12})$, so dass die Beobachtung b_{h+z} auf den Mittelwerth in keiner Weise Einfluss hat. Dass unter diesen Umständen je nach der Natur des betreffenden Elementes (man denke nur an den Luftdruck!) sehr schlechte Mittelwerthe zum Vorschein kommen können, ist klar, allein die Schuld liegt dann nicht an der doch ganz streng begründeten Methode, sondern an der allzugeringen Anzahl der täglichen Beobachtungen. Wenn man aber, wie dies, um nur einige wenige Beispiele anzuführen, auf den bayerischen Stationen (Termine 8, 14, 20^h) und auf den meisten italienischen Stationen (Termine 9, 15, 21^h) geschieht, als Tagesmittel für absolute und relative Feuchtigkeit und Bewölkung einfach das arithmetische Mittel aus den Beobachtungen aller drei Termine in Rechnung bringt, so lässt sich dies wissenschaftlich nicht rechtfertigen. Die arithmetischen Mittel aus den Beobachtungen der beiden aequidistanten Termine verdienen für jene Elemente wenigstens jedenfalls grösseres Zutrauen.

2) Auf dem Observatorium in Madrid, dessen Publikationen in der Bibliothek des hiesigen Observatoriums leider nur bis zum Jahrgang 1875 vorhanden sind, wurde täglich siebenmal, in den Terminen 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24^h beobachtet. Im Jahrgang 1875, S. VIII der Einleitung ist angegeben, dass die Werthe für den Termin 3^h interpolirt wurden, indem man die Bessel'sche Formel für obige sieben Termine aufstellte und darnach die Werthe für die Phase 3^h berechnete. Die betreffenden Bessel'schen Formeln finden sich beispielsweise für die Temperatur der Luft nach Monat, Jahreszeit und Jahr auf S. 159, jedoch nur mit 5 Konstanten, statt der 7, welche hätten gewonnen werden können. Die Folge ist, dass die ausserordentlich einfache Weise, in welcher die Werthe für 3^h aus der vollständigen Bessel'schen Formel im vorliegenden Falle zu gewinnen sind, vollkommen übersehen wurde, und dass ausserdem für jenen Termin durchweg Werthe abgeleitet wurden, die man durch theoretisch zweifellos schärfere ersetzen muss. Nach dem oben abgeleiteten Satz ist nämlich der Mittelwerth für die sieben genannten Termine identisch mit dem Mittelwerth aus den vier aequidistanten Terminen 6, 12, 18, 24^h. Da nun der Aequidistanz wegen schliesslich als Tagesmittel auch das arithmetische Mittel aus den sieben beobachteten und dem einen interpolirten Terminresultat anzusehen ist, so folgt sofort:

Wahres Tagesmittel $= \frac{1}{4}(b_6 + b_{12} + b_{18} + b_{24})$.

Interpolirter Werth für b_3 nach der vollständigen Bessel'schen Formel

$$b_3 = b_6 + b_{12} + b_{18} + b_{24} - (b_9 + b_{15} + b_{21})$$

In der That gibt die strenge Rechnung nach den Gleichungen 38) und 70) genau obige Werthe für das Tagesmittel u_n und für b_3.

3.

Es sollen nun die für $r < n$ aufzulösenden Gleichungssysteme in eine für die praktische Rechnung geeignetere Form gebracht werden. Die Reihe der mit $x = 0$ beginnenden aequidistanten Phasen sei durch $\frac{K}{n}(h - 1)$ mit der zugehörigen Amplitude α_h für $h = 1, 2, \ldots n$ dargestellt. Die überzähligen Phasen seien ξ_l, ihre Amplituden β_l für $l = 1, 2, \ldots r$. Es werde noch, wie früher

$$\frac{2\pi}{n} = v \tag{140}$$

$$\frac{2\pi}{K} \cdot \xi_l = x_l \tag{141}$$

gesetzt. Die Resultate gestalten sich etwas verschieden, je nachdem n und r gerade oder ungerade sind. Von den 4 möglichen Fällen werde ich indessen nur einen

ausführlicher behandeln; für die übrigen, bei denen man ganz analog vorzugehen hat, beschränke ich mich bei der Entwickelung auf die Hauptpunkte.

a) $n = 2\nu$, $r = 2\rho + 1$

Die Bedingung $r < n$ kann hier offenbar durch die andere $\rho < \nu$ ersetzt werden. Die Formel für C_{n+r} lautet

$$y = u_0 + \sum_{m=1}^{m=\nu+\rho} \left(p_m \cos \frac{2\pi m}{K} x + q_m \sin \frac{2\pi m}{K} x\right) \tag{142}$$

Man hat zunächst für die 2ν aequidistanten Beobachtungen nach 124) und 125) mit der dort gemachten Bemerkung für $a_1 = 0$

$$y = u'_0 + \sum_{m=1}^{m=\nu-1} \left(p'_m \cos \frac{2\pi m}{K} x + q'_m \sin \frac{2\pi m}{K} x\right) + u'_\nu \cos \frac{2\pi \nu}{K} x \tag{143}$$

$$\left.\begin{aligned}
u'_0 &= \frac{1}{2\nu} \sum_{h=1}^{h=2\nu} \alpha_h \\
p'_k &= \frac{1}{\nu} \sum_{h=1}^{h=2\nu} \alpha_h \cos k v (h-1) \\
q'_k &= \frac{1}{\nu} \sum_{h=1}^{h=2\nu} \alpha_h \sin k v (h-1) \\
u'_\nu &= \frac{1}{2\nu} \sum_{h=1}^{h=2\nu} (-1)^{h-1} \alpha_h
\end{aligned}\right\} \quad k = 1, 2, \ldots (\nu - 1) \tag{144}$$

Die 2ν aequidistanten Beobachtungen liefern das Gleichungssystem S_1:

$$\alpha_h = u_0 + \sum_{m=1}^{m=\nu+\rho} \left(p_m \cos m v (h-1) + q_m \sin m v (h-1)\right) \tag{145}$$

$$h = 1, 2, \ldots (2\nu)$$

während die $2\rho + 1$ überzähligen Beobachtungen das System S_2 geben:

$$\beta_l = u_0 + \sum_{m=1}^{m=\nu+\rho} \left(p_m \cos m x_l + q_m \sin m x_l\right) \tag{146}$$

$$l = 1, 2, \ldots (2\rho + 1)$$

Das System S_1 lässt sich nun vollkommen durch die Gleichungen 136), 137) und 138) ersetzen, d. h. man hat die 2ν Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} & u_o = u'_o \\ & \left.\begin{aligned} p_k &= p'_k - p_{2\nu-k} \\ q_k &= q'_k + q_{2\nu-k} \end{aligned}\right\} k = 1, 2, \ldots (\nu - 1) \\ & p_\nu = p'_\nu = u'_\nu \end{aligned}\right\} \tag{147}$$

Beiläufig mag hier folgendes bemerkt werden. Die Koeffizienten mit den höchsten Indices sind $p_{\nu+\rho}$ und $q_{\nu+\rho}$; so lange also $2\nu - k > \nu + \rho$, d. h. $k < \nu - \rho$, sind die Koeffizienten $p_{2\nu-k}$ und $q_{2\nu-k}$ gleich Null zu setzen, oder es wird

$$\left.\begin{aligned} p_k &= p'_k \\ q_k &= q'_k \end{aligned}\right\} k = 1, 2, \ldots (\nu - \rho - 1) \tag{148}$$

Die gesuchte Kurve $C_{2\nu+2\rho+1}$ hat daher mit der auf die Aequidistanz allein gegründeten Kurve $C_{2\nu}$ die $\nu - \rho - 1$ ersten Sinuslinien und u_o gemeinsam.

Substituirt man die Werthe aus 147) in das System 146), nachdem die Summation in passende Theile zerlegt ist, so entsteht

$$\left.\begin{aligned} \beta_l = u'_o + \sum_{m=1}^{m=\nu-1} & \Big((p'_m - p_{2\nu-m}) \cos mx_l + (q'_m + q_{2\nu-m}) \sin mx_l\Big) \\ & + u'_\nu \cos \nu x_l + q_\nu \sin \nu x_l \\ & + \sum_{m=\nu+1}^{m=\nu+\rho} \Big(p_m \cos mx_l + q_m \sin mx_l\Big) \\ & \qquad l = 1, 2, \ldots (2\rho + 1) \end{aligned}\right\} \tag{149}$$

Aus der für die aequidistanten Werthe berechneten Kurve $C_{2\nu}$ in 143) lässt sich die der Phase ξ_l zukommende Amplitude, welche ich durch β'_l bezeichnen will, bestimmen; man hat nämlich

$$\beta'_l = u'_o + \sum_{m=1}^{m=\nu-1} \Big(p'_m \cos mx_l + q'_m \sin mx_l\Big) + u'_\nu \cos \nu x_l \tag{150}$$

und hiermit geht 149) über in

$$\left.\begin{aligned}{}_l\beta_l - {}_l\beta_l' = q_\nu \sin \nu x_l + \sum_{m=1}^{m=\nu-1} \left(- p_{2\nu-m} \cos m x_l + q_{2\nu-m} \sin m x_l\right) \\ + \sum_{m=\nu+1}^{m=\nu+\rho} \left(p_m \cos m x_l + q_m \sin m x_l\right) \\ l = 1, 2, \ldots (2\rho + 1)\end{aligned}\right\} \quad 151)$$

Hier ist die linke Seite die Abweichung der wahren Kurve von $C_{2\nu}$ an der Stelle mit der Phase ξ_l. Die erste Summation rechts kann auf $m = \nu - \rho$ bis $m = \nu - 1$ beschränkt werden, da alle p und q mit höherem Index als $\nu + \rho$ verschwinden. Durch einfache Transformationen entsteht dann

$$\left.\begin{aligned}\beta_l - \beta_l' = q_\nu \sin \nu x_l + \sum_{m=\nu+1}^{m=\nu+\rho} \left(- p_m \cos (2\nu - m)\, x_l + q_m \sin (2\nu - m)\, x_l\right) \\ + \sum_{m=\nu+1}^{m=\nu+\rho} \left(p_m \cos m x_l + q_m \sin m x_l\right)\end{aligned}\right\} \quad 152)$$

Vereinigt man hier die entsprechenden Theilsätze, so erhält man schliesslich als einfachste Gestalt des Systems der finalen Gleichungen für die noch übrigen $2\rho + 1$ Unbekannten $p_{\nu+1}, \ldots p_{\nu+\rho}, \; q_\nu, \; q_{\nu+1}, \ldots q_{\nu+\rho}$

$$\frac{\beta_l - \beta_l'}{2 \sin \nu x_l} = \frac{1}{2} q_\nu + \sum_{m=1}^{m=\rho} \left(- p_{\nu+m} \sin m x_l + q_{\nu+m} \cos m x_l\right) \quad 153)$$

$$l = 1, 2, \ldots (2\rho + 1)$$

Ist nur e i n e überzählige Beobachtung vorhanden, also $\rho = 0$, so reduzirt sich hier die rechte Seite auf den ersten Theilsatz.

Man erkennt sofort, dass das System 153) nach sehr einfachen Modifikationen vermittelst der im ersten Theile durch die Gleichungen 38) und 48) gegebenen Formeln direkt aufgelöst werden kann. Man hat nur in 7) die Grössen u_o, p_m und q_m durch $\frac{1}{2} q_\nu$, $q_{\nu+m}$ und $-p_{\nu+m}$ zu ersetzen, während ν in ρ und α_h in die linke Seite von 153) übergeht.

b) $n = 2\nu, \qquad r = 2\rho.$

Die Bedingung lautet $\rho < \nu$. Die zu bestimmende Formel ist

$$y = u_o + \sum_{m=1}^{m=\nu+\rho-1} \left(p_m \cos \frac{2\pi m}{K} x + q_m \sin \frac{2\pi m}{K} x\right) + u_{\nu+\rho} \sin \left(U_{\nu+\rho} + \frac{2\pi(\nu+\rho)}{K} x\right) \quad 154)$$

wo nach 112) sein muss

$$U_{\nu+\rho} = -\frac{\pi}{2}(2\nu - 1) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=2\rho} x_k \tag{155}$$

Die Gleichungen 143), 144), 147), 150) bleiben die nämlichen. Setzt man anfänglich

$$\left.\begin{aligned} u_{\nu+\rho} \sin U_{\nu+\rho} &= p_{\nu+\rho} \\ u_{\nu+\rho} \cos U_{\nu+\rho} &= q_{\nu+\rho} \end{aligned}\right\} \tag{156}$$

so kann die übrige Entwickelung wie bei a) vorgenommen werden. Man muss schliesslich nur in 153) den Theilsatz für $m = \rho$ für sich nehmen und die eben angeführten Werthe für $p_{\nu+\rho}$ und $q_{\nu+\rho}$ wieder einsetzen. Das finale Gleichungssystem für die 2ρ Unbekannten $p_{\nu+1}, \ldots p_{\nu+\rho-1}, q_\nu, q_{\nu+1}, \ldots q_{\nu+\rho-1}, u_{\nu+\rho}$ lautet dann

$$\frac{\beta_l - \beta_l'}{2 \sin \nu x_l} = \frac{1}{2} q_\nu + \sum_{m=1}^{m=\rho-1}\left(-p_{\nu+m} \sin m x_l + q_{\nu+m} \cos m x_l\right) + u_{\nu+\rho} \cos\left(U_{\nu+\rho} + \rho x_l\right) \tag{157}$$

$$l = 1, 2, \ldots (2\rho)$$

Dasselbe kann wiederum nach den im ersten Theile gegebenen Formeln aufgelöst werden, und zwar durch Reduktion auf das System 8) oder 49).

c) $n = 2\nu + 1, \qquad r = 2\rho + 1.$

Es muss hier $\rho < \nu$ sein. Die zu ermittelnde Formel hat die Gestalt

$$y = u_o + \sum_{m=1}^{m=\nu+\rho}\left(p_m \cos\frac{2\pi m}{K} x + q_m \sin\frac{2\pi m}{K} x\right) + u_{\nu+\rho+1} \sin\left(U_{\nu+\rho+1} + \frac{2\pi(\nu+\rho+1)}{K} x\right) \tag{158}$$

mit der Bedingung nach 112)

$$U_{\nu+\rho+1} = -\nu\pi - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=2\rho+1} x_k \tag{159}$$

Man hat zunächst für die $2\nu + 1$ aequidistanten Beobachtungen

$$y = u_o' + \sum_{m=1}^{m=\nu}\left(p_m' \cos\frac{2\pi m}{K} x + q_m' \sin\frac{2\pi m}{K} x\right) \tag{160}$$

$$\left.\begin{aligned} u'_0 &= \frac{1}{2\nu+1}\sum_{h=1}^{h=2\nu+1}\alpha_h \\ p'_k &= \frac{2}{2\nu+1}\sum_{h=1}^{h=2\nu+1}\alpha_h\cos k v\,(h-1) \\ q'_k &= \frac{2}{2\nu+1}\sum_{h=1}^{h=2\nu+1}\alpha_h\sin k v\,(h-1) \end{aligned}\right\} k = 1,\ 2, \ldots \nu \tag{161}$$

Aus 136) und 137) folgt dann

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= u'_0 \\ p_k &= p'_k - p_{2\nu+1-k} \\ q_k &= q'_k + q_{2\nu+1-k} \end{aligned}\right\} k = 1,\ 2, \ldots \nu \tag{162}$$

wodurch die $2\nu + 1$ ersten Unbekannten ausgedrückt werden. Man berechnet ferner β'_l aus der Gleichung

$$\beta'_l = u'_0 + \sum_{m=1}^{m=\nu}\left(p'_m \cos m x_l + q_m \sin m x_l\right) \tag{163}$$

Führt man dann anfänglich, wie bei b)

$$\left.\begin{aligned} u_{\nu+\rho+1}\sin U_{\nu+\rho+1} &= p_{\nu+\rho+1} \\ u_{\nu+\rho+1}\cos U_{\nu+\rho+1} &= q_{\nu+\rho+1} \end{aligned}\right\} \tag{164}$$

ein, um erst schliesslich diese rechten Seiten wieder durch die linken zu ersetzen, so kommt nach Transformationen, welche den in a) angewandten vollkommen analog sind, als finales System für die $2\rho + 1$ Unbekannten $p_{\nu+1}, \ldots p_{\nu+\rho}$, $q_{\nu+1}, \ldots q_{\nu+\rho}$, $u_{\nu+\rho+1}$ zum Vorschein

$$\frac{\beta_l - \beta'_l}{2\sin\frac{2\nu+1}{2}x_l} = \sum_{m=1}^{m=\rho}\left(-p_{\nu+m}\sin\frac{2m-1}{2}x_l + q_{\nu+m}\cos\frac{2m-1}{2}x_l\right) + u_{\nu+\rho+1}\cos\left(U_{\nu+\rho+1} + \frac{2\rho+1}{2}x_l\right) \tag{165}$$

$$l = 1,\ 2, \ldots (2\rho + 1)$$

d) $n = 2\nu + 1$, $\quad r = 2\rho$.

Man hat hier die Bedingung $\rho < \nu + 1$, und die Bessel'sche Formel lautet

$$y = u_0 + \sum_{m=1}^{m=\nu+\rho}\left(p_m \cos\frac{2\pi m}{K}x + q_m \sin\frac{2\pi m}{K}x\right) \tag{166}$$

Die Gleichungen 160) bis 163) bleiben die nämlichen, und das System der Endgleichungen für die 2ρ Unbekannten $p_{\nu+1}, \ldots p_{\nu+\rho}, q_{\nu+1}, \ldots q_{\nu+\rho}$ wird

$$\frac{\beta_l - \beta'_l}{2 \sin \frac{2\nu+1}{2} x_l} = \sum_{m=1}^{m=\rho} \left(- p_{\nu+m} \sin \frac{2m-1}{2} x_l + q_{\nu+m} \cos \frac{2m-1}{2} x_l \right) \qquad 167)$$

$$l = 1, 2, \ldots (2\rho)$$

Für Gleichungen von der Form 165) oder 167) ist die allgemeine Auflösung im ersten Theile ebenfalls gegeben worden; es lassen sich nämlich 165) und 167) auf die Systeme 82) und 82 a) reduziren.

Zusammenfassung der Ergebnisse.

1. Die Bessel'sche Formel darf nicht auf Wahrscheinlichkeitsrechnung gegründet werden.
2. Die Bessel'sche Formel muss immer als ein Aggregat von Sinuslinien aufgefasst werden, welche sowohl für $n = 2\nu + 1$, als auch für $n = 2\nu$ vom 0 fachen bis zum ν fachen Winkel gehn.
3. Die Berechnung der Konstanten kommt immer auf die Auflösung eines definiten Systems von Gleichungen zurück; für ein ungerades n reichen die gegebenen Bedingungen dazu vollkommen aus, während für ein gerades n die Bedingung hinzugezogen werden muss, dass die Winkelkonstante der ν^{ten} Sinuslinie gleich der negativen halben Summe aller gegebenen, in Bogen ausgedrückten Phasen ist.
4. Beim Auftreten von r überzähligen Beobachtungen neben n aequidistanten reduzirt sich die Aufstellung der Bessel'schen Formel auf folgende Aufgaben:
   a) Bestimmung der Bessel'schen Formel C_n für die n aequidistanten Beobachtungen.
   b) Ersetzung der n ersten Unbekannten durch die r letzten.
   c) Ermittelung der den überzähligen Phasen in C_n entsprechenden Amplituden.
   d) Auflösung eines Systems von r linearen Gleichungen für die r letzten Unbekannten.
5. Der aus aequidistanten Beobachtungen abgeleitete Mittelwerth bleibt bei Zuziehung überzähliger Beobachtungen vollkommen unverändert, so lange die Anzahl der letzteren die der aequidistanten Beobachtungen nicht erreicht.

Dorpat, Oktober 1887.

Nachwort.

Der zweite Theil der vorliegenden Abhandlung wurde am Ende des vorigen Jahres an die Redaktion der meteorologischen Zeitschrift nach Hamburg gesandt. Die Redaktion hat aus Gründen verschiedener Art den Abdruck für nicht opportun befunden. Ich muss es den Fachgenossen überlassen die angezweifelte Richtigkeit meiner Resultate zu prüfen. Bei dem hier erfolgten Abdrucke sind nur diejenigen Kürzungen vorgenommen worden, welche durch den Abdruck des ersten Theils, der ursprünglich in einer mathematischen Zeitschrift veröffentlicht werden sollte, geboten erschienen. In Bezug auf die Ueberlegungen, mit denen der zweite Abschnitt beginnt, und wodurch die in der Zusammenfassung unter 4. und 5. angeführten Ergebnisse gewonnen wurden, habe ich noch folgendes zu bemerken. Ursprünglich waren die im zweiten Abschnitt 1 (S. 35) mitgetheilten Resultate alle nur mit Hülfe sehr weitläufiger Rechnungsoperationen ermittelt worden. Das Bestreben, im Interesse eines leichteren Verständnisses rein mathematische Entwickelungen möglichst zurückzudrängen, führte endlich zu der Darstellung, welche a. a. O. gegeben ist. Dieselbe mag noch durch folgendes einfache Beispiel illustrirt werden, welches den Einblick in den Gang des allgemeinen Verfahrens erleichtert.

Es sei $n = 5$, und r beliebig gross. Dann hat man etwa für $h = 2$

$$\begin{aligned}\alpha_2 = u_0 &+ u_1 \sin\left(U_1 + \frac{2\pi}{5}\right) + u_2 \sin\left(U_2 + \frac{4\pi}{5}\right) + u_3 \sin\left(U_3 + \frac{6\pi}{5}\right)\\ &+ u_4 \sin\left(U_4 + \frac{8\pi}{5}\right) + u_5 \sin\left(U_5 + \frac{10\pi}{5}\right) + u_6 \sin\left(U_6 + \frac{12\pi}{5}\right)\\ &+ u_7 \sin\left(U_7 + \frac{14\pi}{5}\right) + u_8 \sin\left(U_8 + \frac{16\pi}{5}\right) + u_9 \sin\left(U_9 + \frac{18\pi}{5}\right)\\ &+ u_{10} \sin\left(U_{10} + \frac{20\pi}{5}\right) + \ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}\alpha_2 = u_0 &+ p_1 \cos\frac{2\pi}{5} + q_1 \sin\frac{2\pi}{5} + p_2 \cos\frac{4\pi}{5} + q_2 \sin\frac{4\pi}{5} + p_3 \cos\frac{6\pi}{5} + q_3 \sin\frac{6\pi}{5}\\ &+ p_4 \cos\frac{8\pi}{5} + q_4 \sin\frac{8\pi}{5} + p_5 \cos\frac{10\pi}{5} + q_5 \sin\frac{10\pi}{5} + p_6 \cos\frac{12\pi}{5} + q_6 \sin\frac{12\pi}{5}\\ &+ p_7 \cos\frac{14\pi}{5} + q_7 \sin\frac{14\pi}{5} + p_8 \cos\frac{16\pi}{5} + q_8 \sin\frac{16\pi}{5} + p_9 \cos\frac{18\pi}{5} + q_9 \sin\frac{18\pi}{5}\\ &+ p_{10} \cos\frac{20\pi}{5} + q_{10} \sin\frac{20\pi}{5} + \ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

aber auch noch

$$\alpha_2 = u_0' + p_1' \cos\frac{2\pi}{5} + q_1' \sin\frac{2\pi}{5} + p_2' \cos\frac{4\pi}{5} + q_2' \sin\frac{4\pi}{5}$$

Nun ist

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \cos\frac{8\pi}{5} = \cos\frac{12\pi}{5} = \cos\frac{18\pi}{5}; \; \sin\frac{2\pi}{5} = -\sin\frac{8\pi}{5} = \sin\frac{12\pi}{5} = -\sin\frac{18\pi}{5}$$

$$\cos\frac{4\pi}{5} = \cos\frac{6\pi}{5} = \cos\frac{14\pi}{5} = \cos\frac{16\pi}{5}; \; \sin\frac{4\pi}{5} = -\sin\frac{6\pi}{5} = \sin\frac{14\pi}{5} = -\sin\frac{16\pi}{5}$$

$$1 = \cos\frac{10\pi}{5} = \cos\frac{20\pi}{5}; \qquad 0 = \sin\frac{10\pi}{5} = \sin\frac{20\pi}{5}$$

Der obige zweite Ausdruck für α_2 reduzirt sich hierdurch auf

$$\begin{aligned}\alpha_2 = u_0 + p_5 + p_{10} + \ldots\ldots \\ + \cos\frac{2\pi}{5}\cdot(p_1 + p_4 + p_6 + p_9 + \ldots\ldots) \\ + \sin\frac{2\pi}{5}\cdot(q_1 - q_4 + q_6 - q_9 + \ldots\ldots) \\ + \cos\frac{4\pi}{5}\cdot(p_2 + p_3 + p_7 + p_8 + \ldots\ldots) \\ + \sin\frac{4\pi}{5}\cdot(q_2 - q_3 + q_7 - q_8 + \ldots\ldots)\end{aligned}$$

d. h. es ergibt sich beim Vergleich mit der dritten Gleichung für α_2

$$\begin{aligned}u_0' &= u_0 + p_5 + p_{10} + \ldots\ldots = u_0 + \sum_{s=1} p_{5s} \\ p_1' &= p_1 + p_4 + p_6 + p_9 + \ldots\ldots = p_1 + \sum_{s=1} (p_{5s-1} + p_{5s+1}) \\ q_1' &= q_1 - q_4 + q_6 - q_9 + \ldots\ldots = q_1 + \sum_{s=1} (-q_{5s-1} + q_{5s+1}) \\ p_2' &= p_2 + p_3 + p_7 + p_8 + \ldots\ldots = p_2 + \sum_{s=1} (p_{5s-2} + p_{5s+2}) \\ q_2' &= q_2 - q_3 + q_7 - q_8 + \ldots\ldots = q_2 + \sum_{s=1} (-q_{5s-2} + q_{5s+2})\end{aligned}$$

Diese Formeln entsprechen genau den Gleichungen 132).

Dorpat, Februar 1888. *W.*

Schriften
herausgegeben von der Naturforscher-Gesellschaft
bei der Universität Dorpat.
V.

Fortsetzung der Neuen Untersuchungen

über die

Bessel'sche Formel und deren Verwendung in der Meteorologie

von

Dr. **Karl Weihrauch**,
ord. Professor der physikalischen Geographie an der Universität Dorpat

Dorpat.

Druck von C. Mattiesen.

1890.

In Commission bei
K. F. Koehler in Leipzig, Th. Hoppe und E. J. Karow in Dorpat.

aber auch noch

$$\alpha_2 = u_0' + p_1' \cos\frac{2\pi}{5} + q_1' \sin\frac{2\pi}{5} + p_2' \cos\frac{4\pi}{5} + q_2' \sin\frac{4\pi}{5}$$

Nun ist

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \cos\frac{8\pi}{5} = \cos\frac{12\pi}{5} = \cos\frac{18\pi}{5};\ \sin\frac{2\pi}{5} = -\sin\frac{8\pi}{5} = \sin\frac{12\pi}{5} = -\sin\frac{18\pi}{5}$$

$$\cos\frac{4\pi}{5} = \cos\frac{6\pi}{5} = \cos\frac{14\pi}{5} = \cos\frac{16\pi}{5};\ \sin\frac{4\pi}{5} = -\sin\frac{6\pi}{5} = \sin\frac{14\pi}{5} = -\sin\frac{16\pi}{5}$$

$$1 = \cos\frac{10\pi}{5} = \cos\frac{20\pi}{5}; \qquad 0 = \sin\frac{10\pi}{5} = \sin\frac{20\pi}{5}$$

Der obige zweite Ausdruck für α_2 reduzirt sich hierdurch auf

$$\begin{aligned}\alpha_2 = u_0 + p_5 + p_{10} + \dots \\ + \cos\frac{2\pi}{5}\cdot(p_1 + p_4 + p_6 + p_9 + \dots) \\ + \sin\frac{2\pi}{5}\cdot(q_1 - q_4 + q_6 - q_9 + \dots) \\ + \cos\frac{4\pi}{5}\cdot(p_2 + p_3 + p_7 + p_8 + \dots) \\ + \sin\frac{4\pi}{5}\cdot(q_2 - q_3 + q_7 - q_8 + \dots)\end{aligned}$$

d. h. es ergibt sich beim Vergleich mit der dritten Gleichung für α_2

$$\begin{aligned} u_0' &= u_0 + p_5 + p_{10} + \dots &&= u_0 + \sum_{s=1} p_{5s} \\ p_1' &= p_1 + p_4 + p_6 + p_9 + \dots &&= p_1 + \sum_{s=1} (p_{5s-1} + p_{5s+1}) \\ q_1' &= q_1 - q_4 + q_6 - q_9 + \dots &&= q_1 + \sum_{s=1} (-q_{5s-1} + q_{5s+1}) \\ p_2' &= p_2 + p_3 + p_7 + p_8 + \dots &&= p_2 + \sum_{s=1} (p_{5s-2} + p_{5s+2}) \\ q_2' &= q_2 - q_3 + q_7 - q_8 + \dots &&= q_2 + \sum_{s=1} (-q_{5s-2} + q_{5s+2}) \end{aligned}$$

Diese Formeln entsprechen genau den Gleichungen 132).

Dorpat, Februar 1888. *W.*

Schriften
herausgegeben von der Naturforscher-Gesellschaft
bei der Universität Dorpat.

V.

Fortsetzung der Neuen Untersuchungen

über die

Bessel'sche Formel und deren Verwendung in der Meteorologie

von

Dr. **Karl Weihrauch**,

ord. Professor der physikalischen Geographie an der Universität Dorpat

Dorpat.

Druck von C. Mattiesen.

1890.

In Commission bei

K. F. Koehler in Leipzig, Th. Hoppe und E. J. Karow in Dorpat.

Schriften
herausgegeben von der Naturforscher-Gesellschaft
bei der Universität Dorpat.
V.

Fortsetzung der Neuen Untersuchungen

über die

Bessel'sche Formel und deren Verwendung in der Meteorologie

von

Dr. **Karl Weihrauch,**
ord. Professor der physikalischen Geographie an der Universität Dorpat.

Dorpat.

Druck von C. Mattiesen.

1890.

In Commission bei
K. F. Koehler in Leipzig, Th. Hoppe und E. J. Karow in Dorpat.

Gedruckt mit Genehmigung der Verwaltung der Kaiserlichen Universität Dorpat.

Dorpat, am 27. Januar 1890. Rector: **A. Schmidt.**

Nr. 95.

Der

Physikalisch-Oekonomischen Gesellschaft

zu Königsberg in Pr.

zur

Feier ihres 100jährigen Bestehens

gewidmet

von der Naturforscher-Gesellschaft

bei der Universität

Dorpat.

Meine Abhandlung betitelt „Neue Untersuchungen über die Bessel'sche Formel und deren Verwendung in der Meteorologie", welche in den „Schriften herausgegeben von der Naturforscher-Gesellschaft bei der Universität Dorpat, IV, 1888" erschien, bezieht sich im Ersten Theil auf die bei der Bessel'schen Formel auftretenden Gleichungssysteme und im Zweiten Theil auf die Gestalt und die Verwendung der Bessel'schen Formel in der Meteorologie. Im Anschluss daran gebe ich nun weitere Studien auf demselben Gebiete; ich behalte die im Ersten und Zweiten Theil gewählten Bezeichnungen durchweg bei, mit der einzigen Ausnahme, dass ich die Grösse der Periode immer schon gleich 2π setze. Die Phasen x, welche zu den Amplituden y gehören, sind daher immer als reduziert, d. h. als Bogen vom Halbmesser 1, aufzufassen. Zu einer solchen bestimmten Phase x_h gehöre jedesmal die bestimmte Amplitude α_h. Des leichteren Hinweises wegen schliesse ich die Ordnungszahlen der Gleichungen in dieser neuen Arbeit an die der alten an.

Dritter Theil.

Verwendung der Bessel'schen Formel in besonderen Fällen.

Erster Abschnitt.

Ersetzung nicht-aequidistanter Systeme durch aequidistante.

Wenn n nicht-aequidistante Beobachtungen (x_h, α_h, $h = 1, 2, \ldots n$) gegeben sind, so können die Konstanten der Bessel'schen Formel immer durch die im Ersten Theil von mir entwickelten Gleichungen 38) und 48) für ein ungerades n, durch die Gleichungen 61), 64) und 67) mit Berücksichtigung von 112) für ein gerades n ermittelt werden.

Diese Bestimmungsweise ist indessen bei nur einigermassen beträchtlichem Werthe von n, z. B. schon von $n = 5$ an, sehr mühsam und ausserordentlich weitläufig, da u. a. sämmtliche Kombinationen zu allen Klassen aus allen möglichen Reihen von je $n - 1$ Phasen gebildet werden müssen. Man kann diese Schwierigkeit in folgender Weise umgehen.

Die zu ermittelnde Kurve C_n ist durch das gegebene nicht-aequidistante System vollkommen eindeutig bestimmt, und zwar hat man nach dem früheren

1) für $n = 2\nu + 1$

$$y = u_o + \sum_{m=1}^{m=\nu} (p_m \cos mx + q_m \sin mx) \tag{168}$$

und zur Berechnung der $2\nu + 1$ Unbekannten u_o, p_m, q_m das lineare System

$$\alpha_h = u_o + \sum_{m=1}^{m=\nu} (p_m \cos mx_h + q_m \sin mx_h), \tag{169}$$

$$h = 1, 2, \ldots (2\nu + 1)$$

2) für $n = 2\nu$

$$y = u_o + \sum_{m=1}^{m=\nu-1} (p_m \cos mx + q_m \sin mx) + u_\nu \sin(U_\nu + \nu x) \tag{170}$$

und zur Berechnung der 2ν Unbekannten u_o, p_m, q_m, u_ν das lineare System

$$\alpha_h = u_o + \sum_{m=1}^{m=\nu-1} (p_m \cos mx_h + q_m \sin mx_h) + u_\nu \sin(U_\nu + \nu x_h) \tag{171}$$

$$h = 1, 2, \ldots (2\nu)$$

während U_ν nach 112) bestimmt ist durch die Gleichung.

$$U_\nu = -\frac{1}{2}\sigma = -\frac{1}{2}\sum_{h=1}^{h=2\nu} x_h \tag{172}$$

Ich will annehmen, die Rechnung sei in beiden Fällen durchgeführt worden. Wählt man nun n neue Phasen z_h aus, so liessen sich die zugehörigen Amplituden γ_h ohne weiteres berechnen, und wenn man nun umgekehrt dieses neue System (z_h, γ_h, $h = 1, 2, \ldots n$) als ursprünglich gegeben ansieht und dafür die Bessel'sche Formel aufstellt, so müssen die Konstanten derselben mit denen von 168) und 170) identisch werden, da die Gleichungen, welche diese Konstanten und die γ_h verknüpfen, linear sind. Es ist dabei nur ausdrücklich zu bemerken, dass für den Fall $n = 2\nu$ die Winkelkonstante U_ν n i c h t, wie es sonst geschehen müsste, wenn das System (z_h, γ_h) völlig unabhängig gegeben wäre, gleich der negativen halben Summe der Phasen z_h gesetzt werden darf, sondern dass man die Winkelkonstante U_ν in der durch 172) gegebenen Gestalt, als negative halbe Summe der u r s p r ü n g l i c h e n Phasen x_h beibehalten muss.

Wählt man nun die neuen Phasen z_h aequidistant,

$$z_h = a + v(h - 1), \tag{173}$$

$$h = 1, 2, \ldots n$$

wo a eine ganz beliebige Winkelkonstante, und wie früher $v = 2\pi : n$, dann ist die Konstruktion der Bessel'schen Formel für das nicht-aequidistante System (x_h, α_h) offenbar auf die sehr leicht durchzuführende Berechnung der Konstanten für das aequidistante System (z_k, γ_k) zurückgeführt, sobald es ein einfaches Mittel gibt die γ_k direkt, ohne Hülfe der Bessel'schen Formel, zu berechnen. Ein solches Mittel bietet sich nun in den G a u s s'schen, von mir theilweise modifizierten Formeln 70) und 80) dar, von denen ich auch bei den weiteren Untersuchungen häufig Gebrauch machen werde. Dieselben lauten, wenn man die a. a. O. benutzten Bezeichnungen y und x' durch γ_k und z_k ersetzt, ausführlich geschrieben

1) für $n = 2\nu + 1$

$$\gamma_k = \sum_{h=1}^{h=2\nu+1} \alpha_h \frac{\sin\frac{x_1 - z_k}{2} \cdot \sin\frac{x_2 - z_k}{2} \ldots \sin\frac{x_{h-1} - z_k}{2} \cdot \sin\frac{x_{h+1} - z_k}{2} \ldots \sin\frac{x_{2\nu+1} - z_k}{2}}{\sin\frac{x_1 - x_h}{2} \cdot \sin\frac{x_2 - x_h}{2} \ldots \sin\frac{x_{h-1} - x_h}{2} \cdot \sin\frac{x_{h+1} - x_h}{2} \ldots \sin\frac{x_{2\nu+1} - x_h}{2}} \tag{174}$$

2) $n = 2\nu$ unter Zugrundelegung der Gleichung 172)

$$\gamma_k = \sum_{h=1}^{h=2\nu} \alpha_h \frac{\sin\frac{x_1 - z_k}{2} \cdot \sin\frac{x_2 - z_k}{2} \ldots \sin\frac{x_{h-1} - z_k}{2} \cdot \sin\frac{x_{h+1} - z_k}{2} \ldots \sin\frac{x_{2\nu} - z_k}{2}}{\sin\frac{x_1 - x_h}{2} \cdot \sin\frac{x_2 - x_h}{2} \ldots \sin\frac{x_{h-1} - x_h}{2} \cdot \sin\frac{x_{h+1} - x_h}{2} \ldots \sin\frac{x_{2\nu} - x_h}{2}} \cos\frac{x_h - z_k}{2} \tag{175}$$

$$k = 1, 2, \ldots n$$

Die Ausdrücke sind leicht zu übersehen; im Zähler fehlt der Factor $\sin\frac{x_h - z_k}{2}$, und der Nenner geht aus dem Zähler hervor, indem man z_k durch x_h ersetzt. Man sieht ferner sofort, dass, wenn etwa $z_k = x_h$ wird. d. h. wenn eine der ursprünglichen Phasen in die aequidistante Reihe hineinpasst, die Formel, wie nothwendig, $\gamma_k = \alpha_h$ ergibt.

Für die praktische Rechnung ist es am zweckmässigsten zunächst die n Ausdrücke von je n Faktoren

$$H_k = \sin\frac{x_1 - z_k}{2} \cdot \sin\frac{x_2 - z_k}{2} \cdots \sin\frac{x_h - z_k}{2} \cdots \sin\frac{x_n - z_k}{2} \tag{176}$$

$$k = 1, 2, \ldots n$$

aufzustellen. Die Zähler in 174) und 175) können dann durch $H_k : \sin\frac{x_h - z_k}{2}$ ersetzt werden.

Bezeichnet $R_h^{(n)}$ wie früher das Produkt der Sinus der $n - 1$ halben Differenzen, in welchen $x_1, x_2, \ldots x_{h-1}, x_{h+1}, \ldots x_n$ als Minuenden und x_h immer als Subtrahend auftreten, so hat man offenbar n solcher Werthe zu berechnen, da dieselben bei allen Einzelwerthen von k wiederkehren. Dabei ist zu berücksichtigen, dass man von den $n\,(n-1)$ Ausdrücken wie $\sin \frac{x_m - x_p}{2}$ nur die Hälfte wirklich zu bestimmen braucht, wenn man die Vorzeichen beachtet. Die Formeln 174) und 175) erhalten somit die für die Rechnung bequeme Gestalt

1) für $n = 2\nu + 1$

$$\gamma_k = H_k \cdot \sum_{h=1}^{h=2\nu+1} \frac{\alpha_h}{R_h^{(2\nu+1)} \sin \frac{x_h - z_k}{2}} \tag{177}$$

2) für $n = 2\nu$

$$\gamma_k = H_k \cdot \sum_{h=1}^{h=2\nu} \frac{\alpha_h}{R_h^{(2\nu)} \operatorname{tang} \frac{x_h - z_k}{2}} \tag{178}$$

$$k = 1, 2, \ldots n$$

Ein Unendlichwerden von γ_k ist hier ausgeschlossen. Dieses würde zunächst scheinbar für $z_k = x_h$ eintreten; ich habe indessen schon oben gezeigt, dass dann $\gamma_k = \alpha_k$ wird. Es könnte ferner eintreten, wenn $x_h = 2\,m\,\pi + z_k$ vorkäme, wo m eine beliebige von Null verschiedene, positive oder negative ganze Zahl ist; dieses ist aber unmöglich, weil alle Phasen, die alten und die neuen, innerhalb des Bereiches 0 bis $2\,\pi$ liegend gedacht werden. Eine sehr brauchbare Kontrole bei Ausführung der Rechnung bietet folgender Satz:

Für jeden individuellen Werth von k muss in den Formeln 177) und 178) die Summe der Koeffizienten der α_h stets gleich 1 sein, d. h.

1) für $n = 2\nu + 1$

$$H_k \cdot \sum_{h=1}^{h=2\nu+1} \frac{1}{R_h^{(2\nu+1)} \sin \frac{x_h - z_k}{2}} = 1 \tag{179}$$

2) für $n = 2\nu$

$$H_k \cdot \sum_{h=1}^{h=2\nu} \frac{1}{R_h^{(2\nu)} \operatorname{tang} \frac{x_h - z_k}{2}} = 1 \tag{180}$$

$$k = 1, 2, \ldots n$$

Der Beweis hierfür ergibt sich aus dem Umstande, dass diese Gleichungen zum Vorschein kommen, wenn man unter Berücksichtigung von 10) und 20), bez. 51) und 55) für $n = 2\nu + 1$ die identisch verschwindende Determinante

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & \cos z_k, & \sin z_k, & \ldots & \cos \nu z_k, & \sin \nu z_k \\ 1, & 1, & \cos x_m, & \sin x_m, & \ldots & \cos \nu x_m, & \sin \nu x_m \\ & & & m = 1, 2, \ldots (2\nu + 1) & & & \end{vmatrix} = 0 \qquad 181)$$

und für $n = 2\nu$ unter Bezugnahme auf 172) die identisch verschwindende Deter) minante

182-

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & \cos z_k, & \sin z_k, & \ldots & \cos(\nu-1)z_k, & \sin(\nu-1)z_k, & \sin(U_\nu + \nu z_k) \\ 1, & 1, & \cos x_m, & \sin x_m, & \ldots & \cos(\nu-1)x_m, & \sin(\nu-1)x_m, & \sin(U_\nu + \nu x_m) \\ & & & & m = 1, 2, \ldots (2\nu) & & & \end{vmatrix} = 0$$

nach den Elementen der ersten Kolonne entwickelt. Es ist genau derselbe Vorgang, wie bei den Determinenten 72) und 75), weshalb ich hier nicht weiter darauf eingehen will.

Für den Mittelwerth u_o hat man der Aequidistanz wegen

$$u_o = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \gamma_k \qquad 183)$$

also

1) für $n = 2\nu + 1$

$$u_o = \frac{1}{2\nu+1} \sum_{h=1}^{h=2\nu+1} \frac{\alpha_h}{\overset{(2\nu+1)}{R_h}} \sum_{k=1}^{k=2\nu+1} \frac{H_k}{\sin \frac{x_h - z_k}{2}} \qquad 184)$$

2) für $n = 2\nu$

$$u_o = \frac{1}{2\nu} \sum_{h=1}^{h=2\nu} \frac{\alpha_h}{\overset{(2\nu)}{R_h}} \sum_{k=1}^{k=2\nu} \frac{H_k}{\operatorname{tang} \frac{x_h - z_k}{2}} \qquad 185)$$

Besondere Rechnungsvortheile lassen sich aus diesen Formeln wohl nicht weiter ableiten; in der Praxis wird man doch zuerst immer die einzelnen γ_k für sich berechnen müssen. Interessant ist nur, dass, nachdem die Formeln 38) und 61) bereits eine allgemeine Darstellung des Mittelwerths geliefert haben, durch Zuziehung einer aequidistanten Phasenreihe eine zweite Darstellung ermöglicht wird. Der Vergleich der Formeln 38) und 61) mit 184) und 185) gibt dann mit Rücksicht auf 172) die merkwürdigen Beziehungen

1) für $n = 2\nu + 1$

$$\frac{1}{4^\nu} \Sigma \cos\left(\gamma_{\nu,h} - \frac{1}{2}\sigma_h\right) = \frac{1}{2\nu+1} \sum_{k=1}^{k=2\nu+1} \frac{H_k}{\sin\frac{x_h - z_k}{2}} \qquad 186)$$

2) für $n = 2\nu$

$$\frac{2}{4^\nu} \Sigma \sin\left(\gamma_{\nu,h} - \frac{1}{2}\sigma\right) = \frac{1}{2\nu} \sum_{k=1}^{k=2\nu} \frac{H_k}{\operatorname{tang}\frac{x_h - z_k}{2}} \qquad 187)$$

$$h = 1,\ 2, \ldots n$$

Hier ist $\gamma_{\nu,h}$ eine als Summe ihrer Bestandtheile aufzufassende Kombination der Reihe $x_1, x_2, \ldots x_n$ mit Ausschluss von x_h zur ν^{ten} Klasse ohne Wiederholung, ferner σ_h die Summe jener Reihenelemente ohne x_h, während σ die Summe aller Phasen ist, und die Summation links fordert, dass alle möglichen Kombinationen gebildet werden.

Ist die Bestimmung der Amplituden γ_h erfolgt, so hat für $n = 2\nu + 1$ die Ermittelung der Konstanten in der Gleichung 168) gar keine Schwierigkeiten. Man erhält, wie bei 119), wenn a_1 dort durch a ersetzt wird

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= \frac{1}{2\nu+1} \sum_{h=1}^{h=2\nu+1} \gamma_h \\ p_k &= \frac{2}{2\nu+1} \sum_{h=1}^{h=2\nu+1} \gamma_h \cos k\left(a + v(h-1)\right) \\ q_k &= \frac{2}{2\nu+1} \sum_{h=1}^{h=2\nu+1} \gamma_h \sin k\left(a + v(h-1)\right) \\ & k = 1,\ 2, \ldots \nu \end{aligned}\right\} \qquad 188)$$

Für $n = 2\nu$ dagegen lautet das aufzulösende System (vgl. 123)

$$\gamma_h = u_0 + \sum_{m=1}^{m=\nu-1} \left(p_m \cos m\left(a+v(h-1)\right) + q_m \sin m\left(a+v(h-1)\right)\right) + u_\nu \sin\left(U_\nu + \nu\left(a+v(h-1)\right)\right) \qquad 189)$$

wo U_ν durch 172) gegeben ist. Statt des letzten Theilsatzes kann wegen $\nu v = \pi$ geschrieben werden $(-1)^{h-1} u_\nu \sin(U_\nu + \nu a)$. Gemäss dem bei Ableitung von 124) geschilderten Vorgang gewinnt man dann für die Gleichung 170)

$$\left.\begin{aligned}
u_0 &= \frac{1}{2\nu} \sum_{h=1}^{h=2\nu} \gamma_h \\
p_k &= \frac{1}{\nu} \sum_{h=1}^{h=2\nu} \gamma_h \cos k\left(a + v\,(h-1)\right) \\
q_k &= \frac{1}{\nu} \sum_{h=1}^{h=2\nu} \gamma_h \sin k\left(a + v\,(h-1)\right) \\
& \qquad k = 1,\ 2, \ldots (\nu - 1) \\
u_\nu &= \frac{1}{2\nu \sin(U_\nu + \nu a)} \sum_{h=1}^{h=2\nu} (-1)^{h-1} \gamma_h \\
u_\nu &= (-1)^\nu \cdot \frac{2}{4^\nu} \sum_{h=1}^{h=2\nu} \frac{\alpha_h}{\overset{(2\nu)}{R_h}}
\end{aligned}\right\} \qquad 190)$$

nach 67) und 172). Welche der beiden Formeln für u_ν man verwenden will, ist im allgemeinen gleichgültig; da jedoch die γ_h jedenfalls vorher schon berechnet sein müssen, so ist die erste der Formeln vielleicht bequemer, mit Ausnahme des Falles, wo $U_\nu + \nu a$ gleich einem Vielfachen von π wird. Dann erscheint, wie aus dem folgenden hervorgehen wird, bei der ersten Formel u_ν in der Gestalt $0:0$, und man ist gezwungen die zweite zu benutzen. Die Identität beider Formeln kann in folgender Weise gezeigt werden.

Es sei 191)

$$G_{k,h} = (-1)^{h-1} \begin{vmatrix} 1,\ \cos z_k,\ \sin z_k,\ \ldots \cos(\nu-1) z_k,\ \sin(\nu-1) z_k,\ \sin(U_\nu + \nu z_k) \\ 1,\ \cos x_m,\ \sin x_m,\ \ldots \cos(\nu-1) x_m,\ \sin(\nu-1) x_m,\ \sin(U_\nu + \nu x_m) \\ m = 1,\ 2,\ \ldots (h-1),\ (h+1), \ldots (2\nu) \end{vmatrix}$$

Man bemerke wieder, dass

$$\sin(U_\nu + \nu z_k) = (-1)^{k-1} \sin(U_\nu + \nu a) \qquad 192)$$

ist. Um die Summe

$$\sum_{k=1}^{k=2\nu} (-1)^{k-1} G_{k,h}$$

zu bilden, hat man in 191) die Summation auf die Elemente der ersten Zeile auszudehnen. Dann ist aber, wie bekannt,

$$\sum_{k=1}^{k=2\nu} (-1)^{k-1} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (mz_k) = 0 \qquad 193)$$

$$m = 0, 1, 2, \ldots (\nu - 1)$$

und man erhält, da in der ersten Zeile nur das letzte Element im Betrage von

$$\sum_{k=1}^{k=2\nu} (-1)^{k-1} (-1)^{k-1} \sin (U_\nu + \nu a) = 2\nu \sin (U_\nu + \nu a) \qquad 194)$$

erhalten bleibt

$$\sum_{k=1}^{k=2\nu} (-1)^{k-1} G_{k,h} = (-1)^h . 2\nu \sin (U_\nu + \nu a) . \begin{vmatrix} 1, \cos x_m, \sin x_m, \ldots \cos (\nu-1) x_m, \sin (\nu-1) x_m \\ m = 1, 2, \ldots (h-1), (h+1) \ldots (2\nu) \end{vmatrix} \qquad 195)$$

Die hier auftretende Determinante ist dieselbe wie die in 10), wenn daselbst x_h und $x_{2\nu+1}$ weggelassen werden und $2\nu + 1$ durch $2\nu - 1$ ersetzt wird, d. h. man erhält aus 20) für die obige Determinante den Werth $4^{(\nu-1)^2} . P_{2\nu,h}$, wo die Bedeutung von $P_{2\nu,h}$ bei 58) gegeben ist. Man hat also

$$\sum_{k=1}^{k=2\nu} (-1)^{k-1} G_{k,h} = (-1)^h . 2\nu \sin (U_\nu + \nu a) . 4^{(\nu-1)^2} . P_{2\nu,h} \qquad 196)$$

Andrerseits ist $G_{k,h}$, wie man sich leicht überzeugt, identisch mit der Determinante $D_{2\nu}$ in 51), wenn man darin x_h durch z_k ersetzt; mithin wird nach 55), worin die eben angegebene Ersetzung vorgenommen werden muss,

$$G_{k,h} = (-1)^{\nu-1} \cdot 2 \cdot 4^{\nu(\nu-1)} (P_{2\nu})_{x_h = z_k} . \cos \left(U_\nu + \frac{a - x_h + z_k}{2} \right) \qquad 197)$$

Hier ist $(P_{2\nu})_{x_h = z_k}$ das Produkt der Sinus aller halben Differenzen aus der Reihe $x_1, x_2, \ldots x_{h-1}, z_k, x_{h+1}, \ldots x_{2\nu}$, wenn immer die vorangehende Grösse als Subtrahend genommen wird. Offenbar ist nun

$$(P_{2\nu})_{x_h = z_k} = P_{2\nu,h} \cdot \sin \frac{z_k - x_1}{2} \cdots \sin \frac{z_k - x_{h-1}}{2} \cdot \sin \frac{x_{h+1} - z_k}{2} \cdots \sin \frac{x_{2\nu} - z_k}{2} \qquad 198)$$

oder unter Rücksicht auf 176)

$$(P_{2\nu})_{x_h = z_k} = P_{2\nu,h} \cdot (-1)^{h-1} \cdot \frac{H_k}{\sin \frac{x_h - z_k}{2}} \qquad 199)$$

Unter Zuziehung von 172) erhält man dann aus 197)

$$G_{k,h} = (-1)^{\nu-h} \cdot 2 \cdot 4^{\nu(\nu-1)} \cdot P_{2\nu,h} \cdot \frac{H_k}{\operatorname{tang} \frac{x_h - z_k}{2}} \tag{200}$$

und

$$\sum_{k=1}^{k=2\nu} (-1)^{k-1} G_{k,h} = (-1)^{\nu-h} \cdot 2 \cdot 4^{\nu(\nu-1)} \cdot P_{2\nu,h} \cdot \sum_{k=1}^{k=2\nu} (-1)^{k-1} \cdot \frac{H_k}{\operatorname{tang} \frac{x_h - z_k}{2}} \tag{201}$$

Die Vergleichung von 196) und 201) liefert

$$\sum_{k=1}^{k=2\nu} (-1)^{k-1} \frac{H_k}{\operatorname{tang} \frac{x_h - z_k}{2}} = (-1)^{\nu} \cdot \frac{2\,\nu \sin (U_\nu + \nu a)}{2 \cdot 4^{\nu-1}} \tag{202}$$

Schreibt man in 190) die erste Formel für u_ν in der Gestalt

$$u_\nu = \frac{1}{2\,\nu \sin (U_\nu + \nu a)} \sum_{k=1}^{k=2\nu} (-1)^{k-1} \gamma_k \tag{203}$$

oder mit Rücksicht auf 178)

$$u_\nu = \frac{1}{2\,\nu \sin (U_\nu + \nu a)} \sum_{h=1}^{h=2\nu} \frac{a_h}{R_h^{(2\nu)}} \sum_{k=1}^{k=2\nu} (-1)^{k-1} \frac{H_k}{\operatorname{tang} \frac{x_h - z_k}{2}} \tag{204}$$

so ergibt die Substitution aus 202) sofort die zweite Gestalt für u_ν:

$$u_\nu = (-1)^{\nu} \cdot \frac{2}{4^{\nu}} \sum_{h=1}^{h=2\nu} \frac{a_h}{R_h^{(2\nu)}} \tag{205}$$

Die Gleichung 202) beweist die früher ausgesprochene Behauptung, dass, wenn $U_\nu + \nu a$ gleich einem Vielfachen von π wird, die erste Form für u_ν den Ausdruck $0:0$ annimmt.

Unter allen Umständen lässt sich also ein nicht-aequidistantes System von n Phasen und Amplituden durch ein aequidistantes mit beliebiger Anfangsphase ersetzen. Dabei behält jedoch für den Fall $n = 2\nu$ die Winkelkonstante U_ν den Werth bei, der ihr im ursprünglichen System beigelegt werden musste.

Als Beispiel wähle ich den täglichen Gang der Temperatur im Jahresmittel für Tiflis, den ich dem grossen Werke von H. Wild: „Die Temperaturverhältnisse des russischen Reiches", Bd. II, S. XI entnehme. Die Resultate sind daselbst für alle 24 Stunden des Tages gegeben. Ich will indessen annehmen, es lägen nur die Beobachtungen für die nicht-aequidistanten Termine 6^h, 8^h, 13^h, 16^h, 21^h, 3^h vor. Es wird also $n = 6$, die Periode mag mit 6^h beginnen, und dies sei zugleich die Anfangsphase der zu ermittelnden aequidistanten Werthe, d. h. $a = 0$; ferner sei b_m die für „m Uhr" geltende Amplitude, so dass

$$b_6 = \alpha_1 = \gamma_1$$

wird. Man hat dann

Tab. 1.

Stunde.	Nichtaequidist. Phasen.	Nichtaequidistante Amplituden.	Stunde.	Aequidist. Phasen.	Aequidist. Amplit.
6^h	$x_1 = 0$	$a_1 = b_6 = 8{\cdot}97$ °C	6^h	$z_1 = 0$	$\gamma_1 = b_6$
8^h	$x_2 = \pi : 6$	$a_2 = b_8 = 10{\cdot}77$	10^h	$z_2 = \pi : 3$	$\gamma_2 = b_{10}$
13^h	$x_3 = 7\pi : 12$	$a_3 = b_{13} = 16{\cdot}77$	14^h	$z_3 = 2\pi : 3$	$\gamma_3 = b_{14}$
16^h	$x_4 = 5\pi : 6$	$a_4 = b_{16} = 16{\cdot}84$	18^h	$z_4 = \pi$	$\gamma_4 = b_{18}$
21^h	$x_5 = 5\pi : 4$	$a_5 = b_{21} = 11{\cdot}80$	22^h	$z_5 = 4\pi : 3$	$\gamma_5 = b_{22}$
3^h	$x_6 = 7\pi : 4$	$a_6 = b_3 = 9{\cdot}30$	2^h	$z_6 = 5\pi : 3$	$\gamma_6 = b_2$

Die Ergebnisse der Rechnung findet man in der folgenden Tabelle 2. Dabei bemerke ich, dass die als Korrektionen bezeichneten Grössen zu den berechneten Werthen zu addiren sind, wenn man die Beobachtungsresultate haben will; negative (positive) Korrektionen bedeuten also, dass die berechneten Werthe zu gross (zu klein) ausfielen. Die berechneten Werthe der γ_h sind nur deshalb auf 4 Dezimalen genau angegeben, weil dieselben nachher zur Berechnung der Konstanten u_0, p_1, q_1, p_2, q_2, u_3 weiter benutzt werden müssen.

Tab. 2.

Aequidist. Amplit.	Beob.	Berechnet.	Korrekt.
$\gamma_1 = b_6$	8·97 °C	8·9700 °C	—
$\gamma_2 = b_{10}$	13·68	13·5242	+ 0·16
$\gamma_3 = b_{14}$	17·20	17·2162	− 0·02
$\gamma_4 = b_{18}$	14·72	14·9572	− 0·24
$\gamma_5 = b_{22}$	11·23	11·2150	+ 0·01
$\gamma_6 = b_2$	9·60	9·8036	− 0·20

Man hat ferner $U_3 = -\frac{55\pi}{24} = -\frac{7\pi}{24} = 341{\cdot}67''$ *) und erhält aus obigen Werthen (6^h, 8^h, 13^h, 16^h, 21^h, 3^h) für den täglichen Gang der Temperatur im Jahresmittel die Bessel'sche Formel

$$y = 12{\cdot}6144 + 3{\cdot}9973 \sin (349{\cdot}55^{\circ}\,{}^{*}) + x)$$
$$+ 0{\cdot}9257 \sin (249{\cdot}63''\,{}^{*}) + 2\,x) + 0{\cdot}1857 \sin (341{\cdot}67''\,{}^{*}) + 3\,x)$$

wobei man im Auge zu behalten hat, dass die Periode um 6^h beginnt. Der den 24 täglichen Beobachtungen entsprechende Mittelwerth ist 12·56 °C, mithin die Korrektion für das durch die Bessel'sche Formel gelieferte Mittel — 0·05 °C.

Zweiter Abschnitt.

Vereinfachte Bestimmung einzelner Amplituden bei aequidistanten Systemen.

Ist ein aequidistantes System $\left(x_h = v\,(h - 1),\ \alpha_h\right)$ gegeben, so kann nach den Gleichungen des Zweiten Theils die Berechnung der Konstanten der Bessel-schen Formel

$$y = u_o + \sum_{m=1} (p_m \cos mx + q_m \sin mx) \qquad 206)$$

bewerkstelligt werden, und dann kann man zu jeder beliebigen Phase x die zugehörige Amplitude y finden. Die Gleichungen 177) und 178) liefern dieses Resultat ohne vorhergehende Berechnung jener Konstanten. Diese Gleichungen können indessen für ein aequidistantes System wesentlich vereinfacht werden, wie sich zunächst durch Anwendung gewisser Sätze über Produkte goniometrischer Funktionen zeigen liesse; allein die Entwickelung dieser Sätze selbst ist ziemlich weitläufig, und man kann das gewünschte Resultat auch auf folgendem direkten Wege ganz einfach erhalten.

1) $n = 2\nu + 1$.

Die Bessel'sche Formel lautet

$$y = u_o + \sum_{m=1}^{m=\nu} (p_m \cos mx + q_m \sin mx) \qquad 207)$$

*) Zentesimaltheilung des Quadranten.

und für die Konstanten hat man

$$\left.\begin{aligned} n_0 &= \frac{1}{2\nu+1} \sum_{h=1}^{h=2\nu+1} \alpha_h \\ p_m &= \frac{2}{2\nu+1} \sum_{h=1}^{h=2\nu+1} \alpha_h \cos m v (h-1) \\ q_m &= \frac{2}{2\nu+1} \sum_{h=1}^{h=2\nu+1} \alpha_h \sin m v (h-1) \\ & m = 1, 2, \ldots \nu \end{aligned}\right\} \tag{208}$$

Setzt man diese Werthe in 207) ein, so muss die Gauss'sche Gleichung 70) bez. 177) zum Vorschein kommen. Man erhält

$$(2\nu + 1)\, y = \sum_{h=1}^{h=2\nu+1} \alpha_h \left(1 + 2 \sum_{m=1}^{m=\nu} \cos m \left(v\,(h-1) - x\right)\right) \tag{209}$$

Wegen

$$\sum_{z=1}^{z=k} \cos a z = \frac{\sin \frac{a\,(2k+1)}{2}}{2 \sin \frac{a}{2}} - \frac{1}{2} \tag{210}$$

geht obige Gleichung über in

$$(2\nu + 1)\, y = \sum_{h=1}^{h=2\nu+1} \alpha_h \frac{\sin\left(\pi\,(h-1) - \frac{(2\nu+1)\,x}{2}\right)}{\sin \frac{v\,(h-1) - x}{2}} \tag{211}$$

oder

$$y = \frac{\sin \frac{(2\nu+1)\,x}{2}}{2\nu + 1} \sum_{h=1}^{h=2\nu+1} \frac{(-1)^h \alpha_h}{\sin \frac{v\,(h-1) - x}{2}}, \tag{212}$$

ein Ausdruck, der wesentlich einfacher ist, als die Gauss'sche Gleichung 177). Wird x gleich einer der aequidistanten Phasen, etwa $x = v\,(k-1)$, so geht $\sin \frac{(2\nu+1)\,x}{2}$ wegen $v\,(2\nu + 1) = 2\pi$ in Null über; nur für $h = k$ erscheint der Summand rechts in der Gestalt $0 : 0$, wofür man in bekannter Weise den Werth $y = \alpha_k$ erhält.

2) $n = 2\nu$.

Die Bessel'sche Formel lautet

$$y = u_o + \sum_{m=1}^{m=\nu-1} (p_m \cos mx + q_m \sin mx) + u_\nu \sin\left(-\frac{\sigma}{2} + \nu x\right) \qquad 213)$$

$$\left.\begin{aligned} u_o &= \frac{1}{2\nu} \sum_{h=1}^{h=2\nu} \alpha_h \\ p_m &= \frac{1}{\nu} \sum_{h=1}^{h=2\nu} \alpha_h \cos m v\,(h-1) \\ q_m &= \frac{1}{\nu} \sum_{h=1}^{h=2\nu} \alpha_h \sin m v\,(h-1) \\ m &= 1, 2, \ldots (\nu - 1) \\ u_\nu{}^{*}) &= \frac{(-1)^\nu}{2\nu} \sum_{h=1}^{h=2\nu} (-1)^{h-1} \alpha_h \end{aligned}\right\} \qquad 214)$$

Durch Substitution der Werthe von 214) in 213) entsteht

$$2\nu y = \sum_{h=1}^{h=2\nu} \alpha_h \left(1 + 2 \sum_{m=1}^{m=\nu-1} \cos m \left(v\,(h-1) - x\right) + (-1)^{\nu+h-1} \sin\left(-\frac{\sigma}{2} + \nu x\right)\right) \qquad 215)$$

Hier ist σ die Summe aller aequidistanten Phasen, d. h.

$$\left.\begin{aligned} &\sigma = \pi\,(2\nu - 1) \\ &\text{ferner} \quad (-1)^{\nu+h-1} \sin\left(-\frac{\sigma}{2} + \nu x\right) = (-1)^{h-1} \cos \nu x \\ &\text{und} \quad \sum_{m=1}^{m=\nu-1} \cos m \left(v\,(h-1) - x\right) = \frac{\sin \frac{(2\nu-1)\,(v\,(h-1)-x)}{2}}{2 \sin \frac{v\,(h-1)-x}{2}} - \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \qquad 216)$$

*) Bei dieser Gelegenheit mag bemerkt werden, dass gegen die Gleichung für u_ν in der Praxis sehr häufig gefehlt wird, indem statt des Faktors $\frac{1}{2\nu}$ der Faktor $\frac{1}{\nu}$, wie bei p_m und q_m, genommen wird. Dieser Fehler findet sich z. B. in den „Temperaturverhältnissen des russischen Reiches" von H. Wild, Bd. I, S. 59 bei der Berechnung der Bessel'schen Formel für den Mai in Tiflis, wo es statt $p_{12} = 0{\cdot}0300$ heissen muss $p_{12} = 0{\cdot}0150$. Dadurch werden auf S. 60 in der oberen Tabelle die Werthe in den Spalten „Beob." und „XII" identisch, und in der unteren Tabelle alle Werthe in der Spalte „XII" gleich Null, wie es selbstverständlich bei richtiger Rechnung sein muss, weil die Zahl der Unbekannten schliesslich gleich der Zahl der Gleichungen geworden ist. Entsprechend ändern sich dann auch die Zahlen in der Spalte „XII" und die daraus gezogenen Folgerungen auf S. 61.

womit man aus 215) nach einfachen Reduktionen erhält

$$y = \frac{\sin \nu x}{2\nu} \sum_{h=1}^{h=2\nu} \frac{(-1)^h \alpha_h}{\tang \frac{v(h-1)-x}{2}} \qquad 217)$$

als Gauss'sche Gleichung 118) in wesentlich vereinfachter Gestalt. Auch hier überzeugt man sich leicht, dass für $x = v(k-1)$ der Werth $y = \alpha_k$ zum Vorschein kommt.

Als Beispiel wähle ich wieder den täglichen Gang der Temperatur im Jahresmittel für Tiflis (vgl. S. 12) und will annehmen, man kenne die Beobachtungen nur für die ungeraden Stunden und solle die für die geraden Stunden nach 217) berechnen. Es ist also $n = 12$, $v = \pi : 6$, und wenn die Periode mit 1^h anfangend gedacht wird, so hat man für x der Reihe nach die Werthe $\frac{(2k-1)\pi}{12}$ für $k = 1, 2, \ldots 12$ zu setzen. Die Ergebnisse der Rechnung sind in der folgenden Tabelle verzeichnet.

Tab. 3.

Unger. Stunde.	Beob. (C.)	Gerade Stunde.	Beob. (C.)	Berechn. (C.)	Korrekt. (C.)
1^h	9·90	2^h	9·60	9·60	0·00
3^h	9·30	4^h	9·00	8·99	+0·01
5^h	8·78	6^h	8·97	8·92	+0·05
7^h	9·60	8^h	10·77	10·79	−0·02
9^h	12·25	10^h	13·68	13·69	−0·01
11^h	14·95	12^h	15·97	15·98	−0·01
13^h	16·77	14^h	17·20	17·25	−0.05
15^h	17·29	16^h	16·84	16·81	+0·03
17^h	15·88	18^h	14·72	14·69	+0·03
19^h	13·52	20^h	12·53	12·54	−0·01
21^h	11·80	22^h	11·23	11·22	+0·01
23^h	10·71	24^h	10·28	10·26	+0·02

Die Korrektionen fallen also durchweg sehr klein aus.

Dritter Abschnitt.

Ergänzung fehlender Beobachtungen bei übrigens aequidistanten Systemen.

Fehlen in einer Reihe von n aequidistanten Beobachtungen f Werthe, so lässt sich die theoretische Bestimmung derselben in dreifacher Weise ausführen.

1) Man bestimmt die Bessel'sche Formel für die $n - f$ gegebenen Beobachtungen, hat dann aber ein nicht-aequidistantes System vor sich, das nach den allgemeinen Formeln des Ersten Theils behandelt werden müsste. Wollte man zur Erleichterung dieses nicht-aequidistante System nach dem Ersten Abschnitt des Dritten Theils in ein aequidistantes verwandeln, so müsste man Mittel verwenden, welche bei der später zu erörternden dritten Methode direkt zum Ziel führen. Dieses Verfahren wird deshalb kaum je angewandt werden.

2) Man sieht zunächst davon ab, dass f Beobachtungen fehlen, setzt die Bessel'sche Formel aber nur mit $n - f$ Konstanten an, für welche man, wie es in 208) und 214) geschehen, die Werthe, ausgedrückt durch alle Beobachtungen, erhält. Besondere Rücksicht verdient nur der Fall, in welchem $n - f$ gerade, etwa gleich 2φ ist. Der Ansatz lautet dann

$$y = u_o + \sum_{m=1}^{m=\varphi-1} (p_m \cos mx + q_m \sin mx) + u_\varphi \sin (U_\varphi + \varphi x) \qquad 218)$$

und hierbei ist U_φ gleich der negativen halben Summe derjenigen Phasen, deren Amplituden bekannt sind. Das Gleichungssystem lautet dann unter der Voraussetzung, dass $x_h = v\,(h - 1)$ ist,

$$\alpha_h = u_o + \sum_{m=1}^{m=\varphi-1} \Big(p_m \cos mv\,(h-1) + q_m \sin mv\,(h-1)\Big) + u_\varphi \sin \Big(U_\varphi + \varphi v\,(h-1)\Big) \qquad 219)$$

$$h = 1, 2, \ldots n$$

Man findet daraus in der bekannten Weise (vgl. bei 119) und 124))

$$\left.\begin{aligned}
u_o &= \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{h=n} \alpha_h \\
p_m &= \frac{2}{n} \sum_{h=1}^{h=n} \alpha_h \cos mv\,(h-1) \\
q_m &= \frac{2}{n} \sum_{h=1}^{h=n} \alpha_h \sin mv\,(h-1) \\
& \quad m = 1, 2, \ldots (\varphi - 1) \\
u_\varphi &= \frac{2}{n} \sum_{h=1}^{h=n} \alpha_h \sin \Big(U_\varphi + \varphi v\,(h-1)\Big)
\end{aligned}\right\} \qquad 220)$$

so dass in allen Konstanten auch die f unbekannten Amplituden vorkommen. Setzt man diese Werthe in 218) ein und dann der Reihe nach für y und x je eines der fehlenden Paare von Amplituden und Phasen, so erhält man ein System von f linearen Gleichungen zwischen den f unbekannten Amplituden, woraus letztere berechnet werden können. Ganz entsprechend ist der Vorgang, falls $n - f$ ungerade ist.

Ich habe in dieser Weise die Frage schon früher einmal zu behandeln versucht *), allein mit verhältnissmässig geringem Erfolge, weil die Theorie damals noch nicht genügend ausgebildet war. Da man schliesslich aber doch immer zur Auflösung eines Systems von f Gleichungen gezwungen ist, so erscheint auch dieses Verfahren für die Praxis wenig geeignet.

Als Beispiel will ich den einfachsten, auch später bei der dritten Methode wieder behandelten Fall wählen, wo in der Reihe der aequidistanten Beobachtungen nur eine, es mag die letzte sein, fehlt.

a) $n = 2\nu$.

Es fehle $\alpha_{2\nu}$. Die Bessel'sche Formel mit $2\nu - 1$ Konstanten wird

$$y = u_o + \sum_{m=1}^{m=\nu-1} (p_m \cos mx + q_m \sin mx) \tag{221}$$

und man erhält daraus

$$\left.\begin{aligned} u_o &= \frac{1}{2\nu} \sum_{h=1}^{h=2\nu} \alpha_h \\ p_m &= \frac{1}{\nu} \sum_{h=1}^{h=2\nu} \alpha_h \cos mv\,(h-1) \\ q_m &= \frac{1}{\nu} \sum_{h=1}^{h=2\nu} \alpha_h \sin mv\,(h-1) \\ m &= 1, 2, \ldots (\nu - 1) \end{aligned}\right\} \tag{222}$$

Dies gibt bei der Substitution in 221)

$$2\nu y = \sum_{h=1}^{h=2\nu} \alpha_h \left(1 + 2 \sum_{m=1}^{m=\nu-1} \cos m\left(v\,(h-1) - x\right)\right) \tag{223}$$

und für

$$\left.\begin{aligned} x &= v\,(2\nu - 1) \\ y &= \alpha_{2\nu} \end{aligned}\right\} \tag{224}$$

*) Zeitschrift d. österr. Gesellsch. f. Meteorologie, Bd. XX, 1885, S. 216.

die Gleichung

$$\alpha_{2\nu} = \sum_{h=1}^{h=2\nu-1} \alpha_h \left(1 + 2 \sum_{m=1}^{m=\nu-1} \cos mv\,(2\nu - h)\right) \qquad 225)$$

Aus 210) findet man sofort wegen $\nu v = \pi$

$$\sum_{m=1}^{m=\nu-1} \cos mv\,(2\nu - h) = \sum_{m=1}^{m=\nu-1} \cos mvh = \frac{(-1)^{h-1} - 1}{2} \qquad 226)$$

d. h. schliesslich

$$\alpha_{2\nu} = \sum_{h=1}^{h=2\nu-1} (-1)^{h-1} \alpha_h \qquad 227)$$

Ein numerisches Beispiel (Madrid) findet sich schon im Zweiten Theil auf S. 38; andere sollen bei den späteren Entwickelungen gegeben werden.

b) $n = 2\nu + 1$.

Es fehle $\alpha_{2\nu+1}$. Die Bessel'sche Formel muss mit 2ν Konstanten angesetzt werden, nämlich

$$y = u_o + \sum_{m=1}^{m=\nu-1} (p_m \cos mx + q_m \sin mx) + u_\nu \sin (U_\nu + \nu x) \qquad 228)$$

Hier ist

$$U_\nu = -\frac{1}{2} \sum_{h=1}^{h=2\nu} x_h = -\frac{1}{2} \sum_{h=1}^{h=2\nu} v\,(h - 1) = -\frac{v\nu\,(2\nu - 1)}{2} \qquad 229)$$

wobei zu bemerken, dass $v\,(2\nu + 1) = 2\pi$ ist. Man findet dann, da in 220) diesmal

$$\sin \left(U_\varphi + \varphi\, v\,(h - 1)\right) = (-1)^\nu \sin \nu v h \qquad 230)$$

wird,

$$\left.\begin{aligned} u_o &= \frac{1}{2\nu + 1} \sum_{h=1}^{h=2\nu+1} \alpha_h \\ p_m &= \frac{2}{2\nu + 1} \sum_{h=1}^{h=2\nu+1} \alpha_h \cos mv\,(h - 1) \\ q_m &= \frac{2}{2\nu + 1} \sum_{h=1}^{h=2\nu+1} \alpha_h \sin mv\,(h - 1) \\ m &= 1, 2, \ldots (\nu - 1) \\ u_\nu &= (-1)^\nu \cdot \frac{2}{2\nu + 1} \sum_{h=1}^{h=2\nu+1} \alpha_h \sin \nu v h \end{aligned}\right\} \qquad 231)$$

Setzt man diese Ausdrücke in 228) ein, so entsteht

$$(2\nu + 1)y = \sum_{h=1}^{h=2\nu+1} \alpha_h \left(1 + 2 \sum_{m=1}^{m=\nu-1} \cos m\left(v(h-1) - x\right) + (-1)^{\nu} \cdot 2 \sin \nu v h \cdot \sin\left(\nu x - \frac{\nu v (2\nu-1)}{2}\right)\right) \tag{232}$$

Für $x = 2\nu v$ wird $y = \alpha_{2\nu+1}$ und $\nu x - \frac{\nu v (2\nu - 1)}{2} = \nu\pi$, d. h.

$$2\alpha_{2\nu+1} = \sum_{h=1}^{h=2\nu} \alpha_h \left(1 + 2 \sum_{m=1}^{m=\nu-1} \cos mv\,(2\nu - h + 1)\right) \tag{233}$$

Vermittelst 210) hat man dann nach einfachen Reduktionen

$$\sum_{m=1}^{m=\nu-1} \cos mv\,(2\nu - h + 1) = (-1)^{h-1} \cos \frac{\pi h}{2\nu + 1} - \frac{1}{2} \tag{234}$$

und hiermit gewinnt man schliesslich

$$\alpha_{2\nu+1} = \sum_{h=1}^{h=2\nu} (-1)^{h-1} \alpha_h \cos \frac{\pi h}{2\nu + 1} \tag{235}$$

Im folgenden findet sich auch hierfür ein Beispiel.

3) Die dritte und einfachste Methode besteht in der direkten Verwendung der Gauss'schen Gleichungen. Ich will das Verfahren und die Vereinfachungen, welche sich unter gewissen Umständen darbieten, an ausgewählten Fällen zeigen.

Es sei $n = 2\nu$, und es fehle eine, und zwar die letzte der aequidistanten Beobachtungen, so dass man nur die Reihe hat:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Phasen } x_h = v\,(h - 1) \\ \text{Amplituden } \alpha_h \end{array}\right\} h = 1, 2, \ldots (2\nu - 1)$$

Gesucht wird $\alpha_{2\nu}$ mit der Phase $x_{2\nu} = v\,(2\nu - 1)$, wo wieder $v\nu = \pi$ ist. Man hat nun die Gauss'sche Formel 174) anzuwenden, die diesmal geschrieben werden kann

$$\alpha_{2\nu} = \sum_{h=1}^{h=2\nu-1} \alpha_h \frac{\Pi \sin \frac{x_m - x_{2\nu}}{2}}{\Pi \sin \frac{x_m - x_h}{2}} \tag{236}$$

$$m = 1, 2, \ldots (h - 1), (h + 1) \ldots (2\nu - 1)$$

Wegen

$$x_m - x_k = v\,(m - k) \tag{237}$$

wird hieraus nach leichten Umformungen

$$\alpha_{2\nu} = \sum_{h=1}^{h=2\nu-1} \alpha_h \frac{(-1)^{2\nu-2}\,\Pi \sin\frac{v\,(2\nu - m)}{2}}{(-1)^{h-1}\,\Pi \sin\frac{v\,(h-r)}{2} \cdot \Pi \sin\frac{vg}{2}} \tag{238}$$

$$m = 1, 2, \ldots (h-1), (h+1) \ldots (2\nu - 1)$$
$$r = 1, 2, \ldots (h-1)$$
$$g = 1, 2, \ldots (2\nu - h - 1)$$

Die $2\nu - h - 1$ letzten Faktoren in Zähler und Nenner sind (in umgekehrter Reihenfolge) dieselben; ferner ist $\sin\frac{v\,(2\nu - m)}{2} = \sin\frac{v\,m}{2}$, so dass die $h - 1$ ersten Faktoren des Zählers mit denen des ersten Produkts im Nenner identisch werden. Daraus erhält man dann sofort

$$\alpha_{2\nu} = \sum_{h=1}^{h=2\nu-1} (-1)^{h-1}\,\alpha_h \tag{239}$$

wie schon in 227) abgeleitet ward. Da bei Aequidistanz unter allen Umständen

$$u_o = \frac{1}{2\nu} \sum_{h=1}^{h=2\nu} \alpha_h \tag{240}$$

ist, so resultirt, wenn man hier den Werth von $\alpha_{2\nu}$ einsetzt, als Mittelwerth aus der unvollständigen Amplitudenreihe sogleich

$$u_o = \frac{1}{\nu} \sum_{h=1}^{h=\nu} \alpha_{2h-1} \tag{241}$$

Auf das Beispiel der Madrider Beobachtungen im Zweiten Theil S. 38 wurde schon früher hingewiesen. Das Resultat kann übrigens ohne alle Rechnung aus der Überlegung abgeleitet werden, dass die ungeraden Amplituden eine aequidistante Reihe von ν Gliedern bilden, zu denen dann noch $\nu - 1$ überzählige Beobachtungen, die geraden Amplituden, hinzutreten. Nach dem Zweiten Theil ist der wahre Mittelwerth dann einfach das arithmetische Mittel aus den ungeraden Amplituden.

Als neues Beispiel wähle ich wieder die schon im Ersten Abschnitt angeführten Temperaturen von Tiflis in den einzelnen Monaten und im Jahr. Ich will annehmen, es lägen statt der 24 täglichen Beobachtungen nur die für die 7 Termine

1^h, 7^h, 10^h, 13^h, 16^h, 19^h, 22^h vor, es fehle also an der aequidistanten Reihe der Termin 4^h. Dieses Beispiel ward gewählt und wird in der Folge noch weiter benutzt werden mit Rücksicht auf den Umstand, dass die periodische Amplitude der Temperatur in Tiflis sehr gross ist; es sind daher von vorneherein beträchtliche Differenzen zwischen Beobachtung und Rechnung zu erwarten.

Tab. 4.

Monat.	4^h			Tages-Mittel u_0		
	Beob. C.	Berechn. C.	Korrekt. C.	Beob. C.	Berechn. C.	Korrekt. C.
Jan.	−1·62	−2·69	+1·07	0·55	0·43	+0·12
Febr.	−1·17	−2·53	+1·36	1·22	1·05	+0·17
März	4·22	2·86	+1·36	7·44	7·25	+0·19
April	7·40	6·56	+0·84	11·22	11·13	+0·09
Mai	12·83	12·51	+0·32	17·29	17·27	+0·02
Juni	16·44	16·87	−0·43	21·55	21·63	−0·08
Juli	19·53	19·46	+0·07	24·41	24·40	+0·01
Aug.	19·86	18·50	+1·36	24·42	24·22	+0·20
Sept.	15·58	13·95	+1·63	19·41	19·20	+0·21
Oct.	10·12	8·22	+1·90	13·69	13·46	+0·23
Nov.	4·89	3·46	+1·43	7·59	7·40	+0·19
Dez.	−0·05	−0·48	+0·43	2·00	1·95	+0·05
Jahr	9·00	8·04	+0·96	12·56	12·45	+0·11

Die an den berechneten Grössen anzubringenden Korrektionen fallen hiernach, wie bereits vermuthet, für 4^h meist sehr beträchtlich aus. Es gibt indessen vorläufig kein besseres Mittel zur Bestimmung der fehlenden Amplitude, wenn man nicht zur Graphik greifen will, bei der doch sehr starke Willkürlichkeiten nicht zu vermeiden sind. Ich glaube nicht, dass die auf graphischem Wege entstehenden Differenzen zwischen Zeichnung und Beobachtung (bei 7 gegebenen Phasen und Amplituden) geringer als die auf dem Wege der Rechnung gefundenen ausfallen werden. Die obigen Korrektionen der Monatsmittel sind viel weniger auffallend, wenn man sich vergegenwärtigt, dass dabei Mittel aus nur 4 aequidistanten Beobachtungen (1^h, 7^h, 13^h, 19^h) mit wahren, 24-stündlichen verglichen werden.

Ein weiteres Beispiel bietet der Fall, wo man alle Monatsmittel mit Ausnahme eines einzigen kennt; dabei ist freilich vorausgesetzt, dass die Monatsmittel als aequidistante Reihe aufgefasst werden dürfen. Dies geht aber hier, wo es sich doch nur um eine Interpolation handelt, um so eher an, als man sich ja zufolge Kongressbeschlusses das Jahresmittel als einfaches arithmetisches Mittel der Monatsmittel

zu bilden erlaubt. So liegen seitens der französischen Polarexpedition 1882 bis 1883 nach Cap Horn u. a. die Temperaturmittel nur für die 11 Monate Oktober 1882 bis August 1883 vor. Die Werthe (in Graden C.) sind nach der betreffenden Publikation *), d. h. ohne Anbringung der Instrumentalkorrektion, die — 0·2 bis — 0·3 °C. beträgt, in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Tab. 5.

Monat.	Mittel (C.)
Oktober 1882	$b_{10} = 5·78$
November „	$b_{11} = 6·83$
Dezember „	$b_{12} = 7·90$
Januar 1883	$b_1 = 7·78$
Februar „	$b_2 = 8·92$
März „	$b_3 = 5·90$
April „	$b_4 = 4·94$
Mai „	$b_5 = 4·39$
Juni „	$b_6 = 2·33$
Juli „	$b_7 = 3·20$
August „	$b_8 = 3·03$

Man findet daraus als interpolirten Werth für September

$$b_9 = (b_{10} + b_{12} + b_2 + b_4 + b_6 + b_8) - (b_{11} + b_1 + b_3 + b_5 + b_7) = 4·80\ ^0\mathrm{C}.$$

und als Jahresmittel für Cap Horn (unkorrigirt)

$$u_o = \frac{1}{6}(b_{10} + b_{12} + b_2 + b_4 + b_6 + b_8) = 5·48\ ^0\mathrm{C}.$$

Es sei jetzt $n = 2\nu + 1$, d. h. die Anzahl der aequidistanten Beobachtungen ungerade, und es fehle wieder die letzte $a_{2\nu+1}$, zu $x_{2\nu+1} = 2\,v\,\nu$ gehörige, während $v(2\nu + 1) = 2\pi$ ist.

Diesmal ist die Formel 175) zu benutzen, die sich von der Gleichung 174) nur dadurch unterscheidet, dass man in letzterer 2ν durch $2\nu + 1$ ersetzen und bei α_h den Faktor $\cos\frac{x_h - x_{2\nu+1}}{2}$ zufügen muss. Die sonstigen Reduktionen sind den oben angewandten vollkommen entsprechend, und berücksichtigt man noch, dass

$$\cos\frac{x_h - x_{2\nu+1}}{2} = -\cos\frac{\pi h}{2\nu + 1} \tag{242}$$

*) Mission scientifique du Cap Horn 1882—1883. Tome II, Paris 1885, pg. 29.

ist, so erhält man sofort, in Übereinstimmung mit 235)

$$a_{2\nu+1} = \sum_{h=1}^{h=2\nu} (-1)^{h-1} a_h \cos \frac{\pi h}{2\nu+1} \tag{243}$$

Da

$$\cos \frac{\pi(2\nu+1-h)}{2\nu+1} = -\cos \frac{\pi h}{2\nu+1} \tag{244}$$

so kann die Formel auch in den Ausdruck

$$a_{2\nu+1} = \sum_{h=1}^{h=\nu} (-1)^{h-1} (a_h + a_{2\nu+1-h}) \cos \frac{\pi h}{2\nu+1} \tag{245}$$

der zur Rechnung bequemer ist, umgestaltet werden. Zur Mittelbestimmung hat man

$$u_o = \frac{1}{2\nu+1} \left(\sum_{h=1}^{h=2\nu} a_h + a_{2\nu+1} \right) \tag{246}$$

und nach Einführung des Werthes aus 245)

$$u_o = \frac{2}{2\nu+1} \sum_{h=1}^{h=\nu} \left(a_{2h-1} \cos^2 \frac{\pi(2h-1)}{2(2\nu+1)} + a_{2h} \cdot \sin^2 \frac{h\pi}{2\nu+1} \right) \tag{247}$$

Hieraus wird wegen

$$\sin \frac{\pi(\nu+1-h)}{2\nu+1} = \cos \frac{\pi(2h-1)}{2(2\nu+1)} \tag{248}$$

schliesslich

$$u_o = \frac{2}{2\nu+1} \sum_{h=1}^{h=\nu} (a_{2h-1} + a_{2\nu-2h+2}) \cos^2 \frac{\pi(2h-1)}{2(2\nu+1)} \tag{249}$$

Wie vorauszusehen war, gruppiren sich in den Formeln für $a_{2\nu+1}$ und u_o die gegebenen Amplituden symmetrisch um die fehlende Phase. Als Beispiel wähle ich diesmal Beobachtungen der Temperatur zu Helsingfors (Observations faites à l'observatoire magnétique et météorologique de Helsingfors, 1873, Bd. 5, S. 244) für den Julimonat. Es ist damals alle 20 Minuten, tagsüber also 72 mal, beobachtet worden. Ich greife aequidistante Werthe für $n = 9$ heraus, habe jedoch die dort gegebenen Grade R. in C. verwandelt.

Tab. 6.

Zeit.	Temper. (C.)
$0^h\ 5^m$	$a_6 = 14{\cdot}11$
$2^h\ 45^m$	$a_7 = 13{\cdot}06$
$5^h\ 25^m$	$a_8 = 13{\cdot}96$
$8^h\ 5^m$	$a_9 = 16{\cdot}60$
$10^h\ 45^m$	$a_1 = 18{\cdot}44$
$13^h\ 25^m$	$a_2 = 19{\cdot}26$
$16^h\ 5^m$	$a_3 = 18{\cdot}82$
$18^h\ 45^m$	$a_4 = 17{\cdot}58$
$21^h\ 25^m$	$a_5 = 15{\cdot}48$

Es fehle die Beobachtung um $8^h\ 5^m$; die Periode mag mit $10^h\ 45^m$ beginnen. Man hat dann $n = 9$, $\nu = 4$, $\pi : (2\nu + 1) = \pi : 9$ und

$$a_9 = (a_1 + a_8) \cos \frac{\pi}{9} - (a_2 + a_7) \cos \frac{2\pi}{9} + (a_3 + a_6) \cos \frac{\pi}{3} - (a_4 + a_5) \cos \frac{4\pi}{9}$$

oder

$$a_9 = 16{\cdot}41\ ^\circ\mathrm{C};\ \text{Korrektion} + 0{\cdot}19.$$

Ferner

$$u_o = \frac{2}{9}\left((a_1 + a_8) \cos^2 \frac{\pi}{18} + (a_3 + a_6) \cos^2 \frac{\pi}{6} + (a_5 + a_4) \cos^2 \frac{5\pi}{18} + (a_7 + a_2) \cos^2 \frac{7\pi}{18}\right)$$

d. h.

$$u_o = 16{\cdot}38\ ^\circ\mathrm{C}.$$

Das Mittel aus den 72 täglichen Beobachtungen für den Juli ist ebenfalls $16{\cdot}38\ ^\circ$C, die Korrektion also $0{\cdot}00$, eine Übereinstimmung, welche wohl zumeist der geringen periodischen Amplitude von Helsingfors zuzuschreiben ist.

Es mag nun wieder $n = 2\nu$ sein, und es sollen zwei, und zwar die beiden letzten Beobachtungen fehlen, also

$$\left.\begin{matrix} x_h = v(h-1) \\ a_h \end{matrix}\right\} h = 1,\ 2, \ldots (2\nu - 2)$$

Man sucht $a_{2\nu-1}$ und $a_{2\nu}$. Nach 175) hat man unter Rücksicht auf 237)

250)

$$a_{2\nu-1} = \sum_{h=1}^{h=2\nu-2} a_h \frac{(-1)^{2\nu-3} \sin \frac{v(2\nu-2)}{2} \ldots \sin \frac{v(2\nu-h)}{2} \cdot \sin \frac{v(2\nu-h-2)}{2} \ldots \sin \frac{v}{2}}{(-1)^{h-1} \sin \frac{v(h-1)}{2} \ldots \sin \frac{v}{2} \cdot \sin \frac{v}{2} \ldots \sin \frac{v(2\nu-h-2)}{2}} \cdot \cos \frac{v(2\nu-1-h)}{2}$$

Hier heben sich alle Faktoren des Zählers und des Nenners theils direkt, theils wegen

$$\sin\frac{v(2\nu-k)}{2}=\sin\frac{vk}{2} \tag{251}$$

mit Ausnahme des $(h-1)^{\text{ten}}$ Faktors, und man erhält nach einfacher Reduktion des letzten Faktors $\cos\frac{v(2\nu-1-h)}{2}=-\cos\frac{v(h+1)}{2}$

$$a_{2\nu-1}=\sum_{h=1}^{h=2\nu-2}(-1)^{h-1}a_h\frac{\sin\frac{vh}{2}\cdot\cos\frac{v(h+1)}{2}}{\sin\frac{v}{2}} \tag{252}$$

Für $a_{2\nu}$ entsteht nach Umformungen, die den obigen vollkommen entsprechend sind

$$a_{2\nu}=\sum_{h=1}^{h=2\nu-2}(-1)^{h-1}a_h\frac{\sin\frac{v(h+1)}{2}\cdot\cos\frac{vh}{2}}{\sin\frac{v}{2}} \tag{253}$$

Führt man diese Ergebnisse in die Formel für den Mittelwerth

$$u_o=\frac{1}{2\nu}\left(\sum_{h=1}^{h=2\nu-2}a_h+a_{2\nu-1}+a_{2\nu}\right) \tag{254}$$

ein, so erhält man schliesslich

$$u_o=\frac{1}{2\nu}\sum_{h=1}^{h=2\nu-2}a_h\left(1+(-1)^{h-1}\frac{\sin\frac{v(2h+1)}{2}}{\sin\frac{v}{2}}\right) \tag{255}$$

Als Beispiel werde $n=8$ gewählt; dann hat man

$$a_7=a_4-a_5+a_6+(a_1-a_2-a_5+a_6)\sqrt{0{\cdot}5}$$

$$a_8=a_1-a_2+a_3+(a_1-a_2-a_5+a_6)\sqrt{0{\cdot}5}$$

$$u_o=\frac{1}{4}\left(a_1+a_3+a_4+a_6+(a_1-a_2-a_5+a_6)\sqrt{0{\cdot}5}\right)$$

Diese Formeln müssten beispielsweise in Dorpat bei Berechnung der Mittelwerthe und des täglichen Ganges für Wind und Bewölkung in Anwendung kommen (vgl. Zweiter Theil, S. 29). Ich will indessen wieder die Beobachtungen der Temperatur von Tiflis, die schon früher benutzt wurden, danach behandeln. Es mögen

die Beobachtungen von 1^h und 4^h als fehlend angenommen werden, während die Werthe für 7^h, 10^h, 13^h, 16^h, 19^h, 22^h bekannt seien. Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Tab. 7.

Monat.	1^h			4^h			Tagesmittel u_0		
	Beob.	Ber.	Korr.	Beob.	Ber.	Korr.	Beob.	Ber.	Korr.
Jan.	−1·13	−0·03	−1·10	−1·62	−1·59	−0·03	0·55	0·71	−0·16
Febr.	−0·54	−0·15	−0·39	−1·17	−2·14	+0·97	1·22	1·15	+0·07
März	4·98	5·00	−0·02	4·22	2·88	+1·34	7·44	7·26	+0·18
April	8·50	8·41	+0·09	7·40	6·47	+0·93	11·22	11·11	+0·11
Mai	14·04	13·93	+0·11	12·83	12·40	+0·43	17·29	17·24	+0·05
Juni	17·84	17·11	+0·73	16·44	16·14	+0·30	21·55	21·45	+0·10
Juli	20·85	20·08	+0·77	19·53	18·69	+0·84	24·41	24·20	+0·21
Aug.	20·99	21·23	−0·24	19·86	18·74	+1·12	24·42	24·28	+0·14
Sept.	16·54	16·91	−0·37	15·58	14·32	+1·26	19·41	19·30	+0·11
Okt.	10·97	11·37	−0·40	10·12	8·62	+1·50	13·69	13·56	+0·13
Nov.	5·32	5·72	−0·40	4·89	3·86	+1·03	7·59	7·50	+0·09
Dez.	0·47	0·89	−0·42	−0·05	−0·06	+0·01	2·00	2·06	−0·06
Jahr	9·90	10·05	−0·15	9·00	8·19	+0·81	12·56	12·48	+0·08

Auch hier fallen, wie aus dem früher angegebenen Grunde zu erwarten war, die Differenzen zwischen Beobachtung und Rechnung für die Stunden 1^h und 4^h zum Theil sehr gross aus. Für Monats- und Jahres-Mittel sind die Korrektionen im allgemeinen etwas kleiner als früher, wo nur eine Beobachtung täglich als fehlend angenommen ward. Der Grund mag darin zu suchen sein, dass dort zur Mittelbildung nur 4 der gegebenen 7 Amplituden in Wirklichkeit benutzt werden können, während diesmal alle 6 gegebenen Amplituden in die Gleichung für u_0 eintreten.

Da eine ungerade Zahl von aequidistanten Beobachtungen, $n = 3$ ausgenommen, nur sehr selten vorkommt, so will ich den Fall, dass in einer solchen Reihe zwei aufeinanderfolgende Beobachtungen fehlen, nicht besonders behandeln. Dagegen mag schliesslich noch der Fall, wo bei $n = 2\nu$ im ganzen d r e i aufeinanderfolgende Beobachtungen fehlen, erörtert werden, weil es hierfür Anwendungen gibt. Sind also die Phasen und Amplituden

$$\left.\begin{array}{l} x_h = v\,(h-1) \\ \alpha_h \end{array}\right\} \; h = 1, 2, \ldots (2\nu - 3)$$

gegeben, und werden die Amplituden $\alpha_{2\nu-2}$, $\alpha_{2\nu-1}$, $\alpha_{2\nu}$ gesucht, so erhält man durch Benutzung der G a u s s'schen Gleichung 174) vermittelst Umformungen, die den vorhin angewandten ganz entsprechen, sehr leicht folgende Ergebnisse:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_{2\nu-2} &= \sum_{h=1}^{h=2\nu-3} (-1)^{h-1} \alpha_h \frac{\sin\frac{\nu h}{2} \sin\frac{\nu(h+1)}{2}}{\sin\nu \,.\, \sin\frac{\nu}{2}} \\
\alpha_{2\nu-1} &= \sum_{h=1}^{h=2\nu-3} (-1)^{h-1} \alpha_h \frac{\sin\frac{\nu h}{2} \sin\frac{\nu(h+2)}{2}}{\sin^2\frac{\nu}{2}} \\
\alpha_{2\nu} &= \sum_{h=1}^{h=2\nu-3} (-1)^{h-1} \alpha_h \frac{\sin\frac{\nu(h+1)}{2} \sin\frac{\nu(h+2)}{2}}{\sin\nu \,.\, \sin\frac{\nu}{2}}
\end{aligned}\right\} \qquad 256)$$

und weiter

$$u_o = \frac{1}{\nu \sin^2\frac{v}{2}} \left(\sum_{h=1}^{h=\nu-1} \alpha_{2h-1} \sin^2 vh - \sum_{h=1}^{h=\nu-2} \alpha_{2h} \sin vh \,.\, \sin v(h+1) \right) \qquad 257)$$

Als Beispiel wähle ich abermals die Temperaturbeobachtungen für Tiflis, und zwar für den täglichen Gang im Jahresmittel. Es mag $n = 12$ sein, die Periode beginne um 6^h, und die Beobachtungen für 24^h, 2^h, 4^h mögen fehlen. Die obigen Formeln liefern dann

$$\begin{aligned}
\alpha_{10} = b_{24} &= \alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 - 3\alpha_4 + 4\alpha_5 - 4\alpha_6 + 3\alpha_7 - 3\alpha_8 + \alpha_9 \\
&\quad + (-\alpha_2 + \alpha_3 - 2\alpha_4 + 2\alpha_5 - 2\alpha_6 + 2\alpha_7 - \alpha_8 + \alpha_9)\sqrt{3} \\
\alpha_{11} = b_2 &= \alpha_1 - 3\alpha_2 + 5\alpha_3 - 6\alpha_4 + 7\alpha_5 - 6\alpha_6 + 5\alpha_7 - 3\alpha_8 + \alpha_9 \\
&\quad + (\alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 - 4\alpha_4 + 4\alpha_5 - 4\alpha_6 + 3\alpha_7 - 2\alpha_8 + \alpha_9)\sqrt{3} \\
\alpha_{12} = b_4 &= \alpha_1 - 3\alpha_2 + 3\alpha_3 - 4\alpha_4 + 4\alpha_5 - 3\alpha_6 + 3\alpha_7 - \alpha_8 + \alpha_9 \\
&\quad + (\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 - 2\alpha_4 + 2\alpha_5 - 2\alpha_6 + \alpha_7 - \alpha_8)\sqrt{3} \\
u_o &= \frac{1}{6}(2\alpha_1 - 3\alpha_2 + 6\alpha_3 - 6\alpha_4 + 8\alpha_5 - 6\alpha_6 + 6\alpha_7 - 3\alpha_8 + 2\alpha_9) \\
&\quad + \frac{\sqrt{3}}{6}(\alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 - 4\alpha_4 + 4\alpha_5 - 4\alpha_6 + 3\alpha_7 - 2\alpha_8 + \alpha_9)
\end{aligned}$$

Hiermit sind die Werthe der folgenden Tabelle ermittelt worden.

Tab. 8.

Stunde.	Ampl.	Beob.	Ber.	Korr.
24^h	α_{10}	10·28	10·28	0·00
2^h	α_{11}	9·60	9·54	+0·06
4^h	α_{12}	9·00	8·95	+0·05
Mittel	u_o	12·56	12·56	0·00

Die grosse Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung ist indessen als durchaus zufällig zu betrachten. Führt man die entsprechende Rechnung für den Juli durch, so erscheint ein zweites, sekundäres Maximum zwischen 24^h und 6^h, die Korrektionen werden sehr beträchtlich, und selbst der Mittelwerth hat noch die Korrektion — 1·13 °C! An sich schon ist natürlich die Interpolation von drei aufeinander folgenden Beobachtungen in hohem Grade bedenklich, und man wird sich gegebenen Falles in der Praxis mit der Berechnung der Mittelwerthe unbedingt begnügen müssen.

Obige Formeln, oder wenigstens die für u_o, könnten direkt Verwendung finden bei den Beobachtungen, welche in Peking während der Jahre 1841 bis 1853 in den 9 Terminen 5^h, 7^h, 9^h, 11^h, 13^h, 15^h, 17^h, 19^h, 21^h täglich angestellt wurden (vgl. Annales de l'Observatoire Physique Central de Russie, année 1854, supplément pg. 61).

Vierter Abschnitt.

Bestimmung des Mittelwerths bei t Systemen von je n aequidistanten Beobachtungen.

Innerhalb der Periode 2π mögen t Systeme von je n aequidistanten Beobachtungen vorliegen, welche folgendermassen dargestellt werden können:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Phasen: } x_{k,1},\ x_{k,2},\ \ldots\ x_{k,n} \\ \text{Amplituden: } \alpha_{k,1},\ \alpha_{k,2},\ \ldots\ \alpha_{k,n} \end{array}\right\}\ k = 1,\ 2,\ \ldots\ t$$

$$\left.\begin{array}{c} x_{k,h} = a_k + v\,(h-1) \\ v = 2\pi : n \end{array}\right\} \qquad 258)$$

so dass die Anfangsphasen der Systeme durch a_k bezeichnet sind. Die einzelnen Reihenmittel mögen sein

$$A_k = \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{h=n} \alpha_{k,h} \qquad 259)$$

$$k = 1,\ 2,\ \ldots\ t$$

Das Generalmittel u_o kann nun nach den im Ersten Theil entwickelten Formeln berechnet werden, wenn man von den nt über die Periode 2π vertheilten Phasen und Amplituden $(x_{k,h},\ \alpha_{k,h})$ direkt ausgeht. Indessen ist die Durchführung der Rechnung auf diesem Wege meistens sehr mühsam, und es soll deshalb hier

eine andere Methode angegeben werden. In der Praxis liegt diese Aufgabe immer vor, wenn in der Reihe der aequidistanten Beobachtungen Lücken vorhanden sind. Man kann dann entweder zuerst nach den im Dritten Abschnitt gegebenen Vorschriften die fehlenden Werthe interpoliren und darauf zur Bildung der Mittelwerthe schreiten, oder man kann, wie dies Lloyd*) gethan hat, eine möglichst grosse Anzahl von Reihen aequidistanter Beobachtungen aus der gegebenen lückenhaften Reihe bilden und aus deren Einzelmitteln das Generalmittel u_o aufsuchen wollen. Dasselbe ist aber im allgemeinen nicht das arithmetische Mittel der Einzelmittel, wie es zuerst wohl den Anschein haben könnte und wie Lloyd es auch meint, sondern es muss so gebildet werden, wie die folgende Untersuchung ergeben wird. Dabei sind die Fälle, wo t ungerade oder gerade ist, zunächst von einander zu unterscheiden.

a) Es sei $t = 2\tau + 1$. Die Bessel'sche Formel lautet dann für die Fälle $n = 2\nu$ und $n = 2\nu + 1$

260)
$$y = u_o + \sum_{m=1}^{m=n\tau+\nu-1} (p_m \cos m x + q_m \sin m x) + u_{n\tau+\nu} \sin \left(U_{n\tau+\nu} + (n\tau + \nu)\, x\right)$$

mit der Bedingung, dass für $n = 2\nu$

$$U_{n\tau+\nu} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=t} \sum_{h=1}^{h=n} x_{k,h} \tag{261}$$

nach 112) zu setzen ist.

Führt man hier für x den Werth von $x_{k,h}$ aus 258) ein, so geht y in $\alpha_{k.}$ über, und man erhält nt solcher Gleichungen mit nt Unbekannten u_o, p_m, q_m u. s. f. Ich greife zunächst die für $k = 1$ entstehenden n ersten Gleichungen heraus, welche lauten

$$\begin{aligned}\alpha_{1,h} = u_o + \sum_{m=1}^{m=n\tau+\nu-1} \Big(p_m \cos m\left(a_1 + v\,(h-1)\right) + q_m \sin m\left(a_1 + v\,(h-1)\right)\Big) \\ + u_{n\tau+\nu} \sin\Big(U_{n\tau+\nu} + (n\tau+\nu)\left(a_1 + v\,(h-1)\right)\Big)\end{aligned} \tag{262}$$

oder 263)

$$\alpha_{1,h} = u_o + \sum_{m=1}^{m=n\tau+\nu-1} \Big((p_m \cos m a_1 + q_m \sin m a_1) \cos m v (h-1) + (-p_m \sin m a_1 + q_m \cos m a_1) \sin m v (h-1)\Big)$$

$$+ u_{n\tau+\nu}\Big(\sin\left(U_{n\tau+\nu} + a_1(n\tau+\nu)\right)\cos(n\tau+\nu)\, v(h-1) + \cos\left(U_{n\tau+\nu} + a_1(n\tau+\nu)\right)\sin(n\tau+\nu)\, v(h-1)\Big)$$

$$h = 1,\ 2,\ \ldots n$$

*) Transactions of the Royal Irish Academy, 1855, Bd. XXII, S. 61 (On the Mean Results of Observations; read June 12, 1848).

Addirt man diese n Gleichungen, so verschwinden 1) die auf $\sin mv(h-1)$ bezüglichen Summen (auch im letzten Theilsatz) unter allen Umständen, 2) die auf $\cos mv(h-1)$ bezüglichen Summen (auch im letzten Theilsatz), sobald nicht m ein Vielfaches von n wird. In letzterem Falle hat man, wenn m durch mn ersetzt wird

$$\cos mnv(h-1) = \cos 2\pi m(h-1) = 1 \qquad 264)$$

und die ganze Summe wird zufolge 259) nach Division mit n

$$A_1 = u_o + \sum_{m=1}^{m=\tau} (p_{mn} \cos mna_1 + q_{mn} \sin mna_1) \qquad 265)$$

da offenbar in der Reihe $m = 1$ bis $m = n\tau + \nu - 1$ in 263) genau τ Fälle vorkommen, in denen m ein Vielfaches von n, nämlich $1n, 2n, \ldots \tau n$ wird. Die Gleichung 265) hat dann die t Unbekannten $u_o, p_n, q_n, \ldots p_{\tau n}, q_{\tau n}$. Der Vorgang ist im wesentlichen derselbe wie im Ersten Theil S. 33 u. flgd., wo man zu den Gleichungen 132) gelangt, die der obigen Gleichung entsprechen. Die nämliche Behandlung von je n der übrigen Gleichungen aus dem anfänglichen System von nt Gleichungen führt dann zu

$$A_k = u_o + \sum_{m=1}^{m=\tau} (p_{mn} \cos mna_k + q_{mn} \sin mna_k) \qquad 266)$$

$$k = 1, 2, \ldots t$$

d. h. auf ein System von t Gleichungen mit t Unbekannten.

b) Für $t = 2\tau$ lautet die Bessel'sche Formel, n mag gerade oder ungerade sein,

$$y = u_o + \sum_{m=1}^{m=n\tau-1} (p_m \cos mx + q_m \sin mx) + u_{n\tau} \sin (U_{n\tau} + n\tau x) \qquad 267)$$

wo

$$U_{n\tau} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=t} \sum_{k=1}^{k=n} x_{k,h} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=t} na_k - \tau(n-1)\pi \qquad 268)$$

nach 112) und 258) zu setzen ist. Nimmt man darauf Rücksicht, dass

$$n\tau v(h-1) = 2\pi\tau(h-1) \qquad 269)$$

ist, so hat man dem Vorgang in a) entsprechend

$$\alpha_{1,h} = u_o + \sum_{m=1}^{m=n\tau-1} \Big((p_m \cos ma_1 + q_m \sin ma_1) \cos mv(h-1) + (-p_m \sin ma_1 + q_m \cos ma_1) \sin mv(h-1)\Big) \qquad 270)$$
$$+ u_{n\tau} \sin(U_{n\tau} + n\tau a_1)$$
$$h = 1, 2, \ldots n$$

Bei der Summirung dieser n Gleichungen verschwinden 1) die auf $\sin mv\,(h-1)$ bezüglichen Summen ausnahmslos, 2) die Summen bezüglich $\cos mv\,(h-1)$, mit Ausnahme der Fälle, wenn m ein Vielfaches von n wird, was $\tau - 1$ mal vorkommt, und man erhält nach Division mit n

$$A_1 = u_o + \sum_{m=1}^{m=\tau-1} (p_{mn} \cos ma_1 + q_{mn} \sin ma_1) + u_{n\tau} \sin (U_{n\tau} + n\tau a_1) \qquad 271)$$

d. h. als allgemeines System

$$A_k = u_o + \sum_{m=1}^{m=\tau-1} (p_{mn} \cos ma_k + q_{mn} \sin ma_k) + u_{n\tau} \sin (U_{n\tau} + n\tau a_k) \qquad 272)$$

$$k = 1,\ 2, \ldots t$$

oder wiederum t Gleichungen mit t Unbekannten.

Die Mittelwerthbestimmung bei t Reihen von je n aequidistanten Beobachtungen läuft daher in jedem Falle, mag t gerade oder ungerade sein, auf die Aufgabe hinaus, aus t im allgemeinen nicht-aequidistanten Phasen $na_1, na_2, \ldots na_t$ mit den Amplituden $A_1, A_2, \ldots A_t$ die Grösse u_o aufzufinden. Diese Aufgabe ist aber schon durch die Formeln 38) und 61) vollständig gelöst. Es wäre zwar dann nach 112) für ein gerades t zu setzen

$$U_{n\tau} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=t} na_k \qquad 273)$$

indessen deckt sich diese Bedingung mit der für $U_{n\tau}$ in 268) aufgestellten, da die beiden Werthe für $U_{n\tau}$ sich nur um Vielfache von π von einander unterscheiden.

Charakteristisch ist hier das Auftreten des n-fachen Werthes der Reihenanfangsphasen a_k.

Sollten die Werthe $na_1, na_2, \ldots na_t$ selbst wieder eine aequidistante Reihe bilden (was indessen nichts anderes hiesse, als dass dann das ganze System von nt Beobachtungen ein einziges aequidistantes System mit der Distanz $\frac{2\pi}{nt}$ ist), dann wäre u_o in der That das arithmetische Mittel der Einzelmittel A_k; im allgemeinen ist aber u_o von $\frac{1}{t} \sum_{k=1}^{k=t} A_k$ wesentlich verschieden und somit die Lloyd'sche Auffassung unrichtig. Nur in dem einzigen Falle $t = 2$ ist dieselbe korrekt, d. h. es ist das Generalmittel u_o gleich dem arithmetischen Mittel aus den beiden Einzelmitteln. Hat man nämlich $t = 2$, so wird

$$A_1 = u_o + u_n \sin (U_n + na_1)$$

$$A_2 = u_o + u_n \sin (U_n + na_2)$$

$$U_n = -\frac{a_1 + a_2}{2}$$

also

$$A_1 = u_o + u_n \sin \frac{n(a_1 - a_2)}{2}$$

$$A_2 = u_o - u_n \sin \frac{n(a_1 - a_2)}{2}$$

$$u_o = \frac{1}{2}(A_1 + A_2)$$

Beispielsweise sei angenommen, man kenne von Tiflis nur die Temperaturwerthe für die Termine 6^h, 14^h, 22^h einerseits, 8^h, 16^h, 24^h andrerseits. Dann wird das Tagesmittel, obgleich die Anfangsphasen der beiden dreigliedrigen Reihen keine aequidistante Reihe bilden, einfach das arithmetische Mittel aus den 6 Terminbeobachtungen. Die Zahlenresultate sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Tab. 9.

Monat.	u_o		
	Beob.	Berechn.	Korrekt.
Jan.	0·55	0·61	−0·06
Febr.	1·22	1·23	−0·01
März	7·44	7·37	+0·07
April	11·22	11·16	+0·06
Mai	17·29	17·29	0·00
Juni	21·55	21·53	+0·02
Juli	24·41	24·36	+0·05
Aug.	24·42	24·35	+0·07
Sept.	19·41	19·35	+0·06
Oct.	13·69	13·73	−0·04
Nov.	7·59	7·60	−0·01
Dez.	2·00	2·01	−0·01
Jahr	12·56	12·55	+0·01

Die Korrektionen, welche an den berechneten Mittelwerthen anzubringen wären, fallen hiernach durchweg sehr klein aus.

Ist aber beispielsweise $t = 3$, so dass man die 3 Systeme hat

$$x_{1,1}, \ldots x_{1,n} \qquad \alpha_{1,1}, \ldots \alpha_{1,n}$$

$$x_{2,1}, \ldots x_{2,n} \qquad \alpha_{2,1}, \ldots \alpha_{2,n}$$

$$x_{3,1}, \ldots x_{3,n} \qquad \alpha_{3,1}, \ldots \alpha_{3,n}$$

$$A_1 = \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{h=n} \alpha_{1,h} \qquad A_2 = \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{h=n} \alpha_{2,h} \qquad A_3 = \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{h=n} \alpha_{3,h}$$

$$x_{1,h} = a_1 + v(h-1) \qquad x_{2,h} = a_2 + v(h-1) \qquad x_{3,h} = a_3 + v(h-1)$$

dann wird das aufzulösende Gleichungssystem

$$A_1 = u_o + p_n \cos na_1 + q_n \sin na_1$$

$$A_2 = u_o + p_n \cos na_2 + q_n \sin na_2$$

$$A_3 = u_o + p_n \cos na_3 + q_n \sin na_3$$

woraus sich ergibt

$$u_o = \frac{A_1 \sin n(a_3 - a_2) - A_2 \sin n(a_3 - a_1) + A_3 \sin n(a_2 - a_1)}{4 \sin \frac{n(a_2 - a_1)}{2} \sin \frac{n(a_3 - a_1)}{2} \sin \frac{n(a_3 - a_2)}{2}}$$

Hebt man z. B. für Tiflis aus der Tagesreihe die Termine 6^h und 18^h, 8^h und 20^h, 10^h und 22^h heraus, so ist $t = 3$, $n = 2$. Man hat dann

für 6^h, 18^h $\qquad a_1 = 0$

für 8^h, 20^h $\qquad a_2 = \frac{\pi}{6}$

für 10^h, 22^h $\qquad a_3 = \frac{\pi}{3}$

und die obige Formel gibt

$$u_o = A_1 - A_2 + A_3$$

Beim Einsetzen der Zahlenwerthe entstehen die Ergebnisse der folgenden Tabelle.

Tab. 10.

Monat.	u_o		
	Beob.	Berechn.	Korrekt.
Jan.	0·55	0·72	−0·17
Febr.	1·22	1·33	−0·11
März	7·44	7·42	+0·02
April	11·22	11·22	0·00
Mai	17·29	17·40	−0·11
Juni	21·55	21·78	−0·23
Juli	24·41	24·67	−0·26
Aug.	24·42	24·56	−0·14
Sept.	19·41	19·22	+0·19
Okt.	13·69	13·50	+0·19
Nov.	7·59	7·74	−0·15
Dez.	2·00	2·27	−0·27
Jahr	12·56	12·65	−0·09

Obgleich in beiden zuletzt behandelten numerischen Beispielen immer je 6 Beobachtungen täglich zur Mittelwerthbildung benutzt wurden, sind doch im ersten Falle die Korrektionen fast durchweg viel kleiner, als im zweiten. Dort kamen 2 Reihen von je 3 aequidistanten, hier 3 Reihen von je 2 aequidistanten Beobachtungen zur Verwendung. Dies weist darauf hin, dass man die Anzahl n der aequidistanten Beobachtungen auf Kosten der Reihenanzahl möglichst zu vergrössern bestrebt sein muss.

Hier mögen noch einige Bemerkungen bezüglich der Lücken in den Beobachtungsreihen Platz finden.

Man kann zwischen *ständigen* und *zufälligen* Lücken unterscheiden. Von jenen wird man sprechen, wenn an gewissen Terminen, welche in die regelmässige (aequidistante) Beobachtungsreihe hineingehören, überhaupt nicht beobachtet worden ist. So werden in *Dorpat* 8 aequidistante Beobachtungen täglich für Luftdruck und Temperatur, zum Theil mit Hülfe von Registririnstrumenten, angestellt, während für die übrigen Elemente, wie Wind, Feuchtigkeit und Bewölkung, die Beobachtungen in den beiden Nachtterminen 1^h und 4^h regelmässig ausfallen. Für letztere Elemente liegt also täglich ein System von 6 um je drei Stunden von einander abstehenden Beobachtungen, beginnend mit 7^h, vor, während für die Termine 1^h und 4^h *ständige* Lücken vorhanden sind. Wie man in solchen Fällen zu verfahren habe, um (etwa für die Monats- und Jahres-Resultate) die fehlenden Beobachtungen zu interpoliren und die Mittelwerthe zu bestimmen, ist im Dritten Abschnitt ausführlich gezeigt worden. *Zufällige* Lücken dagegen werden vorhanden sein, wenn zufolge irgend welcher Umstände in einer einzelnen Periode während einzelner Termine keine Beobachtungen angestellt worden sind. Man wird bei diesen zufälligen Lücken zwar ebenfalls nach den Vorschriften des Dritten Abschnitts zur Interpolation der fehlenden Beobachtungen schreiten, jedoch sich nicht mit der gewöhnlichen Periode allein begnügen dürfen, sondern, da die Phase, mit der man eine Periode beginnen lässt, ganz gleichgültig ist, alle möglichen die Lücken enthaltenden Perioden in der Weise aufstellen, dass zur Vermeidung von Extrapolationen niemals eine Lücke am Anfang oder am Ende steht, und jede dieser Perioden für sich bearbeiten. Auf diese Art gewinnt man eine Reihe von singulären Interpolationswerthen, aus denen der definitive Interpolationswerth je nach der Lage der Lücken in der gewöhnlichen Periode abzuleiten ist. Der in dieser Weise hergestellte definitive Interpolationswerth besitzt jedenfalls ein bedeutend grösseres Gewicht, als der singuläre, den man erhält, wenn man die Periode nur bei ihrem gewöhnlichen Anfang beginnen lässt, und der sich offenbar in der obigen Reihe singulärer Werthe im allgemeinen ebenfalls vorfindet. Jener definitive Werth bringt nämlich die zufälligen Störungen, die den regelmässigen Verlauf des Elementes innerhalb der Periode beeinflussen, durch Verwendung einer möglichst grossen Zahl von Beobachtungen vor und hinter der Lücke weit schärfer zur Geltung, als es bei irgend einem der singulären Interpolationswerthe der Fall sein kann.

Als erstes Beispiel für die Behandlung zufälliger Lücken sei angenommen, man habe eine gerade Zahl von aequidistanten Beobachtungen ($n = 2\nu$) während der Periode, und es fehle ein Beobachtungswerth, der c_o heissen mag. Die demselben vorausgehenden Werthe seien durch negative Indices (c_{-1} u. s. f.), die ihm folgenden durch positive Indices (c_1 u. s. f.) gekennzeichnet.

Da Extrapolirung vermieden werden soll, kann man rückwärts bis $c_{-2\nu+2}$ und vorwärts bis $c_{2\nu-2}$ gehen, so dass die ganze zu benutzende Reihe lautet

$$c_{-2\nu+2},\ c_{-2\nu+3},\ \ldots\ c_{-2},\ c_{-1},\ c_o,\ c_1,\ c_2,\ \ldots\ c_{2\nu-3},\ c_{2\nu-2}$$

Hieraus lassen sich im ganzen $2\nu - 2$ Perioden aufstellen, welche alle c_o enthalten, nämlich

1[te] Periode: $c_{-2\nu+2},\ c_{-2\nu+3},\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ c_{-1},\ c_o,\ c_1$

2[te] Periode: $c_{-2\nu+3},\ c_{-2\nu+4},\ \ldots\ldots\ c_{-1},\ c_o,\ c_1,\ c_2$

— — — — — — — — — — — — — — — — — —

k^{te} Periode: $c_{-2\nu+k+1},\ \ldots\ c_{-1},\ c_o,\ c_1,\ c_2,\ \ldots\ c_k$

— — — — — — — — — — — — — — — — — — — —

$(2\nu-2)^{te}$ Periode: $c_{-1},\ c_o,\ c_1,\ \ldots\ldots\ c_{2\nu-2}$

Bezeichnet man die singulären Interpolationswerthe durch $c_{o,k}$, so hat man unter Benutzung von 239)

$$\left.\begin{aligned}
c_{o,1} &= c_{-2\nu+3} + c_{-2\nu+5} + \ldots + c_{-1} + c_1 - (c_{-2\nu+2} + c_{-2\nu+4} + \ldots + c_{-2})\\
c_{o,2} &= c_{-2\nu+3} + c_{-2\nu+5} + \ldots + c_{-1} + c_1 - (c_{-2\nu+4} + c_{-2\nu+6} + \ldots + c_{-2} + c_2)\\
c_{o,3} &= c_{-2\nu+5} + c_{-2\nu+7} + \ldots + c_1 + c_3 - (c_{-2\nu+4} + c_{-2\nu+6} + \ldots + c_{-2} + c_2)\\
&\text{— — — — — — — — — — — — — — — — — —}\\
c_{o,2\nu-2} &= c_{-1} + c_1 + \ldots + c_{2\nu-3} - (c_2 + c_4 + \ldots + c_{2\nu-2})
\end{aligned}\right\} \quad 274)$$

und als definitiven Interpolationswerth

$$c_o = \frac{1}{2\nu-2}\sum_{k=1}^{k=2\nu-2} c_{o,k} \qquad 275)$$

oder nach einfachen Reduktionen

$$c_o = \frac{1}{2\nu-2}\left(\begin{aligned}&2(c_{-2\nu+3} + c_{2\nu-3}) + 4(c_{-2\nu+5} + c_{2\nu-5}) + \ldots + (2\nu-2)(c_{-1} + c_1)\\ &-1(c_{-2\nu+2} + c_{2\nu-2}) - 3(c_{-2\nu+4} + c_{2\nu-4}) - \ldots - (2\nu-3)(c_{-2} + c_2)\end{aligned}\right) \quad 276)$$

Hieraus ist sofort zu erkennen, wie der Einfluss einer vorangehenden oder nachfolgenden Beobachtung auf den definitiven Interpolationswerth um so mehr abnimmt, je weiter sich die Phase der Beobachtung von der Lücke entfernt.

Als Anwendung dieser Formel nehme ich einen Fall, in welchem ich die Lücke erst künstlich schaffe, um den interpolirten Werth mit dem beobachteten direkt vergleichen zu können. Der Fall ist absichtlich möglichst ungünstig gewählt, indem in der Gegend der Lücke starke Störungen des normalen Verlaufs für das betreffende Element, die Lufttemperatur, vorhanden sind. Es sind Beobachtungen, die ich dem Werke: „Report on the Proceedings of the United States Expedition to Lady Franklin Bay, Grinnell Land, by Adolphus W. Greeley, Washington 1888, Vol. II, (S. 178, 179)" entnehme, und zwar die Werthe für die Lufttemperatur (in Graden Fahrenheit) für die Tage 19, 20, 21 September 1881, stündlich nach Washingtoner mittlerer Zeit angestellt. Man findet die betreffenden Zahlen in der folgenden Tabelle zusammengestellt, und ich will annehmen, es sei am 20. September um 11^h eine zufällige Lücke vorhanden.

Tab. 11.

St.	September 1881		
	19	20	21
1	12·4	8·9	−7·9
2	12·9	9·9	−5·7
3	13·2	9·9	−7·6
4	12·9	8·9	−6·4
5	11·4	8·2	−6·6
6	10·9	6·0	−6·1
7	9·9	7·7	−7·1
8	9·7	6·4	−7·1
9	9·7	2·9	−7·1
10	9·7	3·7	−2·1
11	9·2		1·4
12	9·7	12·9	1·4
13	7·1	5·4	2·9
14	7·7	1·4	1·4
15	5·9	−0·1	−1·1
16	4·5	2·4	−4·1
17	4·6	1·9	−2·1
18	5·9	−3·1	−4·6
19	5·9	−4·1	−0·6
20	5·9	−2·6	−4·1
21	7·9	−3·1	−2·6
22	7·9	−4·1	−4·6
23	7·9	−2·6	−4·1
24	9·0	−4·2	−1·1

Bevor man meine weiteren Erörterungen liest, trage man die der Lücke benachbarten Beobachtungswerthe auf Koordinatenpapier auf und versuche die Interpolation auf graphischem Wege auszuführen. Man wird dabei auf einen Werth von

etwa 10 Grad Fahrenheit kommen. Will man aber nach der Formel 276) interpoliren, so muss man bis zum 19. September 13^h zurück und bis zum 21. September 9^h vorwärts greifen und erhält als definitiven Werth 12·3 Grad Fahrenheit, während der am 20. September um 11^h wirklich beobachtete 12·9 Grad ist. Wer würde graphisch einen solchen Grad von Annäherung erreicht haben?

Die Interpolationsformeln, die in Dorpat benutzt werden müssten, wenn zufällig einmal die Registrirapparate für Luftdruck und Temperatur in der Nacht den Dienst versagen sollten, mögen als weiteres Beispiel dienen.

Die für 1^h und 4^h zu interpolirenden Werthe sollen, wie das auch schon früher geschehen ist, durch b_1 und b_4 bezeichnet werden, und es seien b_7, b_{10}, b_{13}, b_{16}, b_{19} die Beobachtungen um 7^h, 10^h, 13^h, 16^h, 19^h des nämlichen Tages, dagegen b_{-14}, b_{-11}, b_{-8}, b_{-5}, b_{-2} die Beobachtungen um 10^h, 13^h, 16^h, 19^h, 22^h des vorhergehenden Tages. Die ganze benutzbare Reihe ist dann

$$b_{-14},\ b_{-11},\ b_{-8},\ b_{-5},\ b_{-2},\ b_1,\ b_4,\ b_7,\ b_{10},\ b_{13},\ b_{16},\ b_{19}$$

woraus sich im Ganzen 5 vollständige, b_1 und b_4 enthaltende Perioden bilden lassen, ohne dass eine derselben mit diesen Werthen anfängt oder schliesst.

Die erste Periode enthält die Werthe b_{-14}, b_{-11}, b_{-8}, b_{-5}, b_{-2}, b_1, b_4, b_7, die fünfte die Werthe b_{-2}, b_1, b_4, b_7, b_{10}, b_{13}, b_{16}, b_{19}.

Die auf die gewöhnliche Periode gegründete singuläre Reihe

$$b_1,\ b_4,\ b_7,\ b_{10},\ b_{13},\ b_{16},\ b_{19},\ b_{22}$$

fehlt hier, weil sie eine Extrapolirung verlangt.

Behandelt man jene fünf Perioden nach 252) und 253) (m. s. auch die dort folgenden Erörterungen bei dem Beispiel für Dorpat), so erhält man, wenn man die singulären Interpolationswerthe durch $b_{1,i}$ und $b_{4,i}$ bezeichnet,

$$\left.\begin{aligned}
b_{1,1} &= b_{-8} - b_{-5} + b_{-2} + (b_7 - b_{-14} - b_{-5} + b_{-2})\sqrt{0.5}\\
b_{4,1} &= b_7 - b_{-14} + b_{-11} + (b_7 - b_{-14} - b_{-5} + b_{-2})\sqrt{0.5}\\
&- - - - - - - - - - - - -\\
b_{1,5} &= b_{16} - b_{19} + b_{-2} + (b_7 - b_{10} - b_{19} + b_{-2})\sqrt{0.5}\\
b_{4,5} &= b_7 - b_{10} + b_{13} + (b_7 - b_{10} - b_{19} + b_{-2})\sqrt{0.5}
\end{aligned}\right\}\quad 277)$$

und daraus für die definitiven Interpolationswerthe als arithmetische Mittel aus den singulären

$$\left.\begin{aligned}
b_1 &= \frac{3b_{-8} - 4b_{-5} + 5b_{-2} + 2b_{16} - b_{19} + (-b_{-14} - 4b_{-5} + 5b_{-2} + 5b_7 - 4b_{10} - b_{19})\sqrt{0.5}}{5}\\
b_4 &= \frac{-b_{-14} + 2b_{-11} + 5b_7 - 4b_{10} + 3b_{13} + (-b_{-14} - 4b_{-5} + 5b_{-2} + 5b_7 - 4b_{10} - b_{19})\sqrt{0.5}}{5}
\end{aligned}\right\}\quad 278)$$

Vierter Theil.

Modifikation der Bessel'schen Formel in besonderen Fällen.

Erster Abschnitt.

Über die willkürliche Winkelkonstante.

Im Zweiten Theil wurde ausführlich erörtert, dass für $n = 2\nu$ eine der $2\nu + 1$ Konstanten, welche in der Bessel'schen Formel vorkommen, wenn man, wie es als nothwendig bewiesen ward, bis zum νfachen Winkel geht, zunächst willkürlich angenommen werden muss, damit die Zahl der Unbekannten dieselbe sei wie die der verfügbaren Gleichungen. Es wurde ferner gezeigt, dass diese Grösse eine Winkelkonstante sein müsse, und unter der Annahme, dass dieselbe U_ν sei, ihr Werth gleich der negativen halben Summe der gegebenen Phasen bestimmt. Entscheidend für diese Bestimmung, welche an Stelle der ursprünglich willkürlichen Grösse U_ν den eindeutigen Werth $-\frac{1}{2}\sigma$ setzt, war der Umstand, dass u_ν, die Wellenhöhe der ν^{ten} Sinuslinie, absolut genommen ein Minimum werden sollte. Man kann aber mit Recht die Frage aufwerfen, warum denn gerade U_ν und nicht eine beliebige andere Winkelkonstante, etwa U_k, wo $k < \nu$, zunächst willkürlich gelassen wird. Beispielsweise erschiene es a priori beim Luftdruck mit seiner täglichen Hauptdoppelwelle eigentlich zweckmässiger, wenn nur 4 Beobachtungen täglich vorliegen, die Bessel'sche Formel in der Gestalt anzusetzen:

$$y = u_0 + u_1 \sin(U_1 + x) + p_2 \cos 2x + q_2 \sin 2x \qquad 279)$$

wo nun über U_1 disponirt werden müsste.

Es soll nun hier auf verschiedenen Wegen der Nachweis versucht werden, dass in der That keine andere Winkelkonstante als U_ν zunächst willkürlich gelassen werden darf.

1) Denkt man sich anfänglich $2\nu - 1$ Phasen und Amplituden gegeben, so erhält man dafür die Darstellung

$$C_{n-1} \equiv y = u_o + \sum_{m=1}^{m=\nu-1} u_m \sin(U_m + mx) \qquad 280)$$

wo die Konstanten u_o, u_m, U_m nach den im Ersten Theil ermittelten Formeln eindeutig bestimmt sind. Kommt nun die $2\nu^{te}$ Beobachtung $(x_{2\nu}, \alpha_{2\nu})$ noch hinzu, so muss die Kurve C_{n-1} derartig modifiziert werden, dass erstens noch ein Glied mit dem νfachen Winkel als Argument hinzutritt, und dass zweitens Änderungen von grösserem oder geringerem Betrage in den Werthen u_o, u_m, U_m $(m = 1, 2, \ldots (\nu - 1))$ vor sich gehen, damit die Kurve auch durch den neuen Punkt $(x_{2\nu}, \alpha_{2\nu})$ hindurchgehe. Ein vernünftiger Grund statt des Eintretens dieser Veränderungen bei den Winkelkonstanten U_m eine derselben, etwa U_k, nun ganz willkürlich werden zu lassen, ist in keiner Weise aufzufinden; da aber eine Winkelkonstante zunächst willkürlich sein muss, so kann dies nur die neu hinzutretende U_ν sein.

Ein strengerer Beweis für diesen Satz lässt sich vielleicht folgendermassen führen.

2) Es werde U_k $(k < \nu)$ als willkürliche Konstante genommen, man habe also

$$y = u_o + \Sigma\,(p_m \cos mx + q_m \sin mx) + u_k \sin(U_k + kx) \qquad 281)$$
$$m = 1, 2, \ldots (k-1), (k+1), \ldots \nu$$

$$\alpha_h = u_o + \Sigma\,(p_m \cos mx_h + q_m \sin mx_h) + u_k \sin(U_k + kx_h) \qquad 282)$$
$$h = 1, 2, \ldots (2\nu)$$

Die Verbindung dieser Gleichungen führt zu der verschwindenden Determinante 283)

$$0 = \begin{vmatrix} y, 1, \cos x, \sin x, \ldots \cos(k-1)x, \sin(k-1)x, \sin(U_k + kx), \cos(k+1)x, \sin(k+1)x, \ldots \cos\nu x, \sin\nu x \\ \alpha_m, 1, \cos x_m, \sin x_m, \ldots \cos(k-1)x_m, \sin(k-1)x_m, \sin(U_k + kx_m), \cos(k+1)x_m, \sin(k+1)x_m, \ldots \cos\nu x_m, \sin\nu x_m \\ m = 1, 2, \ldots (2\nu) \end{vmatrix}$$

Entwickelt man die Determinante nach den Elementen der ersten Kolonne, so erhält y den Koeffizienten $A \sin U_k + B \cos U_k$, und man überzeugt sich leicht, dass A und B dieselben Determinanten wie $s_{k,1}$ und $c_{k,1}$ in 41) und 40) sind, sobald die dortige Reihe $x_2, x_3, \ldots x_{2\nu+1}$ durch $x_1, x_2, \ldots x_{2\nu}$ ersetzt wird. Ist nun wieder

$$\sigma = \sum_{m=1}^{m=2\nu} x_m \qquad 284)$$

hat ferner $P_{2\nu}$ dieselbe Bedeutung wie früher, und bezeichnet $\Gamma_{\nu+k}$ eine als Summe ihrer Bestandtheile aufgefasste Kombination der ganzen Phasenreihe zur $(\nu+k)^{\text{ten}}$ Klasse, so hat man nach 45)

$$\left.\begin{aligned} A &= (-1)^{k} \cdot 2 \cdot 4^{\nu(\nu-1)} \cdot P_{2\nu} \cdot \Sigma \sin\left(\Gamma_{\nu+k} - \frac{1}{2}\sigma\right) \\ B &= (-1)^{k+1} \cdot 2 \cdot 4^{\nu(\nu-1)} \cdot P_{2\nu} \cdot \Sigma \cos\left(\Gamma_{\nu+k} - \frac{1}{2}\sigma\right) \end{aligned}\right\} \quad 285)$$

Der Faktor von y wird daher

$$(-1)^{k+1} \cdot 2 \cdot 4^{\nu(\nu-1)} \cdot P_{2\nu} \cdot \Sigma \cos\left(U_k - \frac{1}{2}\sigma + \Gamma_{\nu+k}\right)$$

Der Faktor von α_m in der Entwickelung der Determinante 283) wird $(-1)^m \cdot (-1)^{m-1}$ mal dem Werth des Faktors von y, wenn hierin x_m durch x ersetzt wird. Da der Faktor von y wegen der Unbestimmtheit von U_k im allgemeinen nicht verschwinden kann, so erhält man aus 283)

$$y = \frac{\sum\limits_{h=1}^{h=2\nu} \alpha_h \left[P_{2\nu} \cdot \Sigma \cos\left(U_k - \frac{1}{2}\sigma + \Gamma_{\nu+k}\right)\right]_{x_h = x}}{P_{2\nu} \cdot \Sigma \cos\left(U_k - \frac{1}{2}\sigma + \Gamma_{\nu+k}\right)} \quad 286)$$

$\left[P_{2\nu}\right]_{x_h = x}$ und $P'_{2\nu}$ haben alle Faktoren gemeinsam, welche die Differenzen der Elemente $x_1, \ldots x_{h-1}, x_{h+1}, \ldots x_{2\nu}$ enthalten; hebt man dieselben im Zähler und Nenner weg, so kommt unter Benutzung von früheren Bezeichnungen zum Vorschein

$$y = \frac{1}{\Sigma \cos\left(U_k - \frac{1}{2}\sigma + \Gamma_{\nu+k}\right)} \sum_{h=1}^{h=2\nu} \frac{\alpha_h}{R_h^{(2\nu)}} \left[R_h^{(2\nu)} \Sigma \cos\left(U_k - \frac{1}{2}\sigma + \Gamma_{\nu+k}\right)\right]_{x_h = x} \quad 287)$$

Zur Probe hat man für $k = \nu$, $\Gamma_{\nu+k} = \Gamma_{2\nu} = \sigma$, da es diesmal nur diese eine Kombination gibt, und hiermit wird dann

$$y = \frac{1}{\cos\left(U_\nu + \frac{1}{2}\sigma\right)} \sum_{h=1}^{h=2\nu} \frac{\alpha_h}{R_h^{(2\nu)}} \left[R_h^{(2\nu)}\right]_{x_h = x} \cdot \cos\left(U_\nu + \frac{\sigma - x_h + x}{2}\right)$$

wie in 77) angegeben worden.

Entwickelt man aus dem System 282) den Werth von u_k, so findet man für denselben einen Bruch, dessen Zähler eine von U_k unabhängige Grösse ist, während als Nenner der oben berechnete Faktor von y, nämlich

$$(-1)^{k+1} \cdot 2\,\nu\,4^{\nu(\nu-1)} \cdot P_{2\nu} \cdot \Sigma \cos\left(U_k - \frac{1}{2}\sigma + \Gamma_{\nu+k}\right)$$

erscheint. Schliesslich muss an Stelle irgend eines willkürlichen Werthes von U_k ein ganz bestimmter treten, damit auch die Kurve C_n eindeutig bestimmt sei, d. h. man muss eine Bedingung einführen, durch welche der Werth von U_k abgeleitet werden kann. Im Zweiten Theil (S. 26) lautete diese Bedingung dahin, dass u_ν absolut genommen ein Minimum werden müsse. Es liegt daher nahe im gegenwärtigen Falle die Bedingung eintreten zu lassen, dass auch u_k absolut genommen ein Minimum werden müsse. Daraus würde, ohne Rücksicht auf die Vorzeichen, folgen

$$\Sigma \cos\left(U_k - \frac{1}{2}\sigma + \Gamma_{\nu+k}\right) = \text{Maximum.} \tag{288}$$

Dies gibt zur Bestimmung von U_k die Gleichung

$$\Sigma \sin\left(U_k - \frac{1}{2}\sigma + \Gamma_{\nu+k}\right) = 0 \tag{289}$$

oder

$$\text{tang}\left(U_k - \frac{1}{2}\sigma\right) = -\frac{\Sigma \sin \Gamma_{\nu+k}}{\Sigma \cos \Gamma_{\nu+k}} \tag{290}$$

eine Gleichung, die das Analogon zu 112) ist. Die Berechtigung für u_k einen Minimalwerth zu fordern, wodurch man zu dem vorstehenden Ergebniss kommt, ist indessen sehr anzweifelbar. Liegen z. B. beim Luftdruck 6 Beobachtungen täglich vor, und wollte man U_2 zunächst willkürlich annehmen, so ginge man bei der Bestimmung von U_2 vermittelst 290) von der Voraussetzung aus, dass u_2, die Wellenhöhe der täglichen Doppelwelle, ein Minimum werden müsse; die eigentliche Hauptwelle würde also gegenüber den sekundären, namentlich gegenüber der Ganztagswelle, künstlich zurückgedrängt. Dies weist darauf hin, dass man die Bestimmung von U_k durch die Forderung eines Minimalwerthes für u_k ganz fallen lassen muss. Da aber in der ganzen Reihe der Werthe von u_k, die man erhält, wenn man U_k nach einander alle möglichen Werthe gibt, abgesehen von dem unbrauchbaren Werthe $u_k = \infty$, der Minimalwerth der einzige ausgezeichnete Werth ist, so lässt sich eine andere allgemeine Bedingung für u_k, welche zur Bestimmung von U_k führen könnte, überhaupt nicht aufstellen, und dies drängt wieder zu dem Schlusse, dass man überhaupt U_k nicht als willkürliche Winkelkonstante wählen darf. Noch strenger scheint mir indessen die folgende Begründung.

3) Wird zunächst U_k unbestimmt gelassen, so gestattet die Gleichung 287) in allen Fällen zu jeder Phase x die betreffende Amplitude zu berechnen. Es muss also auch, wie im Ersten Abschnitt des Dritten Theils, möglich sein, unter Beibehaltung von U_k die Kurve C_n darzustellen vermittelst $2\,\nu$ gegebener aequidistanter Phasen $z_h = a + v\,(h - 1)$ und der zugehörigen durch 287) ermittelten Amplitu-

den γ_h. Es soll nun untersucht werden, zu welchen Ergebnissen ein aequidistantes System (z_h, γ_h) mit der Konstanten U_k führt, d. h. es sollen hieraus die Grössen u_o, p_m, q_m, u_k für $m = 1, 2, .. (k-1), (k+1), .. \nu$ abgeleitet werden.

Berücksichtigt man, dass

$$\left.\begin{aligned} \nu z_h &= \nu a + \pi (h-1) \\ \cos \nu z_h &= (-1)^{h-1} \cos \nu a \\ \sin \nu z_h &= (-1)^{h-1} \sin \nu a \end{aligned}\right\} \quad 291)$$

ist, so heisst das aufzulösende System

$$\gamma_h = u_o + \Sigma \Big(p_m \cos m\big(a + v(h-1)\big) + q_m \sin m\big(a + v(h-1)\big)\Big)$$
$$+ u_k \sin \big(U_k + ka + kv(h-1)\big) + (-1)^{h-1} p_\nu \cos \nu a + (-1)^{h-1} q_\nu \sin \nu a$$
$$m = 1, 2, .. (k-1), (k+1), .. (\nu - 1)$$
$$h = 1, 2, ... (2\nu)$$

Die Determinante dieses Systems verschwindet identisch, weil die beiden letzten Kolonnen nach Heraushebung der Faktoren $\cos \nu a$ und $\sin \nu a$ identisch werden. Dasselbe gilt von den Zählerdeterminanten für die Unbekannten u_o, p_m, q_m $\big(m = 1, 2, .. (k-1), (k+1), .. (\nu-1)\big)$ und für u_k, während die Zählerdeterminanten für p_ν und q_ν im allgemeinen nicht verschwinden, d. h. jene Unbekannten u_o, p_m, q_m und u_k erscheinen in der unbestimmten Form $0:0$, während sich für p_ν und q_ν unendlich grosse Werthe ergeben. Auf dem allgemeinen Wege der Auflösung linearer Gleichungssysteme durch Determinanten erscheint also die Aufgabe unlösbar. Wählt man aber das im Zweiten Theile S. 31 und 32 eingeschlagene Verfahren, welches der Methode der kleinsten Quadrate analog ist, so findet man zwar

$$\left.\begin{aligned} u_o &= \frac{1}{2\nu} \sum_{h=1}^{h=2\nu} \gamma_h \\ p_m &= \frac{1}{\nu} \sum_{h=1}^{h=2\nu} \gamma_h \cos m\big(a + v(h-1)\big) \\ q_m &= \frac{1}{\nu} \sum_{h=1}^{h=2\nu} \gamma_h \sin m\big(a + v(h-1)\big) \\ & m = 1, 2, .. (k-1), (k+1), .. (\nu-1) \\ u_k &= \frac{1}{\nu} \sum_{h=1}^{h=2\nu} \gamma_h \sin\big(U_k + ka + kv(h-1)\big) \end{aligned}\right\} \quad 293)$$

allein p_ν und q_ν lassen sich nicht trennen. Es ergibt sich nur

$$p_\nu \cos \nu a + q_\nu \sin \nu a = \frac{1}{2\nu} \sum_{h=1}^{h=2\nu} (-1)^{h-1} \gamma_h \qquad 294)$$

Man kommt also zu dem, wie es mir scheint, entscheidenden Resultat, dass bei aequidistanten Reihen eine Bestimmung aller Konstanten der Bessel'schen Formel unmöglich ist, so lange man U_k, wo $k < \nu$, als willkürliche Winkelkonstante einführt. Führt man dagegen U_ν ein, so ist, wie bekannt (m. s. z. B. S. 9), die Bestimmung aller Konstanten immer möglich. Hierdurch scheint es mir unbedingt erwiesen, dass man eben nur U_ν zur willkürlichen Konstanten machen darf.

Die bezüglich U_ν aufgestellte Gleichung 112)

$$U_\nu = -\frac{1}{2}\sigma \qquad 295)$$

gilt unter allen Umständen, so lange die Bessel'sche Formel in ihrer gewöhnlichen Gestalt zur Anwendung gelangt. Tritt die Formel aber in modifizierter Gestalt auf — und solche Fälle werden in den folgenden Abschnitten vorkommen —, so sind selbstverständlich auch Modifikationen in der Bestimmungsweise von U_ν geboten. Welcher Art jene Modifikationen auch sein mögen, so lässt sich doch immer folgender allgemeiner Satz aufstellen:

Bei der Berechnung der Grösse u_ν erscheint dieselbe stets als ein Bruch, bei dem U_ν nur im Nenner vorkommt, etwa

$$u_\nu = \frac{C}{f(U_\nu)} \qquad 296)$$

Soll die Aufgabe eine definite sein, so muss U_ν so bestimmt werden, dass $f(U_\nu)$ absolut genommen ein Maximum, also u_ν absolut genommen ein Minimum wird.

Zweiter Abschnitt.

Aufstellung der Bessel'schen Formel aus gegebenen Mittelwerthen.

Es sei die Periode 2π in $n = 2\nu$ beliebige Stücke getheilt, welche durch die Phasen r_0, r_1, .. $r_{2\nu}$ begrenzt werden, so dass

$$\left.\begin{aligned} r_0 &= 0 \\ r_{2\nu} &= 2\pi \end{aligned}\right\} \qquad 297)$$

ist. Ich wähle absichtlich n geradzahlig, weil dieser Fall in der Praxis weitaus am häufigsten vorkommt, und weil der Fall $n = 2\nu + 1$ sich ganz entsprechend erledigen liesse. Man kenne ferner die zu den einzelnen Periodenabschnitten gehörenden Mittelwerthe μ_k der Amplituden ($k = 1, 2, .. 2\nu$), so dass μ_k für die Strecke $x = r_{k-1}$ bis $x = r_k$ gilt. In Wahrheit wären die μ_k durch bestimmte Integrale zu berechnen, während man dieselben in der Praxis immer durch die arithmetischen Mittel einer Reihe aequidistanter Werthe ersetzen darf. Die Aufgabe geht dahin, die Kurve vermittelst jener gegebenen Werthe darzustellen.

Ich habe bereits früher *) zwei Auflösungen dieser Aufgabe zu geben versucht, welche beide darauf hinauslaufen ein aequidistantes System durch parabolische oder goniometrische Interpolation herzustellen. Bei dem gegenwärtigen Stande der Theorie müssen indessen jene Lösungen als durchaus unzureichend bezeichnet werden, zumal da ich damals ganz übersah, dass die Konstante u_0, das Periodenmittel, hier von vorneherein gegeben ist durch die selbstverständliche Gleichung

$$2\pi u_0 = \sum_{k=1}^{k=2\nu} \mu_k (r_k - r_{k-1}) \qquad 298)$$

Der Grundgedanke, nämlich die Ersetzung des gegebenen Systems durch ein aequidistantes, ist freilich durchaus beizubehalten. Derselbe kann, wie die folgenden Untersuchungen zeigen sollen, vollkommen korrekt zur Ausführung gebracht werden.

Es sei die Gleichung, deren Konstanten zu ermitteln sind,

$$y = u_0 + \sum_{m=1}^{m=\nu-1} (p_m \cos mx + q_m \sin mx) + u_\nu \sin (U_\nu + \nu x) \qquad 299)$$

*) Zeitschr. d. Oesterr. Ges. f. Meteorol. Bd. XVIII, 1883, S. 20 u. flgd.

Hier hat y die Bedeutung des zur Phase x gehörigen Werthes des betreffenden meteorologischen Elementes, wenn keine andere als die zu untersuchende Periode als überhaupt existirend angesehen wird. Ist die Periode z. B. ein Jahr und das Element die Lufttemperatur, und sind die Mittel derselben für die bürgerlichen Monate bekannt, so wird davon abgesehen, dass auch eine tägliche Periode vorhanden ist, und angenommen, es existire nur eine jährliche Periode, für welche die Bessel-sche Formel indirekt aus den Mittelwerthen der Tageskurven, direkt aus den Monatsmitteln abgeleitet werden soll.

In 299) kann bezüglich U_ν noch keine Bestimmung getroffen werden, denn die im Zweiten Theile ermittelte Gleichung 112), wonach für U_ν die negative halbe Summe der zu den gegebenen Amplituden gehörenden Phasen zu setzen ist, trifft hier, mangels solcher zu einander gehörenden Phasen und Amplituden, nicht zu. Im Laufe der Untersuchung wird sich vielmehr der für U_ν diesmal einzuführende Werth gemäss dem am Schlusse des Ersten Abschnitts aufgestellten allgemeinen Satze bestimmen lassen. Es werde noch gesetzt

$$r_k - r_{k-1} = \rho_k \tag{300}$$

so dass also ρ_k ($k = 1, 2, \ldots 2\nu$) die Länge der einzelnen Periodenabschnitte bedeutet. Integrirt man nun in 299) zwischen den Grenzen $x = r_{k-1}$ und $x = r_k$, also für irgend einen Periodenabschnitt, so erhält man

$$\int_{r_{k-1}}^{r_k} y\,dx = \mu_k \rho_k = u_o \rho_k + \sum_{m=1}^{m=\nu-1} \frac{p_m (\sin m r_k - \sin m r_{k-1}) + q_m (\cos m r_{k-1} - \cos m r_k)}{m}$$
$$+ \frac{u_\nu \big(\cos (U_\nu + \nu r_{k-1}) - \cos (U_\nu + \nu r_k)\big)}{\nu} \tag{301}$$

Lässt man hier k die Werthe 1, 2, . . 2ν annehmen, so entsteht ein System von 2ν Gleichungen, aus welchem die Konstanten u_o, p_m, q_m, u_ν immer bestimmt werden könnten, nachdem für U_ν die später zu erörternde Bedingung eingeführt worden. Hiermit ist die Aufgabe an sich theoretisch vollkommen gelöst. Schreibt man aber dies System in der Gestalt

$$\mu_k = u_o + \sum_{m=1}^{m=\nu-1} \frac{2 \sin \frac{m\rho_k}{2}}{m\rho_k} \left(p_m \cos \frac{m(r_{k-1} + r_k)}{2} + q_m \sin \frac{m(r_{k-1} + r_k)}{2}\right)$$
$$+ 2 u_\nu \frac{\sin \frac{\nu\rho_k}{2}}{\nu\rho_k} \sin\left(U_\nu + \frac{\nu(r_{k-1} + r_k)}{2}\right) \tag{302}$$
$$k = 1, 2, \ldots (2\nu)$$

so erkennt man, dass es von dem im Ersten Theile unter 49) behandelten Systeme wesentlich abweicht, also einer ganz neuen direkten Behandlung bedürfte. Darauf will ich nicht weiter eingehn, weil, wie man sehen wird, die Einführung der Aequidistanz auf einem anderen Wege gelingt. Durch Addition der 2ν Gleichungen 301) überzeugt man sich leicht, dass der Gleichung 298) genügt wird.

Integrirt man in 299) zwischen den Grenzen 0 und x und bezeichnet das Integral durch Y_x, also

$$\int_0^x y\,dx = Y_x = u_0 x + \sum_{m=1}^{m=\nu-1} \frac{p_m \sin mx + q_m(1-\cos mx)}{m} + \frac{u_\nu\left(\cos U_\nu - \cos(U_\nu + \nu x)\right)}{\nu} \qquad 303)$$

dann stellt Y_x algebraisch genommen den zwischen den Grenzen: Ordinatenaxe, Abszissenaxe, Ordinate zur Abszisse x, und Kurve gelegenen Theil der ganzen Fläche $2\pi u_0$ vor; man könnte daher die neue Kurve 303) als Arealkurve bezeichnen. Es werde

$$\int_0^{r_k} y\,dx = Y_{r_k} = A_k \qquad 304)$$

gesetzt, dann ist

$$A_k - A_{k-1} = \int_{r_{k-1}}^{r_k} y\,dx = \mu_k \rho_k \qquad 305)$$

nach 301). Hieraus erhält man sogleich, wegen $A_0 = 0$,

$$A_k = \sum_{p=1}^{p=k} \mu_p \rho_p \qquad 306)$$

Zufolge dieser Relation können alle A_k ($k = 1, 2 \ldots 2\nu$) sehr leicht aus den Mittelwerthen μ_p und den Periodenabschnitten ρ_p berechnet werden. Man erhält natürlich

$$A_{2\nu} = 2\pi u_0 \qquad 307)$$

Aus 303) und 304) ergibt sich

$$A_k = u_0 r_k + \sum_{m=1}^{m=\nu-1} \frac{p_m \sin m r_k + q_m(1-\cos m r_k)}{m} + \frac{u_\nu\left(\cos U_\nu - \cos(U_\nu + \nu r_k)\right)}{\nu} \qquad 308)$$

$$k = 1, 2, \ldots (2\nu - 1)$$

Ich lasse k hier nur von 1 bis $2\nu - 1$ gehen, weil u_0 als bekannte Grösse (aus 298) aufzufassen ist, so dass nach Ermittelung von U_ν nur noch die $2\nu - 1$ Unbekannten p_m, q_m, u_ν übrig bleiben. Das System 308) genügt zur Bestimmung dieser Unbekannten vollständig, und man könnte hierzu, unter geringfügigen Modifi-

kationen, die im Ersten Theile entwickelten allgemeinen Formeln verwenden. Indessen ist es hier unbedingt vorzuziehen, zuerst, wie es auch bei früheren Gelegenheiten geschah, eine den Gauss'schen Gleichungen entsprechende Formel abzuleiten, in welcher die Grössen p_m, q_m, u_ν nicht mehr vorkommen, und dann diese Formel zur Aufstellung eines aequidistanten Systems zu verwenden, dessen Auflösung immer sehr einfach bewerkstelligt werden kann.

Die betreffende Gauss'sche Gleichung erhält man durch Kombination des Systems 308) mit der Gleichung 303) in Gestalt der verschwindenden Determinante (unter Weglassung der den Elementen der einzelnen Kolonnen gemeinsamen Divisoren)

$$\left|\begin{matrix} Y_x - u_0 x, \sin x, 1-\cos x, \sin 2x, 1-\cos 2x, \ldots \sin(\nu-1)x, 1-\cos(\nu-1)x, \cos U_\nu - \cos(U_\nu + \nu x) \\ A_k - u_0 r_k, \sin r_k, 1-\cos r_k, \sin 2r_k, 1-\cos 2r_k, \ldots \sin(\nu-1)r_k, 1-\cos(\nu-1)r_k, \cos U_\nu - \cos(U_\nu+\nu r_k) \\ k = 1, 2, \ldots (2\nu-1) \end{matrix}\right| = 0 \qquad 309)$$

Denkt man sich diese Determinante nach den Elementen der ersten Kolonne entwickelt und bezeichnet den Faktor von $Y_x - u_0 x$ durch G, so erhält man den Faktor von $A_k - u_0 r_k$, indem man in G die Grösse r_k durch x ersetzt und mit $(-1)^k \cdot (-1)^{k-1} = -1$ multipliziert, d. h. es wird

$$(Y_x - u_0 x)\, G = \sum_{k=1}^{k=2\nu-1} (A_k - u_0 r_k)\,(G)_{r_k = x} \qquad 310)$$

Es muss daher zunächst die Determinante

$$G = \left|\begin{matrix} \sin r_k, 1-\cos r_k, \sin 2r_k, 1-\cos 2r_k, \ldots \sin(\nu-1)r_k, 1-\cos(\nu-1)r_k, \cos U_\nu - \cos(U_\nu+\nu r_k) \\ k = 1, 2, \ldots (2\nu-1) \end{matrix}\right| \qquad 311)$$

ausgewerthet werden. Dieselbe lässt sich nicht unmittelbar auf eine der im Ersten Theil bestimmten Determinanten zurückführen. Ich verwandele sie durch Zufügung einer Vertikalreihe mit den Elementen 1 und einer Horizontalreihe mit den Elementen Null (ausser dem ersten) in die gleichwerthige Determinante $(2\nu)^{\text{ten}}$ Grades

$$G = \left|\begin{matrix} 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ 1, \sin r_k, 1-\cos r_k, \sin 2r_k, 1-\cos 2r_k, \ldots \sin(\nu-1)r_k, 1-\cos(\nu-1)r_k, \cos U_\nu - \cos(U_\nu+\nu r_k) \\ k = 1, 2, \ldots (2\nu-1) \end{matrix}\right| \qquad 312)$$

Subtrahirt man hier die erste Kolonne von allen übrigen ungeraden, ferner die mit $\cos U_\nu$ multiplicirte erste von der letzten, und ersetzt dann in der ersten Zeile die Werthe Null entsprechend durch $\sin r_0$, $\sin 2r_0$, .. $\sin(\nu-1)r_0$, und die Werthe -1 durch $-\cos r_0$, $-\cos 2r_0$, .. $-\cos(\nu-1)r_0$, so geht 312) über in

$$G = (-1)^{\nu} \begin{vmatrix} 1, \sin r_k, \cos r_k, \ldots \sin(\nu-1) r_k, \cos(\nu-1) r_k, \cos(U_\nu + \nu r_k) \\ k = 0, 1, 2, \ldots (2\nu - 1) \end{vmatrix} \qquad 313)$$

Diese Determinante kann genau so behandelt werden, wie die im Ersten Theil unter 51), weshalb ich nicht ausführlicher darauf eingehe. Man findet, wenn noch

$$\sigma' = \sum_{k=0}^{k=2\nu-1} r_k \qquad 314)$$

eingeführt wird,

$$G = (-1)^{\nu-1} \cdot 2 \cdot 4^{\nu(\nu-1)} \cdot P(r_0, r_1, \ldots r_{2\nu-1}) \cdot \sin\left(U_\nu + \frac{1}{2}\sigma'\right) \qquad 315)$$

wo P analog dem früheren das Halbdifferenzensinusprodukt für die Argumente r_0, $r_1, \ldots r_{2\nu-1}$ bedeutet.

Wäre das System 308) direkt für die Unbekannten aufgelöst worden, so hätte man für u_ν unter Heraushebung der Kolonnendivisoren erhalten

$$u_\nu = \frac{\nu}{G} \cdot \begin{vmatrix} \sin r_k, 1 - \cos r_k, \ldots \sin(\nu-1) r_k, 1 - \cos(\nu-1) r_k, A_k - u_0 r_k \\ k = 1, 2, \ldots (2\nu - 1) \end{vmatrix} \qquad 316)$$

Der Zähler ist hier frei von U_ν, der Nenner hat wegen G den Faktor $\sin\left(U_\nu + \frac{1}{2}\sigma'\right)$. Man wird daher nach dem am Schlusse des Ersten Abschnitts entwickelten Satze $\sin\left(U_\nu + \frac{1}{2}\sigma'\right)$ absolut genommen zu einem Maximum machen müssen, d. h. die 112) entsprechende Gleichung, welche den Werth von U_ν bestimmt, wird

$$U_\nu + \frac{1}{2}\sigma' = \frac{\pi}{2} \qquad 317)$$

Aus 315) folgt

$$G_{r_k = x} = (-1)^{\nu-1} \cdot 2 \cdot 4^{\nu(\nu-1)} \cdot P(r_0, r_1, \ldots r_{k-1}, x, r_{k+1}, \ldots r_{2\nu-1}) \sin\left(U_\nu + \frac{1}{2}\sigma' - \frac{1}{2}r_k + \frac{1}{2}x\right) \qquad 318)$$

In 310), wo es sich wesentlich um den Quotienten $G_{r_k = x} : G$ handelt, bemerkt man sofort, dass in den P-funktionen alle auf die Differenzen zwischen r_0, $r_1, \ldots r_{k-1}$, $r_{k+1}, \ldots r_{2\nu-1}$ bezüglichen Faktoren wegfallen. In den übrigbleibenden Differenzen mache man x, bez. r_k überall zum Subtrahenden, was beide Mal dieselbe Anzahl von Zeichenwechseln bewirkt, d. h. den Faktor $(-1)^k$ einführt. Entsprechend früheren Bezeichnungen (man vergleiche 176) u. flgd.) sei

$$R'_k = \sin\frac{r_0 - r_k}{2} \cdot \sin\frac{r_1 - r_k}{2} \ldots \sin\frac{r_{k-1} - r_k}{2} \cdot \sin\frac{r_{k+1} - r_k}{2} \ldots \sin\frac{r_{2\nu-1} - r_k}{2} \qquad 319)$$

und
$$H'_x = \sin\frac{r_0 - x}{2} \cdot \sin\frac{r_1 - x}{2} \dots \sin\frac{r_k - x}{2} \dots \sin\frac{r_{2\nu-1} - x}{2} \qquad 320)$$

dann bleibt in G stehen R'_k, in $G_{r_k = x}$ aber $H'_x : \sin\frac{r_k - x}{2}$, während aus dem Faktor $\sin\left(U_\nu + \frac{1}{2}(\sigma' - r_h + x)\right)$ wegen 317) wird $\cos\frac{r_k - x}{2}$. Mit Rücksicht auf diese Umformungen erhält man aus 310) als Gauss'sche Gleichung für die Arealkurve, da überdies H'_x unabhängig von k ist

$$Y_x = u_0 x + H'_x \sum_{k=1}^{k=2\nu-1} \frac{A_k - u_0 r_k}{R'_k \cdot \operatorname{tang}\frac{r_k - x}{2}} \qquad 321)$$

Bemerkenswerth ist die Analogie dieser Gleichung mit 178).

Als Rechnungskontrole dient die der Gleichung 180) entsprechende und ebenso wie diese zu beweisende Formel

$$H'_x \sum_{k=0}^{k=2\nu-1} \frac{1}{R'_k \cdot \operatorname{tang}\frac{r_k - x}{2}} = 1 \qquad 322)$$

Es muss darauf aufmerksam gemacht werden, dass die Summation hier bei $k = 0$ und nicht, wie in 321), bei $k = 1$ beginnt, d. h. man hat als Summe der Koeffizienten von $A_k - u_0 r_k$ in 321) den Werth 1, wenn auch der nicht verschwindende Koeffizient $\dfrac{H'_x}{R'_0 \operatorname{tang}\frac{r_0 - x}{2}}$ des verschwindenden Ausdrucks $A_0 - u_0 r_0$ in die Summe gezogen wird.

Die Gleichung 321) gestattet ohne weiteres den zu jeder Phase x gehörenden Arealwerth Y_x zu berechnen. Es werde nun das aequidistante Phasensystem z_h gewählt, wo

$$\left.\begin{aligned} z_h &= h v \\ v &= \pi : \nu \end{aligned}\right\} \qquad 323)$$

$$h = 0, 1, 2, \dots (2\nu - 1)$$

Die zugehörenden Arealwerthe seien Z_h, so dass man nach 321) hat

$$Z_h = u_0 h v + H'_{hv} \cdot \sum_{k=1}^{k=2\nu-1} \frac{A_k - u_0 r_k}{R'_k \cdot \operatorname{tang}\frac{r_k - hv}{2}} \qquad 324)$$

$$h = 0, 1, 2, \dots (2\nu - 1)$$

Hieraus erhält man, wie nothwendig, wegen $r_o = 0$ (m. s. 320))

$$Z_o = 0 \tag{325}$$

und wenn man h bis 2ν gehen lässt, wegen 323)

$$Z_{2\nu} = 2\pi u_o = A_{2\nu} \tag{326}$$

Nach 303) ist aber auch

$$Z_h = \int_{x=0}^{x=hv} y\,d\,x \tag{327}$$

Es werde die Differenz zweier auf einander folgender Arealflächen Z_h und Z_{h-1} durch $v \,.\, C_h$ bezeichnet; dann liefert die letzte Gleichung sofort

$$Z_h - Z_{h-1} = vC_h = \int_{x=v(h-1)}^{x=vh} y\,d\,x \tag{328}$$
$$h = 1, 2, \ldots (2\nu)$$

Die ganze Periode 2π wird durch das neu eingeführte Phasensystem z_h in n gleiche Theile von der Grösse v getheilt; die Grössen C_h sind also die Mittelwerthe der Ordinaten aller einzelnen durch die Ordinaten der aequidistanten Grenzphasen z_h ($h = 0, 1, \ldots 2\nu$) abgeschnittenen Flächenstücke. Die C_h dürfen daher als aequidistante Mittelwerthe an Stelle der früheren nichtaequidistanten Reihe $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n$ aufgefasst werden.

Sind die Grössen Z_h vermittelst 324) berechnet, so hat man durch 328) sofort auch die C_h; für die praktische Ausführung der Rechnung verfährt man jedoch besser in folgender Weise. Es werde gesetzt

$$\frac{H'_{hv}}{R'_k \operatorname{tang} \frac{r_k - hv}{2}} = f_{h,k} \tag{329}$$

dann ist nach 324)

$$Z_h = u_o h v + \sum_{k=1}^{k=2\nu-1} (A_k - u_o r_k) f_{h,k} \tag{330}$$

Führt man ein

$$f_{h,k} - f_{h-1,k} = l_{h,k} \tag{331}$$

so folgt unter Zuziehung von 328)

$$Z_h - Z_{h-1} = v\,C_h = u_o v + \sum_{k=1}^{k=2\nu-1} (A_k - u_o r_k)\, l_{k\,h} \tag{332}$$

Hier werde A_k vermittelst 306) und r_k vermittelst der aus 300) unmittelbar folgenden Gleichung

$$r_k = \sum_{p=1}^{p=k} \rho_p \tag{333}$$

ersetzt, wodurch entsteht

$$v C_h = v u_o + \sum_{k=1}^{k=2\nu-1} l_{h,k} \sum_{p=1}^{p=k} \mu_p \rho_p - u_o \sum_{k=1}^{k=2\nu-1} l_{h,k} \sum_{p=1}^{p=k} \rho_p \tag{334}$$

oder durch Vertauschung der Summationsfolge

$$v C_h = v u_o + \sum_{k=1}^{k=2\nu-1} \mu_k \rho_k \sum_{p=k}^{p=2\nu-1} l_{h,p} - u_o \sum_{k=1}^{k=2\nu-1} \rho_k \sum_{p=k}^{p=2\nu-1} l_{h,p} \tag{335}$$

Führt man weiter ein

$$\sum_{p=k}^{p=2\nu-1} l_{h,p} = \lambda_{h,k} \tag{336}$$

so geht 335) über in

$$C_h = u_o \left(1 - \sum_{k=1}^{k=2\nu-1} \frac{\rho_k \lambda_{h,k}}{v}\right) + \sum_{k=1}^{k=2\nu-1} \frac{\mu_k \rho_k \lambda_{h,k}}{v} \tag{337}$$

Man kann dann hier noch u_o nach 298) ersetzen durch

$$u_o = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{k=2\nu} \mu_k \rho_k \tag{338}$$

und erhält dann die C_h in der Gestalt

$$C_h = \sum_{k=1}^{k=2\nu} d_{h,k} \mu_k \tag{339}$$

$$h = 1, 2, \ldots (2\nu)$$

wo man die Koeffizienten $d_{h,k}$ leicht aus 337) und 338) allgemein darstellen könnte, was indessen keine weiteren Vereinfachungen mit sich führt. Man wird die ganze Berechnung am zweckmässigsten folgendermassen anstellen:

Bestimmung der Grenzphasen r_k und der Werthe ρ_k aus 300),

Aufstellung aller Differenzen $\frac{r_m - r_k}{2}$ und $\frac{r_k - vh}{2}$,

Ermittelung von R_k' und H_{ch}' aus 319) und 320),

Successive Berechnung von $f_{h,k}$, $l_{h,k}$, $\lambda_{h,k}$ aus 329), 331) und 336) mit Rücksicht auf 322),

Berechnung von $\frac{\rho_k \lambda_{h,k}}{v}$, und ferner von u_o aus 338),

Substitution dieser Werthe in 337).

Für die nämliche Periode und dieselben Periodenabschnitte bleiben die Werthe der Koeffizienten $d_{h,k}$ in 339) immer dieselben. Rechnungskontrolen lassen sich während des ganzen Verfahrens überall leicht auffinden. Am Schlusse der Rechnung dient als Kontrole der Umstand, dass das arithmetische Mittel der aequidistanten Mittelwerthe C_h vollkommen mit u_o übereinstimmen, oder dass

$$\frac{1}{2\nu}\sum_{h=1}^{h=2\nu} C_h = \frac{1}{2\nu}\sum_{h=1}^{h=2\nu}\sum_{k=1}^{k=2\nu} d_{h,k}\,\mu_k = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{k=2\nu}\mu_k\,\rho_k \qquad 340)$$

sein muss. Hieraus ergibt sich leicht, dass bei richtiger Durchführung der Rechnung schliesslich

$$\sum_{h=1}^{h=2\nu} d_{h,k} = \frac{\rho_k}{v} \qquad 341)$$

gefunden werden muss.

Nach Aufstellung der aequidistanten Mittelwerthe C_h bietet die Berechnung der Konstanten der Bessel'schen Formel 299) keine Schwierigkeit mehr. Integrirt man nämlich jene Gleichung zwischen den Grenzen $x = v(h-1)$ und $x = vh$, so erhält man analog 301) unter Bezugnahme auf 328)

$$\begin{aligned} vC_h = v\,u_o + \sum_{m=1}^{m=\nu-1} \frac{2\sin\frac{mv}{2}}{m}\left(p_m \cos mv\left(h-\tfrac{1}{2}\right) + q_m \sin mv\left(h-\tfrac{1}{2}\right)\right) \\ + \frac{2\,u_\nu \sin\frac{\nu v}{2}}{\nu}\sin\left(U_\nu + \nu v\left(h-\tfrac{1}{2}\right)\right) \end{aligned} \qquad 342)$$

oder wegen

$$\left.\begin{aligned} \nu v &= \pi \\ U_\nu &= \frac{\pi}{2} - \sigma' \end{aligned}\right\} \qquad 343)$$

das System

$$\begin{aligned} C_h = u_o + \sum_{m=1}^{m=\nu-1} \frac{2\sin\frac{mv}{2}}{mv}\left(p_m \cos mv\left(h-\tfrac{1}{2}\right) + q_m \sin mv\left(h-\tfrac{1}{2}\right)\right) \\ + (-1)^{h-1}\cdot\frac{2\,u_\nu \sin\frac{\sigma'}{2}}{\pi} \end{aligned} \qquad 344)$$

$$h = 1,\ 2,\ \ldots\ (2\nu)$$

Dieses System kommt dem Wesen nach ganz auf 123) im Ersten Theil hinaus und liefert bei derselben Behandlungsweise, welche dort angewandt wurde, das Endergebniss

$$\left.\begin{aligned}
u_o &= \frac{1}{2\nu} \sum_{h=1}^{h=2\nu} C_h \\
p_m &= \frac{m v}{2\nu \sin\frac{m v}{2}} \sum_{h=1}^{h=2\nu} C_h \cos m v \left(h - \frac{1}{2}\right) \\
q_m &= \frac{m v}{2\nu \sin\frac{m v}{2}} \sum_{h=1}^{h=2\nu} C_h \sin m v \left(h - \frac{1}{2}\right) \\
m &= 1, 2, \ldots (\nu - 1) \\
u_\nu &= \frac{v}{4 \sin\frac{\sigma'}{2}} \sum_{h=1}^{h=2\nu} (-1)^{h-1} C_h
\end{aligned}\right\} \qquad 345)$$

Setzt man hier den Werth für C_h aus 339) ein, so erhält man eine direkte Darstellung der Unbekannten u_o, p_m, q_m, u_ν durch die Mittelwerthe μ_k in der Gestalt

$$\left.\begin{aligned}
u_o &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{k=2\nu} \mu_k \rho_k \\
p_m &= \sum_{k=1}^{k=2\nu} p_{m,k} \mu_k \\
q_m &= \sum_{k=1}^{k=2\nu} q_{m,k} \mu_k \\
m &= 1, 2, \ldots (\nu - 1) \\
u_\nu &= \sum_{k=1}^{k=2\nu} u_{\nu,k} \mu_k
\end{aligned}\right\} \qquad 346)$$

Es lohnt sich indessen nicht die Substitution a l l g e m e i n auszuführen. Die erste der Gleichungen 345) ist schon in 340) benutzt worden. Sollte $\frac{\sigma'}{2}$ zufällig ein Vielfaches von π sein, dann lässt sich, wie im Ersten Abschnitt des Dritten Theils bei Besprechung der Gleichungen 190), zeigen, dass u_ν in der unbestimmten Form $0 : 0$ auftritt, und man findet durch Entwickelung der Gleichung 316) in einfacher Weise

$$u_\nu = (-1)^\nu \cdot \frac{2}{4^\nu \cdot \sin\left(U_\nu + \frac{\sigma'}{2}\right)} \sum_{h=1}^{h=2\nu-1} \frac{A_h - u_o r_h}{R'_h} \qquad 347)$$

oder wegen 317)

$$u_\nu = (-1)^\nu \cdot \frac{2}{4^\nu} \sum_{h=1}^{h=2\nu-1} \frac{A_h - u_0 r_h}{R'_h} \tag{348}$$

in bemerkenswerther Analogie mit der Gleichung 67).

Hiermit ist die eingangs gestellte Aufgabe, aus einem System von Mittelwerthen der einzelnen, im allgemeinen ungleichen Periodenabschnitte die Bessel'sche Formel für den Gang eines Elementes innerhalb der Periode abzuleiten, vollständig und in aller Strenge gelöst. Der wesentlichste Unterschied zwischen dieser Auflösung und der eines beliebigen Systems von Phasen und Amplituden (immer für $n = 2\nu$) äussert sich darin, dass die Gleichungen, welche U_ν bestimmen, in beiden Fällen verschieden sind. Bei gegebenen zusammengehörenden Amplituden und Phasen muss U_ν gleich der negativen halben Summe aller Phasen gesetzt werden, bei gegebenen Mittelwerthen und Grenzphasen aber gleich $\frac{\pi}{2}$ vermindert um die halbe Summe aller Grenzphasen mit Ausnahme der letzten. Die Zuziehung dieser letzten Grenzphase hätte jedoch, da dieselbe 2π ist, weiter keinen Einfluss auf die Resultate, wie man sich leicht überzeugt.

In der meteorologischen Praxis bietet sich als wohl einziges Beispiel zur vorstehenden Untersuchung die Bestimmung des jährlichen Ganges eines Elementes aus den nach bürgerlichen Monaten berechneten Mittelwerthen. Ich will diesen Fall unter den Voraussetzungen, dass das Jahr am 1. Januar um 0^h beginne und nur zu vollen 365 Tagen gerechnet werde, ausführlich behandeln und namentlich Tabellen für die Logarithmen gewisser Faktoren geben, die sich ein für alle Mal berechnen liessen, so dass die Anwendung der oben von mir abgeleiteten Formeln wesentlich erleichtert wird.

Es ist in diesem Falle $n = 12$, $\nu = 6$, ferner μ_1 der Mittelwerth für den Januar, μ_2 der für den Februar u. s. f. bis μ_{12}, dem Mittelwerth für den Dezember. Die Grenzphasen r_k für die einzelnen Monate sind, wie die ganze Periode, zunächst in Tagen gegeben; in meinen Entwickelungen werden sie aber immer als absolute Zahlen, d. h. als Bogen vom Halbmesser 1 aufgefasst und sind daher durch Multiplikation mit dem Reduktionsfaktor $2\pi : 365$ umzuformen. Man bedarf ferner für die numerische Rechnung einer Darstellung der Grenzphasen durch Winkelgrössen, weil diese in den trigonometrischen Tafeln als Argumente dienen. Eine Übersicht über diese drei Darstellungen enthält die folgende Tabelle. In derselben sind die Winkelgrössen bereits in Zentesimaltheilen des Quadranten gegeben, da nach meiner auf vielfache praktische Erfahrung gegründeten Überzeugung bei der Rechnung die Zentesimaltheilung ausserordentliche Vortheile vor der Nonagesimaltheilung gewährt und da für jene schon sehr zweckmässig eingerichtete Logarithmentafeln (von F. G. Gauss, Gravelius u. A.) vorhanden sind.

Tab. 12.

Grenzphasen			
Bez.	Tage.	absolut.	in Zentes.-Gr. *)
r_0	0	0·00000	0·0000 ^{c0}
r_1	31	0·53364	33·9726
r_2	59	1·01564	64·6575
r_3	90	1·54928	98·6301
r_4	120	2·06570	131·5068
r_5	151	2·59935	165·4795
r_6	181	3·11577	198·3562
r_7	212	3·64941	232·3288
r_8	243	4·18305	266·3014
r_9	273	4·69948	299·1781
r_{10}	304	5·23312	333·1507
r_{11}	334	5·74954	366·0274
r_{12}	365	6·28319	400·0000

Hieraus ergibt sich zunächst

$$\sigma' = \sum_{k=0}^{k=11} r_k = \begin{cases} 1998 \text{ Tagen} \\ 34·39398 \text{ absolut} \\ 2189·5890^{c0} \end{cases} \qquad 349)$$

In den Formeln 299) und 345) braucht man U_6 und $\frac{1}{2}\sigma'$ nur durch Winkelgrössen ausgedrückt; man erhält nach Abwerfung überflüssiger Vielfache von 400 Zentesimal-Graden

$$\frac{1}{2}\sigma' = 294·7945^{c0} \qquad 350)$$

und aus

$$U_6 + \frac{1}{2}\sigma' = 100^{c0} \qquad 351)$$

unter Vermeidung negativer Argumente

$$U_6 = 205·2055^{c0} \qquad 352)$$

Man hat ferner

$$v = \frac{\pi}{6} = 0·52360 = \begin{cases} 30·4167 \text{ Tagen} \\ 33·3333^{c0} \end{cases} \qquad 353)$$

$$\log v = 9·71900 - 10$$

*) Im Anschluss an die gewöhnliche Bezeichnung der Grade, Minuten und Sekunden der Nonagesimaltheilung werde ich für die Zentesimaltheilung des Quadranten die Bezeichnungen $-^{c0}$, $-^{c'}$, $-^{c''}$ gebrauchen, welche mir in Schrift und Druck bequemer und zweckmässiger erscheinen, als die bei Gravelius gebrauchten. Es ist also

$$1 \text{ Quadrant} = 100^{c0} = 10000^{c'} = 1000000^{c''}$$

$$\begin{cases} 1^{c'} = 0·01^{c0} \\ 1^{c''} = 0·0001^{c0} \end{cases}$$

Für die Grössen ρ_k, die Monatslängen, enthält folgende Tabelle die nöthigen numerischen Angaben.

Tab. 13.

ρ_k				$\rho_k : v$	
Tage.	Zentesimalgrade.	absolut.	log ρ_k	absolut.	log $\rho_k : v$
31	33·9726^{cg}	0·53364	9·72725—10	1·01918	0·00825
30	32·8767	0·51643	9·71301—10	0·98630	9·99401—10
28	30·6849	0·48200	9·68304—10	0·92055	9·96405—10

Für den Fall, dass man die Formeln 321) oder 324) direkt benutzen will, gebe ich noch im folgenden die Logarithmen der Grössen R'_k, wobei ich, auch für die späteren Tabellen, bemerke, dass ich die Rechnung der Sicherheit halber durchweg mit siebenstelligen Logarithmen ausgeführt und dann die Resultate auf fünf Dezimalstellen abgekürzt habe.

Tab. 14.

Num.	Log (—10 dazu).	Num.	Log (—10 dazu).
R'_0	7·76784	R_6	7·78271
R'_1	7·72819 n	R'_7	7·79490 n
R'_2	7·72459	R'_8	7·78577
R'_3	7·75244 n	R'_9	7·78113 n
R'_4	7·76536	R'_{10}	7·77672
R'_5	7·77463 n	R'_{11}	7·77200 n

Die Bestimmung von u_0 wird man zweckmässig nicht nach der Formel 338), sondern vermittelst des Ausdrucks

$$u_0 = \frac{31\,(\mu_1 + \mu_3 + \mu_5 + \mu_7 + \mu_8 + \mu_{10} + \mu_{12}) + 30\,(\mu_4 + \mu_6 + \mu_9 + \mu_{11}) + 28\,\mu_2}{365} \qquad 354)$$

vornehmen.

Die ganze übrige Rechnung ist von mir in der früher besprochenen Weise unter fortwährender genauester Kontrolirung angestellt worden, und ich gebe in der folgenden Tabelle eine Zusammenstellung der Logarithmen der Koeffizienten $d_{h,k}$ in 339).

Tab. 15.

zur Berechnung von	Logarithmen (— 10 ist überall zuzuschlagen, *n* bedeutet negativen Numerus) der dienenden Faktoren $d_{k,h}$ von											
	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	μ_7	μ_8	μ_9	μ_{10}	μ_{11}	μ_{12}
C_1	10·00291	*n* 8·13428	7·74184	*n* 7·47677	7·24281	*n* 6·97262	6·48444	6·43185	*n* 6·94944	7·22100	*n* 7·44986	7·70153
C_2	*n* 7·59627	9·98873	8·55966	*n* 8·13438	7·86720	*n* 7·64444	7·40770	*n* 7·07915	5·46982	7·05808	*n* 7·38580	7·58669
C_3	8·36370	*n* 8·71971	10·00206	8·66230	*n* 8·31851	8·07244	*n* 7·82248	7·47368	6·26858	*n* 7·53632	7·86351	*n* 8·10492
C_4	*n* 8·08739	8·33774	*n* 8·63960	9·99709	8·70556	*n* 8·34790	8·09628	*n* 7·85762	7·54630	*n* 6·47828	*n* 7·46793	7·82643
C_5	7·87520	*n* 8·12376	8·34972	*n* 8·66961	10·00154	8·61619	*n* 8·27728	8·03645	*n* 7·79931	7·45197	6·41614	*n* 7·53884
C_6	*n* 7·45781	7·82289	*n* 8·05317	8·27230	*n* 8·57688	9·99720	8·65487	*n* 8·30177	8·06544	*n* 7·83386	7·52238	*n* 6·46285
C_7	6·49513	*n* 7·53648	7·84046	*n* 8·05964	8·28842	*n* 8·61937	10·00191	8·55479	*n* 8·23726	8·00405	*n* 7·76565	7·41542
C_8	7·08164	6·53352	*n* 7·28778	7·57181	*n* 7·79287	8·02714	*n* 8·36646	10·00211	8·22765	*n* 7·92597	7·69750	*n* 7·45350
C_9	*n* 7·50943	7·23096	*n* 6·48187	*n* 7·00139	7·37956	*n* 7·62104	7·84611	*n* 8·15145	9·99785	8·31422	*n* 7·96388	7·72496
C_{10}	7·55056	*n* 7·31854	6·91148	6·47436	*n* 7·14414	7·42627	*n* 7·64707	7·89107	*n* 8·25742	10·00238	8·04965	*n* 7·76441
C_{11}	*n* 7·83280	7·60943	*n* 7·37521	7·07467	*n* 6·42619	*n* 6·76253	7·16970	*n* 7·42377	7·66141	*n* 7·95786	9·99799	8·17781
C_{12}	7·76712	*n* 7·54043	7·31150	*n* 7·03455	6·54851	6·47129	*n* 6·98336	7·25266	*n* 7·48266	7·73325	*n* 8·11194	10·00249

Sind die Mittel μ_k für die bürgerlichen Monate numerisch gegeben, so gewährt die vorstehende Tabelle die Möglichkeit, sehr rasch die aequidistanten Mittelwerthe C_h, welche sich alle auf Monate von der nämlichen Länge $v = 30{\cdot}4167$ Tagen beziehen, zu berechnen.

Ich habe früher bei Gelegenheit der Gleichung 346) eine allgemeine Darstellung der Koeffizienten $p_{m,k}$, $q_{m,k}$, $u_{v,k}$, um welche es sich bei der definitiven Bestimmung von p_m, q_m, u_v handelt, als nicht lohnend vermieden; für den jetzt vorliegenden speziellen Fall aber kann man mit Hülfe der Tabelle 15 die Bestimmung jener Koeffizienten leicht bewerkstelligen und somit unter Umgehung der Aufsuchung aequidistanter Mittelwerthe C_h die Konstanten der Bessel'schen Formel durch die gegebenen nichtaequidistanten Monatsmittel μ_k unmittelbar darstellen. Die Ergebnisse meiner genau kontrolirten Rechnung sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst.

Tab. 16.

zur Berechnung von	Logarithmen (— 10 ist überall zuzuschlagen, *n* bedeutet negativen Numerus) der dienenden Faktoren $p_{m,h}$, $q_{m,h}$, $u_{\nu,h}$ von											
	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	μ_7	μ_8	μ_9	μ_{10}	μ_{11}	μ_{12}
p_1	9·21702	9·04717	8·69323	*n* 8·59640	*n* 9·07192	*n* 9·20445	*n* 9·22231	*n* 9·08774	*n* 8·65114	8·63526	9·06789	9·21983
q_1	8·66598	9·03785	9·21296	9·21167	9·09188	8·67078	*n* 8·60880	*n* 9·08089	*n* 9·20531	*n* 9·22022	*n* 9·07293	*n* 8·66369
p_2	9·17890	7·41442	*n* 9·16098	*n* 9·19452	*n* 7·85301	9·16316	9·19665	7·63455	*n* 9·17515	*n* 9·18460	*n* 7·57093	9·18785
q_2	8·95188	9·21436	8·98130	*n* 8·89964	*n* 9·24480	*n* 8·97355	8·91690	9·24910	8·94959	*n* 8·93071	*n* 9·24087	*n* 8·95255
p_3	9·11366	*n* 9·08715	*n* 9·13854	9·07320	9·15279	*n* 9·08848	*n* 9·14464	9·10536	9·12731	*n* 9·10621	*n* 9·13045	9·12289
q_3	9·11533	9·11122	*n* 9·07713	*n* 9·14915	9·08667	9·14622	*n* 9·09732	*n* 9·13901	9·10664	9·13006	*n* 9·11064	*n* 9·12122
p_4	9·01417	*n* 9·29909	8·93587	9·06500	*n* 9·30308	8·93036	9·05779	*n* 9·30792	8·97676	9·02853	*n* 9·30613	8·99513
q_4	9·23111	7·94243	*n* 9·25283	9·20404	8·34351	*n* 9·26869	9·22783	8·06249	*n* 9·25747	9·24239	7·28861	*n* 9·23730
p_5	8·85515	*n* 9·24684	9·35699	*n* 9·32622	9·15503	*n* 8·57585	*n* 8·87764	9·22800	*n* 9·34381	9·33198	*n* 9·18136	8·68356
q_5	9·33610	*n* 9·18914	8·63225	8·88868	*n* 9·23796	9·34393	*n* 9·32153	9·16470	*n* 8·65982	*n* 8·83341	9·21605	*n* 9·33724
u_6	*n* 9·13377	9·14965	*n* 9·14148	9·12547	*n* 9·11530	9·10725	*n* 9·09888	9·09741	*n* 9·10266	9·10686	*n* 9·11133	9·11646

Sind die Monatsmittel μ_h numerisch gegeben, so kann mit Hülfe der vorstehenden Tabelle die direkte Berechnung der Konstanten p_1, q_1, . . p_5, q_5, u_6 sehr rasch ausgeführt werden. Zur Kontrole wird man, wenn auch die aequidistanten Mittel C_h bestimmt worden sind, jene Konstanten auch vermittelst der Formeln 345) berechnen; ich gebe deshalb eine Hülfstafel für die daselbst vorkommenden Summationsfaktoren.

Tab. 17.

m	$m v : (2\nu \sin \frac{m v}{2})$	
	num.	log.
1	0·16859	9·22682 — 10
2	0·17453	9·24188 — 10
3	0·18512	9·26745 — 10
4	0·20153	9·30435 — 10
5	0·22586	9·35384 — 10
$\frac{v}{4 \sin \frac{1}{2} \sigma'}$	— 0·13134	*n* 9·11839 — 10

Beispiel: Für die mittlere Lufttemperatur (nach bürgerlichen Monaten) in Dorpat hat man *) in Graden C.

Tab. 18.

Monat.	Bez.	Temp.	Monat.	Bez.	Temp.
Januar	μ_1	−6·89	Juli	μ_7	17·34
Februar	μ_2	−6·67	August	μ_8	15·52
März	μ_3	−3·35	September	μ_9	10·90
April	μ_4	2·90	Oktober	μ_{10}	4·77
Mai	μ_5	8·97	November	μ_{11}	−0·93
Juni	μ_6	15·48	Dezember	μ_{12}	−5·68

Als Jahresmittel u_o, welches selbstverständlich korrekt und nicht nach der Vorschrift des Wiener meteorologischen Kongresses **) abzuleiten ist, ergibt sich hieraus, wie a. a. O.

$$u_o = 4{\cdot}42\ ^0\mathrm{C}.$$

Da mir die zwanzigjährigen Monatssummen zu Gebote standen, konnte ich die weitere Rechnung mit den auf eine grössere Anzahl von Dezimalstellen berechneten Werthen der μ_k ausführen, was natürlich nur im Interesse grösserer Sicherheit der Endergebnisse geschah, und gelangte zu den in der folgenden Tabelle zusammengestellten aequidistanten Monatsmitteln C_k. Des Vergleichs halber füge ich in einer besonderen Spalte die Differenzen $C_k - \mu_k$ bei, d. h. diejenigen Grössen, um welche die Dorpater Mittel nach bürgerlichen Monaten zu vermehren sind, wenn man aequidistante Mittel haben will.

Tab. 19.

Monat.	Bez.	Temp.	$C_k - \mu_k$	Monat.	Bez.	Temp.	$C_k - \mu_k$
Januar	C_1	−6·89	0·00	Juli	C_7	17·32	−0·02
Februar	C_2	−6·62	+0·05	August	C_8	15·47	−0·05
März	C_3	−3·07	+0·28	September	C_9	10·79	−0·11
April	C_4	3·18	+0·28	Oktober	C_{10}	4·68	−0·09
Mai	C_5	9·28	+0·31	November	C_{11}	−1·00	−0·07
Juni	C_6	15·68	+0·20	Dezember	C_{12}	−5·72	−0·04

*) Archiv f. d. Naturk. Liv-, Est- u. Kurlands, Serie I, Bd. IX, Lief. 4: „Zwanzigjähr. Mittelw. a. d. met. Beob. 1866—1885 für Dorpat“, S. 49, Verlag d. Dorp. Naturf.-Ges., Dorpat 1887.

**) M. vgl. Sitzungsberichte d. Dorpater Naturf.-Gesellsch. 1886: „Über die Berechnung meteorologischer Jahresmittel“.

Die Korrektionen $C_h - \mu_h$ fallen hiernach für die Monate März bis Juni doch so beträchtlich aus, dass eine direkte Verwendung der bürgerlichen Monatsmittel an Stelle der aequidistanten zur unmittelbaren Aufstellung der Bessel'schen Formel durchaus unzulässig erscheint.

Die weitere Rechnung wurde von mir in doppelter Weise ausgeführt, einmal durch Verwendung der oben gegebenen Grössen C_h, das andre Mal unter Benutzung der Tabelle 16 für die Faktoren $p_{m,h}$, $q_{m,h}$, $q_{\nu,h}$. Ich kam in beiden Fällen zu folgendem Resultat, welches den jährlichen Gang der Lufttemperatur in Dorpat auf Grundlage der bürgerlichen Monatsmittel darstellt:

$$\begin{aligned} y = 4{\cdot}4241 &+ 12{\cdot}4914 \sin (279{\cdot}0825^{co} + x) \\ &+ 0{\cdot}7366 \sin (88{\cdot}8635^{co} + 2x) \\ &+ 0{\cdot}1505 \sin (343{\cdot}2435^{co} + 3x) \\ &+ 0{\cdot}2034 \sin (64{\cdot}9996^{co} + 4x) \\ &+ 0{\cdot}4205 \sin (369{\cdot}5170^{co} + 5x) \\ &+ 0{\cdot}0317 \sin (205{\cdot}2055^{co} + 6x) \end{aligned}$$

Wollte man hieraus für den t^{ten} Tag des Jahres die Mitteltemperatur T_t berechnen, so müsste streng genommen der Mittelwerth des Integrals $\int y\,dx$ zwischen den Grenzen

$$x_1 = \begin{cases} (t-1) \text{ Tagen} \\ (t-1)\,\frac{2\pi}{365} \text{ absolut} \\ (t-1)\,\frac{400}{365}^{co} \end{cases} \quad \text{und} \quad x_2 = \begin{cases} t \text{ Tagen} \\ t \cdot \frac{2\pi}{365} \text{ absolut} \\ t \cdot \frac{400}{365}^{co} \end{cases} \qquad 355)$$

gebildet werden.

Schreibt man die obige Formel

$$y = u_o + \sum_{m=1}^{m=6} u_m \sin (U_m + m x) \qquad 356)$$

so erhält man

$$T_t = \int_{x_1}^{x_2} y\,dx : (x_2 - x_1) \qquad 357)$$

oder wenn man noch einführt

$$\left.\begin{aligned} \frac{365}{m\pi} \sin \left(\frac{200\,m}{365}^{co}\right) &= k_m \\ k_m u_m &= u_m^{\circ} \end{aligned}\right\} \qquad 358)$$

als Endergebniss

$$T_t = u_o + \sum_{m=1}^{m=6} u_m^{\circ} \sin \left(U_m + \frac{400\,m}{365} \left(t - \frac{1}{2}\right)^{co} \right) \qquad 359)$$

Die folgende Tabelle enthält eine Zusammenstellung der Grössen k_m und u''_m.

Tab. 20.

Bez.	Log.	Bez.	Num.
k_1	9·99999 — 10	u''_1	12·4913
k_2	9·99998 — 10	u''_2	0·7366
k_3	9·99995 — 10	u''_3	0·1505
k_4	9·99991 — 10	u''_4	0·2034
k_5	9·99987 — 10	u''_5	0·4204
k_6	9·99981 — 10	u''_6	0·0317

Eine Vergleichung dieser Werthe mit den oben gegebenen von u_m zeigt, dass man mit mehr als ausreichender Genauigkeit T_t aus der ursprünglichen Formel für y erhält, wenn in derselben für x der Werth $\frac{400}{365}\left(t-\frac{1}{2}\right)^{c0}$ eingesetzt wird. Streng genommen hat man dann eigentlich die Ordinate der Kurve für die Zeit 12_h des t^{ten} Jahrestages bestimmt.

Ich habe in letzterer Weise für die 365 Tage des Jahres die aus der oben gegebenen Bessel'schen Formel folgenden Tagesmittel der Temperatur abgeleitet; man findet die Ergebnisse in der folgenden Tabelle. Die Ausführung der bedeutenden Rechenarbeit war für mich nur möglich, weil die Zentesimaltheilung des Quadranten eine sehr ausgiebige und die Ergebnisse sichernde Verwendung der Thomas'schen Rechenmaschine zur Bestimmung der einzelnen Argumente gestattete.

Tab. 21. Dorpat, Tagesmittel (C.) aus der B. F. berechnet nebst Korr. (20 Jahre).

Dat.	Jan.	Korr.	Febr.	Korr.	März.	Korr.	April.	Korr.	Mai.	Korr.	Juni.	Korr.
1	−6·83	+1·11	−6·90	+0·16	−5·87	+1·08	−0·04	+0·61	5·81	−1·[illegible]8	12·70	−0·02
2	−6·85	+1·19	−6·90	+1·69	−5·75	+1·05	0·18	+0·03	6·00	−1·12	12·94	−0·18
3	−6·86	+1·64	−6·90	+1·57	−5·63	+1·05	0·40	+0·38	6·19	−1·09	13·17	+0·25
4	−6·88	+1·06	−**6·90**	+0·45	−5·51	+1·53	0·61	+0·46	6·38	−0·06	13·40	+1·44
5	−6·89	+0·24	−6·90	+1·47	−5·38	+1·58	0·83	+0·52	6·57	+0·51	13·63	+2·55
6	−6·90	+0·40	−6·90	+1·31	−5·24	+1·19	1·04	+0·28	6·76	+0·14	13·86	+2·85
7	−6·90	+1·98	−6·90	+0·39	−5·09	+1·28	1·26	+0·34	6·96	−0·29	14·08	+2·12
8	−6·91	+1·29	−6·89	−0·43	−4·94	+0·70	1·47	−0·06	7·16	+0·09	14·30	+0·22
9	−6·91	+0·72	−6·89	−0·75	−4·78	+1·47	1·67	+0·02	7·36	+0·11	14·51	−0·18
10	−6·91	+0·73	−6·88	−0·75	−4·62	+0·68	1·88	+0·02	7·57	+0·59	14·72	−0·02
11	−**6·91**	+0·18	−6·86	+0·10	−4·45	+0·09	2·08	−0·06	7·78	+1·45	14·92	−0·76
12	−6·91	+1·22	−6·85	+0·09	−4·27	−0·79	2·28	−0·71	7·99	+1·32	15·11	−1·51
13	−6·91	+0·90	−6·83	−1·36	−4·09	−1·07	2·48	−0·71	8·21	+1·46	15·30	−1·97
14	−6·91	+0·35	−6·81	−0·89	−3·90	−0·72	2·68	−1·39	8·43	+1·65	15·48	−1·56
15	−6·91	0·00	−6·78	−1·37	−3·71	−1·20	2·87	−1·06	8·65	+0·99	15·66	−1·51
16	−6·90	−0·73	−6·75	+0·02	−3·52	−0·64	3·06	−0·46	8·87	+0·66	15·82	−0·38
17	−6·90	−0·69	−6·72	−0·97	−3·32	−0·17	3·25	−0·41	9·10	−0·48	15·98	+0·18
18	−6·90	−2·14	−6·68	−1·91	−3·11	−0·35	3·44	−0·42	9·33	−1·24	16·14	−0·03
19	−6·90	−0·39	−6·63	−1·07	−2·90	−0·54	3·62	+0·05	9·56	−0·85	16·28	−0·08
20	−6·89	−0·14	−6·58	+0·78	−2·69	−1·09	3·81	−0·34	9·80	−0·32	16·42	−0·06
21	−6·89	+0·11	−6·53	−0·48	−2·48	−0·79	3·99	−0·20	10·03	−0·45	16·55	−0·24
22	−6·89	−0·44	−6·47	−0·36	−2·26	−1·49	4·18	+0·61	10·27	−0·86	16·67	−0·89
23	−6·89	−1·49	−6·40	+0·36	−2·04	−2·03	4·36	+0·88	10·51	−0·71	16·79	−0·75
24	−**6·89**	−1·66	−6·33	−0·39	−1·82	−1·07	4·54	+1·10	10·75	−0·60	16·89	−0·51
25	−6·89	−1·99	−6·25	+0·36	−1·60	−0·40	4·72	+0·96	11·00	−0·49	16·99	+0·19
26	−6·89	−2·12	−6·16	+0·23	−1·38	−0·24	4·90	+0·65	11·24	−0·51	17·08	+0·62
27	−6·89	−1·32	−6·07	+0·33	−1·16	−0·47	5·08	+0·20	11·48	−0·49	17·16	−0·02
28	−6·89	−0·33	−5·97	+0·96	−0·93	0·00	5·26	−0·14	11·73	+0·07	17·23	−0·03
29	−6·90	+0·70			−0·71	+0·26	5·44	−0·69	11·97	+0·59	17·30	+0·09
30	−6·90	+0·42			−0·49	+0·43	5·63	−0·48	12·22	+0·78	17·36	+0·20
31	−6·90	−0·83			−0·26	+0·66			12·46	+0·52		
Mitt.	−6·89		−6·67		−3·35		2·90		8·97		15·48	

Dorpat, Tagesmittel (C.) aus der B. F. berechnet nebst Korr. (20 Jahre).

Dat.	Juli.	Korr.	Aug.	Korr.	Sept.	Korr.	Okt.	Korr.	Nov.	Korr.	Dez.	Korr.
1	17·41	+0·11	16·74	+0·46	13·67	−0·69	7·68	−0·42	1·81	+0·45	−3·82	+0·61
2	17·45	−0·40	16·68	+0·39	13·51	−0·95	7·47	−0·90	1·63	+0·22	−3·99	−0·99
3	17·49	+0·20	16·62	−0·11	13·34	−0·62	7·26	−0·71	1·45	+0·01	−4·16	−2·13
4	17·52	+0·09	16·56	−0·15	13·17	−0·31	7·06	−0·89	1·26	+0·24	−4·32	−0·54
5	17·55	−1·17	16·49	−0·03	13·00	−0·75	6·86	−0·65	1·07	+0·09	−4·48	−0·71
6	17·56	−1·18	16·43	−0·18	12·82	+0·04	6·66	−0·63	0·89	+0·37	−4·63	−0·61
7	17·58	−1·36	16·36	−0·27	12·64	+0·49	6·46	−0·31	0·70	+0·25	−4·78	−0·06
8	17·58	−1·02	16·29	−0·40	12·45	+0·79	6·26	+0·02	0·51	+0·99	−4·92	+0·45
9	**17·59**	+0·07	16·22	+0·82	12·26	+1·18	6·06	+1·18	0·32	+1·17	−5·06	−0·39
10	17·58	+0·01	16·15	+1·63	12·07	+0·82	5·87	+1·09	0·13	+0·58	−5·20	+0·57
11	17·57	+0·10	16·07	+1·03	11·88	+0·56	5·67	+1·50	−0·06	−0·16	−5·33	+0·36
12	17·56	+0·04	16·00	+0·65	11·68	+0·20	5·48	+1·59	−0·25	−0·01	−5·45	−0·16
13	17·54	+0·67	15·92	+0·94	11·48	+0·38	5·29	+0·61	−0·45	+0·42	−5·57	−0·66
14	17·52	+0·30	15·83	+0·63	11·27	−0·07	5·10	+0·69	−0·64	−0·07	−5·68	+0·52
15	17·50	+0·43	15·75	+0·12	11·07	+0·13	4·91	+0·01	−0·83	−0·46	−5·79	+0·66
16	17·47	+0·84	15·66	+0·19	10·86	+0·31	4·73	−0·59	−1·03	−0·67	−5·89	+1·02
17	17·44	+0·66	15·56	+0·17	10·65	+0·20	4·54	−0·94	−1·22	−0·64	−5·99	−1·13
18	17·41	+0·61	15·47	+0·85	10·44	−0·11	4·36	−0·45	−1·41	−1·09	−6·08	−0·68
19	17·37	−0·10	15·37	+0·86	10·23	+0·34	4·17	−0·77	−1·61	−1·34	−6·17	−1·49
20	17·33	−0·51	15·26	+0·40	10·02	−0·14	3·99	−0·91	−1·80	−1·41	−6·25	−0·56
21	17·29	−1·15	15·15	−0·40	9·80	−0·64	3·81	−0·48	−1·99	−1·71	−6·32	−0·22
22	17·25	−1·07	15·04	−0·52	9·59	−1·04	3·63	−0·54	−2·18	−0·87	−6·39	−0·33
23	17·20	−0·31	14·92	−0·26	9·38	−1·23	3·45	−0·30	−2·37	+0·04	−6·46	−0·23
24	17·16	+0·53	14·80	−0·40	9·16	−0·84	3·27	+0·34	−2·56	+0·27	−6·52	+1·07
25	17·11	+0·79	14·68	−0·98	8·95	−0·70	3·09	+0·28	−2·75	−0·04	−6·57	+0·89
26	17·06	+1·24	14·55	−1·06	8·73	−0·30	2·91	+1·08	−2·93	+0·74	−6·62	+0·95
27	17·01	+1·22	14·41	−0·91	8·52	+0·10	2·72	+0·76	−3·12	+1·09	−6·67	+0·31
28	16·96	−0·15	14·27	−0·24	8·31	+0·35	2·54	+0·52	−3·30	+0·96	−6·71	+0·69
29	16·90	+0·12	14·13	−0·73	8·10	+1·58	2·36	−0·06	−3·48	+0·42	−6·74	+0·84
30	16·85	−0·01	13·98	−1·37	7·89	+0·90	2·18	−0·23	−3·65	+0·17	−6·77	+0·94
31	16·79	+0·39	13·83	−1·16			2·00	+0·10			−6·89	+0·99
Mitt.	17·34		15·52		10·90		4·77		−0·93		−5·68	

In der vorstehenden Tabelle sind neben die berechneten Werthe die Korrektionen gesetzt, d. h. die Grössen, um welche man jene vermehren muss, wenn man die beobachteten Werthe erhalten will *). Diese Korrektionen fallen theilweise sehr beträchtlich aus, was jedenfalls hauptsächlich in dem Umstande begründet ist, dass die Zeit von 20 Jahren auch nicht im entferntesten ausreicht, um für Dorpat nur einigermassen scharfe Tagesmittel abzuleiten. Sucht man für die einzelnen Tage die mittleren Abweichungen der 20 beobachteten Werthe von den a. a. O. gegebenen oder aus der Tabelle 21 leicht zu entnehmenden Tagesmittelwerthen, so findet man, wie sich dies auch an einigen Beispielen nachher zeigen wird, weit grössere Beträge, als sie bei jenen Korrektionen vorkommen.

*) Bei dieser Gelegenheit muss ich einiger Druckfehler erwähnen, die sich in die oben zitierten „Zwanzigjährigen Mittelwerthe" eingeschlichen haben (alle in der Spalte *T* für die Tagesmittel, S. 35 u. 37):

Für den 31. Januar	ist gedruckt −7·23	und es muss heissen −7·73
„ „ 30. März	„ „ −0·62	„ „ „ „ −0·06
„ „ 31. März	„ „ −0·40	„ „ „ „ +0·40

Die berechnete Kurve der Tagesmittel verläuft, abgesehen von einer sehr unbedeutenden Schwankung im letzten Drittel des Januar, welche voraussichtlich bei Vergrösserung der Zahl der Beobachtungsjahre ganz verschwinden wird, recht regelmässig. Man gewinnt daraus durch Vergleichung mit den beobachteten Werthen folgende Ergebnisse:

Absolutes Minimum:	Ber.	— 6·01 am 11. Januar,
	beob.	— 9·04 am 18. Januar,
	Differenz 2·13.	

Die mittlere Abweichung für den beobachteten Werth — 9·04 beträgt indessen nicht weniger als 5·67, d. h. mehr als das doppelte der obigen Differenz.

Absolutes Maximum:	Ber.	17·59 am 9. Juli,
	beob.	18·31 am 16. Juli,
	Differenz 0·72.	

Für den beobachteten Werth 18·31 ist die mittlere Abweichung aber 2·55, d. h. mehr als das dreifache der eben erwähnten Differenz.

Beide Extreme erscheinen in der Berechnung um 7 Tage näher an die theoretischen Eintrittszeiten, die Solstitien, gerückt.

Durchgang des Tagesmittels durch Null: Ber. am 1. April und am 11. November,
beob. am 30. März und am 11. November,
also in guter Übereinstimmung.

Medium: Ber. 23. April und am 18. Oktober.

Die beobachteten Werthe verlaufen so unregelmässig, dass sich in der ersten Jahreshälfte kein einzelner Tag als Zeit des Mediums angeben lässt, während in der zweiten Hälfte der 16. Oktober, in guter Übereinstimmung mit dem berechneten Termin, angenommen werden kann.

Die berechnete Kurve ergibt ferner, wie man durch Differenzenbildung sofort erkennt, als Zeiten raschesten Anwachsens oder Abnehmens der Lufttemperatur im jährlichen Gang die Daten

29. März	(tägliche Zunahme des Mittels	0·22 °C)
28. Mai	(„ „ „ „	0·22 °C)
24. September	(„ Abnahme „ „	0·21 °C)
17. November	(„ „ „ „	0·19 °C).

Aus den beobachteten Werthen lassen sich entsprechende Ergebnisse nicht ableiten, wegen der grossen Unregelmässigkeiten, die jenen noch anhaften. Auf Grund der vorstehenden Vergleichungen halte ich es für gerechtfertigt die in

Tabelle 21 mitgetheilten Grössen als Normalwerthe der Lufttemperatur für die einzelnen Jahrestage in Dorpat anzusehen, so weit solche Normalmittel überhaupt vermittelst zwanzigjähriger Beobachtungsreihen dargestellt werden können. Jedenfalls verdienen jene Mittel den Vorzug vor den zwanzigjährigen beobachteten Tagesmitteln, da bei diesen der Kürze des Zeitraums wegen eine genügende Ausgleichung der Störungen noch nicht stattgefunden haben kann, während jene berechneten Tagesmittel auf die Monatsmittel gegründet sind, bei denen fraglos schon eine viel vollkommenere Ausgleichung der Störungen erfolgt ist.

Die Ableitung solcher Normaltagesmittel ist noch in einer anderen Weise, z. B. von Hann *), unternommen worden, welche ich hier schliesslich kurz besprechen will. Man bestimmt aus der ganzen Reihe der 365 beobachteten vieljährigen Tagesmittel durch Einführung von Normalmonaten, deren Länge gleich $30\frac{5}{12}$ Tagen ist, aequidistante Monatsmittel N_h, indem man je nach Bedürfniss die Tage der bürgerlichen Monatsanfänge ganz oder theilweise zum vorhergehenden Monat, beim Januar aber das Monatsende theilweise zum Februar rechnet. Die Bessel'sche Formel für den jährlichen Gang des betreffenden Elementes müsste dann in ähnlicher Weise aus den N_h abgeleitet werden, wie dies früher mit meinen aequidistanten Monatsmitteln C_h geschah. Man kann indessen die Konstanten der Bessel'schen Formel nicht ohne weiteres durch Benutzung der Gleichungen 345) erhalten, indem man etwa die dortigen C_h einfach durch die N_h ersetzte; denn es liegt nun als ursprünglich gegebenes, allerdings aequidistantes System das der N_h $(h = 1, 2, \ldots 12)$ mit den Grenzphasen

$$\left.\begin{aligned} r_{h-1} &= \frac{\pi}{6}(h-1) \\ r_h &= \frac{\pi}{6}\,h \end{aligned}\right\} \qquad 360)$$

für jeden einzelnen Normalmonat vor. Die Gleichung 314) liefert in diesem Falle

$$\sigma' = \sum_{h=0}^{h=11} \frac{\pi}{6}\,h = 11\,\pi \qquad 361)$$

und aus 317) findet man dann

$$U_6 + \frac{1}{2}\,\sigma' = U_6 + \frac{11\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \qquad 362)$$

d. h.

$$U_6 = -\,5\,\pi \qquad 363)$$

oder unter Vermeidung negativer Argumente

$$U_6 = \pi = 200^{c0} \qquad 364)$$

*) „Über die Temperatur von Wien nach 100 jährigen Beobachtungen", Sitzungsber. d. k. Ak. d. Wiss. Bd. LXXVI, II. Abth. Nov. Heft, 1877.

Dieser Werth ist also wesentlich verschieden von dem für die Benutzung von μ_h oder C_h früher ausfindig gemachten $U_6 = 205{\cdot}2055^{co}$.

Die aufzustellende Bessel'sche Formel hat mithin die Gestalt

$$y = u_o \sum_{m=1}^{m=5} (p_m \cos m x + q_m \sin m x) + u_6 \sin (\pi + 6 x) \qquad 365)$$

Wegen

$$\nu = 6 , \qquad \rho_h = \frac{\pi}{6} , \qquad r_h = \frac{\pi}{6} h \qquad 366)$$

wird nach 302) das aufzulösende Gleichungssystem

367)

$$N_h = u_o + \sum_{m=1}^{m=5} \frac{12 \sin \frac{m\pi}{12}}{m\pi} \left(p_m \cos \frac{m\pi}{6} \left(h - \frac{1}{2}\right) + q_m \sin \frac{m\pi}{6} \left(h - \frac{1}{2}\right)\right) + \frac{2 u_6}{\pi} (-1)^h$$

$$h = 1, 2, \ldots 12$$

woraus man in der bekannten Weise erhält

$$\left.\begin{aligned} u_o &= \frac{1}{12} \sum_{h=1}^{h=12} N_h \\ p_m &= \frac{m\pi}{72 \sin \frac{m\pi}{12}} \sum_{h=1}^{h=12} N_h \cos \frac{m\pi}{6} \left(h - \frac{1}{2}\right) \\ q_m &= \frac{m\pi}{72 \sin \frac{m\pi}{12}} \sum_{h=1}^{h=12} N_h \sin \frac{m\pi}{6} \left(h - \frac{1}{2}\right) \\ u_6 &= \frac{\pi}{24} \sum_{h=1}^{h=12} (-1)^h N_h \end{aligned} \quad m = 1, 2, 3, 4, 5 \right\} \qquad 368)$$

Nun lässt sich allerdings erkennen, dass diese Formeln mit 345) identisch sind, wenn daselbst C_h durch N_h und der Werth für σ', wie er früher aus Tabelle 12 abgeleitet worden, durch den vorhin ermittelten $\sigma' = 11\pi$ ersetzt werden. Die in der Tabelle 17 gegebenen Faktoren der für p_m und q_m auszuführenden Summationen können daher hier ohne weiteres benutzt werden. Nach Bravais*) erhält man aus der gewöhnlichen Bessel'schen Formel für die Normalmonatsmittel N_h (d. h. diese als Amplituden, welche zu den Phasen $\frac{\pi}{6}\left(h - \frac{1}{2}\right)$ gehören, aufgefasst) die für

*) Voyage en Scandinavie, Météorologie, t. II, p. 324, zitiert nach Hann a. a. O.

die Tagesmittel, indem man die Winkelkonstanten U_m ungeändert lässt und die Konstanten u_m (oder entsprechend p_m und q_m) im Verhältniss des Bogens zum Sinus von $\frac{m\pi}{12}$ vergrössert. Hiermit stimmen die obigen Formeln vollkommen überein; denn bei der gewöhnlichen Bessel'schen Formel müssten die Summationen für p_m und q_m den Faktor $\frac{1}{6}$ erhalten. Ich muss nur wiederum (m. vgl. die Anmerkung im Zweiten Abschnitt des Dritten Theils) darauf aufmerksam machen, dass im gewöhnlichen Falle der Koeffizient der Summation für u_6 nicht $\frac{1}{6}$, sondern $\frac{1}{12}$ ist, dass daher der oben angegebene Faktor $\frac{\pi}{24}$ bei der Summation für u_6 vollkommen korrekt ist. Hann hat a. a. O.*) den unrichtigen Faktor $\frac{\pi}{12}$ verwendet.

In der folgenden Tabelle gebe ich die aus der Dorpater zwanzigjährigen Reihe von mir abgeleiteten Normalmonatsmittel N_h und vergleiche dieselben mit meinen aequidistanten Monatsmitteln C_h, sowie mit den Mitteln μ_h der bürgerlichen Monate.

Tab. 22.

Monat.	Bez.	Temp.	C_h-N_h	$N_h-\mu_h$	Monat.	Bez.	Temp.	C_h-N_h	$N_h-\mu_h$
Januar	N_1	−6·88	−0·01	+0·01	Juli	N_7	17·34	−0·02	0·00
Februar	N_2	−6·59	−0·03	+0·08	August	N_8	15·44	+0·03	−0·08
März	N_3	−3·11	+0·04	+0·24	Sept.	N_9	10·78	+0·01	−0·12
April	N_4	3·09	+0·09	+0·19	Oktober	N_{10}	4·69	−0·01	−0·08
Mai	N_5	9·34	−0·06	+0·37	Nov.	N_{11}	−0·99	−0·01	−0·06
Juni	N_6	15·67	+0·01	+0·19	Dez.	N_{12}	−5·73	+0·01	−0·05

*) In der Formel B, S. 28 des Separatabdrucks. Die Formel A für T_x auf derselben Seite scheint mir unrichtig berechnet zu sein. Da Hann 12 Normalwerthe zu Grunde legt und die Bessel'sche Formel mit 12 Konstanten ansetzt, so müssten bei richtig ausgeführter Rechnung die Differenzen zwischen den „beobachteten" und „berechneten" Normalwerthen durchweg gleich Null werden. Dies ist aber nach der Tabelle S. 29 durchaus nicht der Fall. Diese Tabelle bot mir die Möglichkeit die sonst nicht angegebenen Normalwerthe ausfindig zu machen, vermittelst deren ich die Formel A neu berechnete. Ich stelle Hann's und meine Ergebnisse im folgenden zusammen, wobei ich kaum zu bemerken brauche, dass meine Formel, wie ich mich für alle einzelnen Fälle überzeugt habe, die Normalwerthe vollkommen genau wiedergibt.

	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
Hann	9·508	10·886	0·522	0·162	0·190	0·181	0·128
W.	9·508	10·887	0·494	0·162	0·166	0·147	0·064

	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6
Hann	270°7′	316°48′	133°45′	344°43′	242°1′	270°0′
W.	270°6′	315°58′	133°45′	342°31′	234°29′	270°0′

Bei Hann sind in Folge dieses Umstands die Konstanten der Formel B, S. 28 und die „normalen Temperaturmittel für die hohe Warte", S. 29, mit nicht unbedeutenden Fehlern behaftet. Es ist mir nicht bekannt, dass diese Fehler seither bemerkt und verbessert worden.

Man ersieht hieraus, dass die Differenzen zwischen den aequidistanten Reihen angehörenden Grössen N_h und C_h für Dorpat bei Zugrundelegung von 20 Beobachtungsjahren doch noch auf 0·09 °C. ansteigen können.

Der Benutzung der Normalmonate mit den Mitteln N_h steht meiner Ansicht nach theoretisch nur das Bedenken im Wege, dass, wenn zufällig in den ersten Tagen der Monate starke, noch unausgeglichene Störungen der Tagesmittel vorhanden sind, diese Störungen auf die Werthe N_h sehr merklichen Einfluss haben müssen. Dies ist beispielsweise bei Dorpat, wie man sich mit Hülfe der Tabelle 21 leicht überzeugen kann, gerade der Fall. Die Grössen C_h dagegen werden durch Interpolation aus der auf die bürgerlichen Monatsmittel gegründeten Jahreskurve bestimmt, welche unter allen Umständen einen viel regelmässigeren Verlauf zeigen muss, als die Kurve der direkt beobachteten Tagesmittel. Man muss daher a priori den Grössen C_h ein grösseres Gewicht beilegen als den Normalmonatsmitteln N_h.

Praktisch liegt die Sache so, dass man zur Bestimmung der Normalwerthe N_h die vieljährigen Mittel für alle einzelnen Tage des Jahres besitzen muss. Solcher Reihen sind aber im ganzen nicht allzuviele veröffentlicht, während die Mittel μ_h für die bürgerlichen Monate, worauf zunächst die Berechnung meiner aequidistanten Mittel C_h fusst, für eine ausserordentlich grosse Anzahl von Orten bekannt sind. Man ist also in weitaus der Mehrzahl der Fälle doch auf die Grössen C_h angewiesen. Dass aber auch die C_h sich ganz umgehen lassen, indem man die Konstanten p_m, q_m, u_0 direkt aus den μ_k mit Hülfe der Tabelle 16 berechnet, habe ich schon früher hervorgehoben. Immerhin ist es zu empfehlen, der sicheren Kontrole wegen auch die C_h vermittelst der Tabelle 15 zu bestimmen und dann die Konstanten der Bessel'schen Formel vermittelst 345) zum zweiten Male aufzusuchen.

Dritter Abschnitt.

Verwerthung der Extreme bei Aufstellung der Bessel'schen Formel.

Handelt es sich darum neben n gewöhnlichen Beobachtungen (x_h, α_h) auch die Extreme zur Aufstellung der Bessel'schen Formel, insbesondere der Mittelwerthe u_0, worauf es mir hier hauptsächlich ankommt, herbeizuziehen, so gilt zunächst folgende Überlegung. Die zu ermittelnde Formel laute

$$y = u_0 + \sum_{m=1} (p_m \cos m x + q_m \sin m x) \qquad 369)$$

Werden die Phasen der Extreme durch w bezeichnet, so hat man zur Bestimmung von w bekanntlich die Gleichung

$$0 = \sum_{m=1} m\,(-p_m \sin mw + q_m \cos mw) \qquad 370)$$

Angenommen, man habe diese Gleichung aufgelöst und 2λ reelle Wurzeln w_k $(k = 1, 2, \ldots 2\lambda)$ gefunden, und es seien alle zu den Phasen w_k gehörenden extremen Amplitudenwerthe ε_k gegeben, dann tritt zu dem ursprünglichen System

$$\alpha_h = u_o + \sum_{m=1} (p_m \cos m x + q_m \sin m x) \qquad 371)$$

$$h = 1, 2, \ldots n$$

noch die Schaar von 2λ Gleichungen

$$\varepsilon_k = u_o + \sum_{m=1} (p_m \cos m w_k + q_m \sin m w_k) \qquad 372)$$

$$k = 1, 2, \ldots (2\lambda)$$

hinzu. Die Bessel'sche Formel muss mithin von Hause aus mit $n + 2\lambda$ Konstanten angesetzt werden, wenn die Aufgabe, wie immer, eine definite werden soll.

Der einfachste Fall ist offenbar $n = 1$, $\lambda = 1$, d. h. man hat eine gewöhnliche Beobachtung (x_1, α_1), und das betreffende Element besitzt innerhalb der Periode ein Maximum ε_1 und ein Minimum ε_2. Die aufzustellende Gleichung wird dann

$$y = u_o + p_1 \cos x + q_1 \sin x \qquad 373)$$

und zur Bestimmung der Phasen der Extreme erhält man

$$0 = -p_1 \sin w + q_1 \cos w \qquad 374)$$

woraus folgt

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= \text{arc } tg \frac{q_1}{p_1} \\ w_2 &= \pi + \text{arc } tg \frac{q_1}{p_1} \end{aligned}\right\} \qquad 375)$$

Dies zeigt aber, dass die beiden extremen Werthe ein gewöhnliches aequidistantes System bilden. Nach den Erörterungen des Zweiten Theils ist dann die gewöhnliche Beobachtung (x_1, α_1) als überzählig zu betrachten, und man muss nothwendigerweise erhalten

$$u_o = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \qquad 376)$$

so dass die gewöhnliche Beobachtung auf das Periodenmittel ohne Einfluss ist. In der That hat man aus 375)

$$\left.\begin{array}{ll} \sin w_1 = q_1 : \sqrt{p_1^2 + q_1^2} & \cos w_1 = p_1 : \sqrt{p_1^2 + q_1^2} \\ \sin w_2 = -q_1 : \sqrt{p_1^2 + q_1^2} & \cos w_2 = -q_1 : \sqrt{p_1^2 + q_1^2} \end{array}\right\} \quad 377)$$

und man erhält aus 373) als aufzulösendes System

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 = u_o + p_1 \cos x_1 + q_1 \sin x_1 \\ \varepsilon_1 = u_o + p_1 \cos w_1 + q_1 \sin w_1 = u_o + \sqrt{p_1^2 + q_1^2} \\ \varepsilon_2 = u_o + p_1 \cos w_2 + q_1 \sin w_2 = u_o - \sqrt{p_1^2 + q_1^2} \end{array}\right\} \quad 378)$$

woraus 376) unmittelbar folgt. Die weitere Bestimmung von p_1 und q_1 ist sehr leicht; ich gehe indessen nicht darauf ein, da der Fall für die Praxis wegen des Ergebnisses, dass die beiden Extreme um die halbe Periode von einander abstehen sollen, ohne Bedeutung sein dürfte.

An Einfachheit steht dem eben besprochenen Falle zunächst derjenige, in welchem 2 gewöhnliche Beobachtungen (x_1, α_1, x_2, α_2) vorliegen und das betreffende Element auch nur ein Maximum ε_1 und ein Minimum ε_2 innerhalb der Periode hat, d. h. $n = 2$, $\lambda = 1$. Die Bessel'sche Formel muss daher mit 4 Konstanten angesetzt werden

$$y = u_o + p_1 \cos x + q_1 \sin x + u_2 \sin (U_2 + 2x) \quad 379)$$

wo U_2 später nach dem Satze am Schlusse des Ersten Abschnitts zu bestimmen wäre. Die Gleichung 370), vermittelst deren die Phasen der Extreme zu berechnen wären, wird

$$0 = -p_1 \sin w + q_1 \cos w + 2u_2 \cos (U_2 + 2w) \quad 380)$$

d. h. eine Gleichung vierten Grades, welche nur zwei reelle Wurzeln w_1 und w_2 haben darf. Man könnte diese Gleichung zwar noch allgemein auflösen, allein in den Ergebnissen sind die Grössen p_1, q_1, u_2 nicht mehr einfach linear mit einander verknüpft, so dass eine allgemeine Lösung des Systems

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 = u_o + p_1 \cos x_1 + q_1 \sin x_1 + u_2 \sin (U_2 + 2x_1) \\ \alpha_2 = u_o + p_1 \cos x_2 + q_1 \sin x_2 + u_2 \sin (U_2 + 2x_2) \\ \varepsilon_1 = u_o + p_1 \cos w_1 + q_1 \sin w_1 + u_2 \sin (U_2 + 2w_1) \\ \varepsilon_2 = u_o + p_1 \cos w_2 + q_1 \sin w_2 + u_2 \sin (U_2 + 2w_2) \end{array}\right\} \quad 381)$$

wo w_1 und w_2 jetzt durch 380) gegeben vorausgesetzt sind, als geradezu unausführbar bezeichnet werden muss.

In noch höherem Grade gilt dies bei allen anderen Fällen, für $n > 2$, $\lambda > 1$.

An eine Verwerthung aller Extreme innerhalb der Periode unter Aufsuchung der zugehörigen Phasenwerthe aus der zu konstruierenden Bessel'schen Formel ist also, abgesehen von dem oben erwähnten Falle $n = 1$, $\lambda = 1$, gar nicht zu denken. Zu Resultaten wird man im allgemeinen nur gelangen können, wenn gleichzeitig mit den extremen Amplituden ε_k auch die zugehörigen Phasen w_k direkt gegeben sind. Ich komme auf diese Aufgabe nachher zurück.

Verzichtet man darauf alle extremen Werthe, die in der Periode vorkommen, zur Verwendung zu bringen, so gelingt es noch einen Fall ausfindig zu machen, in welchem die Phase des Extrems nicht gegeben zu sein braucht.

Man habe innerhalb der Periode, in welcher das betreffende Element nur ein Maximum und ein Minimum besitze, 2 gewöhnliche Beobachtungen (x_1, α_1, x_2, α_2) und kenne einen der extremen Werthe, ε, jedoch nicht dessen Phase w. Die Bessel'sche Formel wird dann

$$y = u_o + p_1 \cos x + q_1 \sin x \tag{382}$$

und man erhält, wie aus 373)

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} w &= q_1 : p_1 \\ \sin w = \pm q_1 : \sqrt{p_1^2 + q_1^2} \qquad & \cos w = \pm p_1 : \sqrt{p_1^2 + q_1^2} \end{aligned}\right\} \tag{383}$$

wo die oberen und die unteren Zeichen einander entsprechen. Das aufzulösende System wird (man vergleiche 378))

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= u_o + p_1 \cos x_1 + q_1 \sin x_1 \\ \alpha_2 &= u_o + p_1 \cos x_2 + q_1 \sin x_2 \\ \varepsilon &= u_o + p_1 \cos w + q_1 \sin w = u_o \pm \sqrt{p_1^2 + q_1^2} \\ \text{oder} \qquad (\varepsilon - u_o)^2 &= p_1^2 + q_1^2 \end{aligned}\right\} \tag{384}$$

Setzt man die aus den beiden ersten Gleichungen folgenden Werthe für p_1 und q_1 in die vierte ein, so entsteht nach einigen Reduktionen

$$u_o = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 - 2\varepsilon \cos^2 \frac{x_2 - x_1}{2} \pm 2 \cos \frac{x_2 - x_1}{2} \sqrt{(\alpha_1 - \varepsilon)(\alpha_2 - \varepsilon)}}{2 \sin^2 \frac{x_2 - x_1}{2}} \tag{385}$$

Die Entscheidung darüber, welches Vorzeichen der Wurzel zu wählen sei, hängt sowohl von der Stellung der gewöhnlichen Beobachtungen in der Periode, als auch davon ab, ob ε das Maximum oder das Minimum ist. Aus der ersten und zweiten Gleichung 384) sind dann sehr leicht p_1 und q_1 zu bestimmen, worauf ich nicht weiter eingehen will.

Sind die beiden gewöhnlichen Beobachtungen aequidistant, $x_2 = \pi + x_1$, dann gibt die obige Formel 385)

$$u_o = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \tag{386}$$

d. h. es hat diesmal der extreme Werth die Stellung einer überzähligen Beobachtung gegenüber den beiden aequidistanten.

Ich will die Gleichung 385) auf einige numerische Beispiele anwenden, die ich wie früher dem täglichen Gang der Lufttemperatur für Tiflis im Jahresmittel entnehme. Es mag bei allen Beispielen $x_2 - x_1 = \frac{\pi}{2}$ sein, d. h. die beiden gewöhnlichen Beobachtungen sollen immer einen Abstand von 6 Stunden haben; die Formel 385) wird dann

$$u_o = \alpha_1 + \alpha_2 - \varepsilon \pm \sqrt{2(\alpha_1 - \varepsilon)(\alpha_2 - \varepsilon)} \tag{387}$$

und es soll immer das Minimum im Betrage von $\varepsilon = 8{\cdot}77\,^\circ$C.*) zur Mittelbildung herangezogen werden. Das Tagesmittel beträgt $u_o = 12{\cdot}56\,^\circ$C.

1) $x_1 = 6^h$ $\alpha_1 = 8{\cdot}97$
$x_2 = 12^h$ $\alpha_2 = 15{\cdot}97$
Ber. $u_o = 14{\cdot}47$
Korr. $= -1{\cdot}91$

2) $x_1 = 8^h$ $\alpha_1 = 10{\cdot}77$
$x_2 = 14^h$ $\alpha_2 = 17{\cdot}20$
Ber. $u_o = 13{\cdot}39$
Korr. $= -0{\cdot}83$

3) $x_1 = 10^h$ $\alpha_1 = 13{\cdot}68$
$x_2 = 16^h$ $\alpha_2 = 16{\cdot}84$
Ber. $u_o = 12{\cdot}85$
Korr. $= -0{\cdot}29$

4) $x_1 = 14^h$ $\alpha_1 = 17{\cdot}20$
$x_2 = 20^h$ $\alpha_2 = 12{\cdot}53$
Ber. $u_o = 13{\cdot}00$
Korr. $= -0{\cdot}44$

Die erste dieser Kombinationen liefert das schlechteste Ergebniss, offenbar weil einer der gewöhnlichen Beobachtungstermine, 6^h, der Phase des Minimums sehr nahe liegt.

*) H. Wild: Die Temperaturverhältnisse des russischen Reiches, Tabellenband S. XXI, wo sich auch als Phase w des Minimums $5^h\,20^m$ angegeben findet.

Um zur allgemeinen Theorie zurückzukehren seien n gewöhnliche Beobachtungen (x_h, α_h) nebst l extremen Werthen ε_k und deren Phasen w_k gegeben. Die Konstanten der Bessel'schen Formel sind dann zu bestimmen aus den drei Systemen

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_h &= u_o + \sum_{m=1} (p_m \cos m x_h + q_m \sin m x_h) \\
&\qquad h = 1, 2, \ldots n \\
\varepsilon_k &= u_o + \sum_{m=1} (p_m \cos m w_k + q_m \sin m w_k) \\
&\qquad k = 1, 2, \ldots l \\
0 &= \sum_{m=1} m(-p_m \sin m w_k + q_m \sin m w_k) \\
&\qquad k = 1, 2, \ldots l
\end{aligned}\right\} \qquad 388)$$

Im Unterschied von den gewöhnlichen Beobachtungen liefert jedes Extrem (w_k, ε_k) hiernach zwei Bedingungsgleichungen; man kann das dritte der obigen Systeme nicht weglassen, weil durch dasselbe gerade der Charakter der ε_k als extremer Werthe zum Ausdruck kommt. Die Zahl der zu bestimmenden Konstanten in der Bessel'schen Formel wird $n + 2l$, woraus die obere Gränze für m in den Summationen zu ermitteln ist.

Die allgemeine Auflösung des Systems 388) für die Unbekannten u_o, p_m, q_m ist nothwendigerweise durchaus verschieden von der in dem gewöhnlichen Falle von n Beobachtungen, den ich im Ersten Theile behandelt habe, und es wird für $n = 2\nu$ die Gleichung, durch welche $U_{\nu+l}$ zu bestimmen ist, jedenfalls eine ganz andere als 112). Man wird $U_{\nu+l}$ vermittelst des am Schlusse des Ersten Abschnittes gegebenen Satzes jederzeit ausfindig machen können. Eine allgemeine Behandlung von 388) bietet sehr grosse analytische Schwierigkeiten. Da dieselbe wohl auch nur sehr selten gebraucht werden dürfte, so beschränke ich mich auf die Untersuchung einiger einfacher, bemerkenswerther Fälle.

1) Das betreffende Element besitze innerhalb der Periode nur 2 Extreme, ein Minimum und ein Maximum, deren Beträge ε_1 und ε_2 nebst den zugehörigen Phasen w_1 und w_2 man kenne. Man hat also $n = 0$, $l = 2$ und die Bessel'sche Formel wird

$$y = u_o + p_1 \cos x + q_1 \sin x + u_2 \sin (U_2 + 2x) \qquad 389)$$

wo die Konstanten vermittelst der Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= u_o + p_1 \cos w_1 + q_1 \sin w_1 + u_2 \sin (U_2 + 2 w_1) \\
0 &= \quad - p_1 \sin w_1 + q_1 \cos w_1 + 2 u_2 \cos (U_2 + 2 w_1) \\
\varepsilon_2 &= u_o + p_1 \cos w_2 + q_1 \sin w_2 + u_2 \sin (U_2 + 2 w_2) \\
0 &= \quad - p_1 \sin w_2 + q_1 \cos w_2 + 2 u_2 \cos (U_2 + 2 w_2)
\end{aligned}\right\} \qquad 390)$$

zu bestimmen sind. Nach dem Satz am Schlusse des Ersten Abschnitts ist die Bedingungsgleichung für U_2 aus der Determinante

$$f(U_2) = \begin{vmatrix} 1, & \cos w_1, & \sin w_1, & \sin(U_2 + 2w_1) \\ 0, & -\sin w_1, & \cos w_1, & 2\cos(U_2 + 2w_1) \\ 1, & \cos w_2, & \sin w_2, & \sin(U_2 + 2w_2) \\ 0, & -\sin w_2, & \cos w_2, & 2\cos(U_2 + 2w_2) \end{vmatrix} \qquad 391)$$

durch die Forderung eines Maximalwerths (absolut genommen) für $f(U_2)$ abzuleiten. Aus Untersuchungen, welche ich an einer anderen Stelle *) veröffentliche, wobei derartige Determinanten allgemein behandelt werden, geht hervor, dass

$$f(U_2) = -8\sin^4\frac{w_2 - w_1}{2} \cdot \cos(U_2 + w_1 + w_2) \qquad 392)$$

ist. Man hat daher, um diesen Ausdruck absolut genommen zu einem Maximum zu machen, für U_2 die Bedingungsgleichung

$$U_2 = -(w_1 + w_2) \qquad 393)$$

Durch diesen Werth geht das System 390) in das folgende über:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= u_o + p_1\cos w_1 + q_1\sin w_1 - u_2\sin(w_2 - w_1) \\ 0 &= \quad - p_1\sin w_1 + q_1\cos w_1 + 2u_2\cos(w_2 - w_1) \\ \varepsilon_2 &= u_o + p_1\cos w_2 + q_1\sin w_2 + u_2\sin(w_2 - w_1) \\ 0 &= \quad - p_1\sin w_2 + q_1\cos w_2 + 2u_2\cos(w_2 - w_1) \end{aligned}\right\} \qquad 394)$$

Die Subtraktion der 2ten von der 4ten Gleichung gibt, da $\sin\frac{w_2 - w_1}{2}$ nicht gleich Null werden kann,

$$p_1\cos\frac{w_2 + w_1}{2} + q_1\sin\frac{w_2 + w_1}{2} = 0 \qquad 395)$$

und wenn man dies bei Addition der 1ten und 3ten Gleichung berücksichtigt, so erhält man

$$u_o = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \qquad 396)$$

*) Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1890.

d. h. das Periodenmittel ist gleich dem arithmetischen Mittel aus den beiden extremen Werthen zu setzen. Hiermit ist die theoretische Berechtigung dieser längst bekannten und angewandten Mittelbildung in aller Strenge nachgewiesen. Der Werth der Phasen für die Extreme ist hier, im Gegensatz zu dem in 376) abgeleiteten Resultat, völlig gleichgültig. Will man sich auf die Kenntniss von u_o beschränken, welche ja doch immer die Hauptsache ist, so schliesst sich dieser Fall als dritter lösbarer den beiden früher in 373) und 382) behandelten an. Soll freilich die Bessel'sche Formel vollständig aufgestellt werden, so ist die Kenntniss der Phasen w_1 und w_2 unerlässlich. Die weitere, sehr einfache Auflösung der Gleichungen 394) liefert dann, wenn man 395) und 396) berücksichtigt,

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\cos(w_2 - w_1)\sin\frac{w_2 + w_1}{2}}{2\sin^3\frac{w_2 - w_1}{2}} \\ q_1 &= \frac{-(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\cos(w_2 - w_1)\cos\frac{w_2 + w_1}{2}}{2\sin^3\frac{w_2 - w_1}{2}} \\ u_2 &= \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\cos\frac{w_2 - w_1}{2}}{4\sin^3\frac{w_2 - w_1}{2}} \end{aligned}\right\} \qquad 397)$$

und die Bessel'sche Formel erscheint schliesslich in dem merkwürdigen Ausdruck

$$y = \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}{2} - \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\cos(w_2 - w_1)}{2\sin^3\frac{w_2 - w_1}{2}}\sin\left(x - \frac{w_2 + w_1}{2}\right) + \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\cos\frac{w_2 - w_1}{2}}{4\sin^3\frac{w_2 - w_1}{2}}\sin 2\left(x - \frac{w_2 + w_1}{2}\right) \qquad 398)$$

Es gelingt also im vorliegenden Falle die Aufstellung der Formel direkt in der Gestalt

$$y = u_o + u_1 \sin(U_1 + x) + u_2 \sin(U_2 + 2x) \qquad 399)$$

wofür mir wenigstens kein Analogon bekannt ist. Man kann hiernach durch die beiden Extreme und deren Phasen den Gang innerhalb der Periode ebenso genau darstellen wie durch vier gewöhnliche Beobachtungen. Für die praktische Anwendung bleibt freilich die Frage, wie man die Phasen der Extreme erfahren soll, leider vollständig offen.

Aus dem nämlichen Grunde erscheint eine Behandlung von weiteren Fällen, in denen die Kenntniss der Extremphasen vorausgesetzt werden müsste, an sich nicht zweckmässig. Wenn ich trotzdem im folgenden noch einen solchen Fall untersuche, so bestimmen mich dazu Gründe, die erst am Schlusse der betreffenden theoretischen Entwickelungen hervortreten.

2) Man habe drei gewöhnliche Beobachtungen (x_1, x_2, x_3, α_1, α_2, α_3) und einen extremen Werth ε mit seiner Phase w. Die Bessel'sche Formel wird dann

$$y = u_o + p_1 \cos x + q_1 \sin x + p_2 \cos 2x + q_2 \sin 2x \tag{400}$$

und man hat als aufzulösendes Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_1 &= u_o + p_1 \cos x_1 + q_1 \sin x_1 + p_2 \cos 2x_1 + q_2 \sin 2x_1 \\
\alpha_2 &= u_o + p_1 \cos x_2 + q_1 \sin x_2 + p_2 \cos 2x_2 + q_2 \sin 2x_2 \\
\alpha_3 &= u_o + p_1 \cos x_3 + q_1 \sin x_3 + p_2 \cos 2x_3 + q_2 \sin 2x_3 \\
\varepsilon &= u_o + p_1 \cos w + q_1 \sin w + p_2 \cos 2w + q_2 \sin 2w \\
0 &= \quad - p_1 \sin w + q_1 \cos w - 2p_2 \sin 2w + 2q_2 \cos 2w
\end{aligned}\right\} \tag{401}$$

Die allgemeinen Auflösungsergebnisse sind sehr verwickelt; wenn ich dieselben trotzdem, wenigstens für u_o, hier mittheile, so geschieht dies zunächst hauptsächlich aus dem Grunde, weil drei gewöhnliche Beobachtungen täglich so ausserordentlich häufig vorkommen, und weil man speziell bei der Lufttemperatur wenigstens den Minimalwerth vermittelst besonderer Apparate fast überall täglich bestimmt. Man erhält aus 400)

$$\begin{aligned}
&128\, u_o \sin\frac{x_2 - x_1}{2} \cdot \sin\frac{x_3 - x_1}{2} \cdot \sin\frac{x_3 - x_2}{2} \cdot \sin^2\frac{w - x_1}{2} \cdot \sin^2\frac{w - x_2}{2} \cdot \sin^2\frac{w - x_3}{2} \cdot = \\
&= 16\,\alpha_1 \sin^2\frac{w - x_2}{2} \cdot \sin^2\frac{w - x_3}{2} \cdot \sin\frac{x_3 - x_2}{2}\left(\cos\frac{2w - x_2 - x_3}{2} + 2\cos\frac{x_3 - x_2}{2}\right) \\
&- 16\,\alpha_2 \sin^2\frac{w - x_1}{2} \cdot \sin^2\frac{w - x_3}{2} \cdot \sin\frac{x_3 - x_1}{2}\left(\cos\frac{2w - x_1 - x_3}{2} + 2\cos\frac{x_3 - x_1}{2}\right) \\
&+ 16\,\alpha_3 \sin^2\frac{w - x_1}{2} \cdot \sin^2\frac{w - x_2}{2} \cdot \sin\frac{x_2 - x_1}{2}\left(\cos\frac{2w - x_1 - x_2}{2} + 2\cos\frac{x_2 - x_1}{2}\right) \\
&- 4\,\varepsilon \sin\frac{x_2 - x_1}{2} \cdot \sin\frac{x_3 - x_1}{2} \cdot \sin\frac{x_3 - x_2}{2}\Big[\cos(w - x_1 - x_2 + x_3) + \cos(w - x_1 + x_2 - x_3) \\
&\quad + \cos(w + x_1 - x_2 - x_3) + \cos(w - x_1) + \cos(w - x_2) + \cos(w - x_3) \\
&\quad - 2\cos(2w - x_1 - x_2) - 2\cos(2w - x_1 - x_3) - 2\cos(2w - x_2 - x_3)\Big]
\end{aligned} \tag{402}$$

Ich will diese Formel auf die für die Tagesperiode jetzt leider sehr häufig benutzte Stundenkombination 8^h, 14^h, 20^h und Minimum anwenden. Die Periode mag mit 8^h beginnen, und es mögen die in den drei festen Terminen beobachteten Werthe, entsprechend dem früheren, durch b_8, b_{14}, b_{20} bezeichnet werden. Man hat also

$$\left.\begin{array}{ll} 8^h = x_1 = 0 & \alpha_1 = b_8 \\ 14^h = x_2 = \frac{\pi}{2} & \alpha_2 = b_{14} \\ 20^h = x_3 = \pi & \alpha_3 = b_{20} \\ \text{Minimum: Phase} = w & \text{Betrag} = \varepsilon \end{array}\right\} \qquad 403)$$

Die Formel 402) geht dann über in

$$u_o = \frac{b_8\,(1 + \cos^3 w - \sin^3 w) - 2\,b_{14} \sin^3 w + b_{20}\,(1 - \cos^3 w - \sin^3 w) - 2\,\varepsilon \cos 2\,w}{8 \sin^2 w \sin^2 \left(\frac{w}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \qquad 404)$$

Ich mache nochmals darauf aufmerksam, dass diese Formel unter Wahrung des Minimalcharakters von ε abgeleitet ist. Lässt man dagegen diesen Charakter fallen und sieht ε als eine gewöhnliche Beobachtung mit der Phase w an, so erhält man aus der Gleichung 61) mit Rücksicht auf 112), wonach für den zur Verwendung kommenden Werth U_2 die Bedingung gilt

$$U_2 = -\frac{1}{2}\,(x_1 + x_2 + x_3 + w) = -\frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{2} + w\right) \qquad 405)$$

als Mittelwerth

$$u_o = \frac{1}{8}\left(b_8\left(3 + \cot\frac{w}{2}\right) + 2\,b_{14} + b_{20}\left(3 + \tang\frac{w}{2}\right) - \frac{2\,\varepsilon}{\sin w}\right) \qquad 406)$$

In der Erkenntniss, dass die Termine 8^h, 14^h, 20^h allein sehr wenig zur Ableitung guter Tagesmittel, speziell für die Lufttemperatur, geeignet sind, hat Köppen*) den Vorschlag gemacht, die vom Wiener Kongress empfohlene Methode der Mittelbildung aus 8^h, 14^h, 20^h und Minimum anzunehmen, dem Minimum aber nicht das gleiche Gewicht, wie den übrigen Beobachtungen, sondern ein für jeden Ort und jeden Monat nach Vergleichspunkten zu bestimmendes kleineres Gewicht zu ertheilen. Die Köppen'sche Formel würde in meiner Bezeichnungsweise lauten

$$u_o = \frac{b_8 + b_{14} + b_{20} + k \,.\, \varepsilon}{3 + k} \qquad 407)$$

Ich muss zunächst hervorheben, dass der der Wahrscheinlichkeitsrechnung entlehnte Ausdruck „Gewicht" nicht auf die Koeffizienten passt, mit welchen die einzelnen Beobachtungswerthe in die Berechnung des Mittelwerths eingehen, da man unter „Gewicht" in der Wahrscheinlichkeitsrechnung den Faktor versteht, der als Maass für die Güte der einzelnen Beobachtungen dient. Alle in derselben Weise,

*) „Die Ableitung wahrer Tagesmittel der Temperatur aus den Beobachtungsstunden 8^h a. m., 2^h p. m. und 8^h p. m." Annalen d. Hydrographie u. marit. Meteorol. Jahrg. 1888.

an demselben Instrumente von demselben Beobachter unter denselben Umständen ausgeführten Beobachtungen müssen als von gleicher Güte, d. h. von gleichem „Gewichte“ angesehen werden. Wären die Beobachtungswerthe nur mit ihren „Gewichten“ zur Mittelbildung heranzuziehen, so müsste, da diese Gewichte im allgemeinen als gleich vorausgesetzt werden dürfen, als Periodenmittel immer nur das arithmetische Mittel aller innerhalb der Periode vorliegenden Werthe, unbekümmert um die zugehörigen Phasen, angesehen werden. Dass dies vollkommen unzulässig ist, braucht nicht weiter bewiesen zu werden. Nicht „Gewichte“, sondern numerische Koeffizienten, welche ihren Ursprung den einzelnen Phasenwerthen verdanken, sind es, mit welchen die Beobachtungswerthe bei der Berechnung von u_o behaftet erscheinen. Es ist eine Aufgabe der Theorie, diese numerischen Koeffizienten zu ermitteln; a priori lassen sich dieselben im allgemeinen nicht angeben.

Man ist daher durchaus nicht berechtigt, wie es in Formel 407) geschehen, von vorneherein den Beobachtungen b_8, b_{14} und b_{20} gleiche Koeffizienten 1 zu geben und von dem Koeffizienten des Minimalwerths ε zu behaupten, dass er kleiner als 1 sein müsse. Die wahren numerischen Koeffizienten sind durch die Formel 404), oder wenn man von der Minimumseigenschaft absieht, durch die Formel 406) gegeben, welche beide freilich die Kenntniss der Phase w für die Amplitude ε voraussetzen. Man erkennt indessen aus beiden Formeln, dass die Grössen b_8, b_{14}, b_{20} im allgemeinen durchaus verschiedene Koeffizienten erhalten, welches auch die Phase w sein mag. Die einzige Ausnahme bildet beide Male der Fall $w = -\frac{\pi}{2} \equiv 2^h$; hiermit liefern beide Formeln 404) und 406) das nämliche Resultat

$$u_o = \frac{b_8 + b_{14} + b_{20} + \varepsilon}{4} \qquad 408)$$

was einfach davon herrührt, dass dann ein System von aequidistanten Beobachtungen 2^h, 8^h, 14^h, 20^h vorliegt.

Die Köppen'sche Formel 407) ist daher als eine rein empirische anzusehen, welche nicht allein jeder theoretischen Begründung ermangelt, sondern auch in direktem Widerspruch zu den theoretischen Ergebnissen steht.

Dasselbe gilt von Köppen's a. a. O. gemachtem Versuch, ohne Benutzung des Minimums die Beobachtung um 14^h zur Tagesmittelbildung neben 8^h und 20^h zu verwerthen.

Die im Verlage der

Dorpater Naturforscher Gesellschaft

herausgegebenen Schriften werden zu nachstehend bezeichneten Preisen verkauft:

Archiv für die Naturkunde Liv-, Est- und Kurlands.

Serie I.

Bd. 1. Lief. 1 — 2 Mark = 1 Rbl., Lief. 2 — 1 Mark = 50 Kop., Lief. 3 — 3 Mark = 1 Rbl. 50 Kop. Der ganze Band 5 Mark 50 Pf. = 2 Rbl. 75 Kop.
Bd. 2. Lief. 1 — 2 Mark = 1 Rbl., Lief. 2 — 2 Mark = 1 Rbl., Lief. 3 — 6 Mark = 3 Rbl. Der ganze Band 9 Mark 20 Pf. = 4 Rbl. 60 Kop.
Bd. 3. Lief. 1 — 1 Mark 50 Pf. = 75 Kop., Lief. 2 — 2 Mark = 1 Rbl., Lief. 3 — 2 Mark = 1 Rbl., Lief. 4 — 1 Mark 50 Pf. = 75 Kop. Der ganze Band 6 Mark 50 Pf. = 3 Rbl. 25 Kop.
Bd. 4. Lief. 1 — 2 Mark = 1 Rbl., Lief. 2 — 5 Mark = 2 Rbl. 50 Kop. Der ganze Band 7 Mark = 3 Rbl. 50 Kop.
Bd. 5. Lief. 1 — 4 Mark = 2 Rbl., Lief. 2 — 2 Mark = 1 Rbl., Lief. 3 — 2 Mark = 1 Rbl., Lief. 4 — 2 Mark = 1 Rbl. Der ganze Band 9 Mark = 4 Rbl. 50 Kop.
Bd. 6. Lief. 1, 2 und 3 je 1 Mark 50 Pf. = 75 Kop. Der ganze Band 4 Mark = 2 Rbl.
Bd. 7. Lief. 1, 2, 3, 4 und 5 je 1 Mark 50 Pf. = 75 Kop. Der ganze Band 7 Mark = 3 Rbl. 50 Kop.
Bd. 8. Lief. 1 — 2 Mark = 1 Rbl., Lief. 2 — 2 Mark = 1 Rbl., Lief. 3 — 1 Mark = 50 Kop., Lief. 4 — 1 Mark 50 Pf. = 75 Kop. Der ganze Band 7 Mark = 3 Rbl. 50 Kop.
Bd. 1 bis 8 zusammen kosten 50 Mark = 25 Rbl.
Bd. 9. Lief. 1 und 2 je 2 Mark = 1 Rbl., Lief. 3 — 1 Mark = 50 Kop., Lief. 4 — 1 Mark = 50 Kop., Lief. 5 — 3 Mark = 1 Rbl. 50 Kop.

Serie II.

Bd. 1. Lief. 1 — 50 Pf. = 25 Kop., Lief. 2 — 1 Mark = 50 Kop., Lief. 3 — 1 Mark = 50 Kop., Lief. 4 — 50 Pf. = 25 Kop., Lief. 5 — 1 Mark = 50 Kop. Der ganze Band 4 Mark = 2 Rbl.
Bd. 2. cpl. — 4 Mark = 2 Rbl.
Bd. 3. cpl. — 3 Mark = 1 Rbl. 50 Kop.
Bd. 4. cpl. — 3 Mark = 1 Rbl. 50 Kop.
Bd. 5. cpl. — 20 Mark 50 Pf. = 10 Rbl 25 Kop.
Bd. 6. Lief. 1 — 4 Mark = 2 Rbl., Lief. 2 — 2 Mark = 1 Rbl. Der ganze Band 5 Mark 50 Pf. = 2 Rbl. 75 Kop.
Bd. 7. Lief. 1 — 2 Mark = 1 Rbl., Lief. 2 — 3 Mark = 1 Rbl. 50 Kop., Lief. 3 — 1 Mark = 50 Kop., Lief. 4 — 2 Mark = 1 Rbl. Der ganze Band 7 Mark 50 Pf. = 3 Rbl. 75 Kop.
Bd. 8. Lief. 1, 2, 3 und 4 je 2 Mark = 1 Rbl Der ganze Band 7 Mark 50 Pf. = 3 Rbl. 75 Kop.
Bd. 9. Lief. 1 — 4 Mark = 2 Rbl., Lief. 2 — 75 Pf. = 37 Kop., Lief. 3 — 2 Mark = 1 Rbl., Lief. 4 — 2 Mark = 1 Rbl., Lief. 5 — 4 Mark = 2 Rbl. Der ganze Band 8 Mark = 4 Rbl.
Bd. 10. Lief. 1 — 3 Mark = 1 Rbl. 50 Kop., Lief. 2 — 6 Mark = 3 Rbl.
Bd. 1 bis 9 zusammen 60 Mark = 30 Rbl.

Sitzungsberichte der Dorpater Naturforscher Gesellschaft.

Bd. 1, 2, 3 je 3 Mark = 1 Rbl. 50 Kop.
Bd. 4, 5, 6 je 4 Mark 50 Pf. = 2 Rbl. 25 Kop.
Bd. 7. Heft 1 und 2 je 2 Mark = 1 Rbl
Bd. 8. Heft 1, 2 und 3 je 2 Mark = 1 Rbl.
Bd. 9. Heft 1 — 2 Mark = 1 Rbl.
Bd. 1 bis 8 zusammen 30 Mark = 15 Rbl. Einzelne Hefte von Bd. 1 und 2 kosten 40 Pf. = 20 Kop., von Band 3 bis 6 — 1 Mark 50 Pf. = 75 Kop.

Schriften herausgegeben von der Naturforscher Gesellschaft bei der Universität Dorpat.

Nr. 1 1 Rbl. = 2 Mark.
Nr. 2 50 Kop. = 1 Mark.
Nr. 3 50 Kop. = 1 Mark.
Nr. 4 1 Rbl. = 2 Mark.
Nr. 5 1 Rbl. 50 Kop. = 3 Mark.
Die ganze Folge (Nr. 1 bis 5) kostet 4 Rbl. = 8 Mark.

Separatabzüge.

Berg (Graf), Spielarten der Fichte 2 Mark = 1 Rbl.
Böttcher, Ueber einen Blasenwurm 25 Pf = 12 Kop.
Braun, Dorpater Brunnenplanarien 2 Mark = 1 Rbl.
„ Physik u. biolog. Untersuchungen im westl. Theile des finnischen Meerbusens 3 Mark = 1 R. 50 K.
„ Land- und Süsswassermollusken der Ostseeprovinzen 2 Mark = 1 Rbl.
„ Rhabdocoelide Turbellarien Livlands 6 Mk. = 3 R.
Bruttan, Lichenen Liv-, Est- und Kurlands 3 Mark = 1 Rbl. 50 Kop.
Dietrich, Die Cryptogamenwelt der Ostseeprovinzen I. u. II zusammen 1 Mark = 50 Kop.
Dragendorff, Beiträge zur Pomologie 2 Mark = 1 Rbl.
Dybowski (Wl.), Monographie der Zoantharia I u. II zusammen 2 Mark 50 Pf. = 1 Rbl. 25 Kop.
Dybowski, Cyprinoiden Livlands nebst den europäischen Arten 2 Mark = 1 Rbl.
Eberhard, Der Meteorit von Sewrjukowo 50 Pf. = 25 Kop.
Flor, Rhynchoten Livlands Bd. I u. II à 3 Mark = 1 Rbl. 50 Kop.
Girgensohn, Uebersicht der Laub- u. Lebermoose 50 Pf. = 25 Kop
„ Naturgeschichte der Laub- u. Lebermoose 3 Mark = 1 Rbl. 50 Kop.
Glehn, Flora der Umgebung Dorpats 1 Mark = 50 Kop.
Goebel, Ueber den Meteorstein von Oesel 25 Pf. = 12 K.
„ Der heilsame Meeresschlamm auf Oesel 25 Pf. = 12 Kop.
„ Ueber graue u. gelbe Dolomite 80 Pf. = 40 Kop.
Grewingk, Geologische Karte Liv-, Est- und Kurlands 6 Mark = 3 Rbl.
„ Erläuterungen dazu 2 Mk. 50 Pf. = 1 R. 25 K.
„ Geologie des Mergellagers von Kunda 2 Mk.=1 R.
„ Ueber Hoplocrinus u. Baerocrinus 50 Pf. = 25 K.
„ Eisschiebungen am Wirzjärw-See 1 Mk. = 50 K.
„ Tertiärgebilde 1 Mark 50 Pf. = 75 Kop.
„ u. **Schmidt**, Meteoritenfälle in Liv- u. Kurland 2 Mark = 1 Rbl.
„ Nickelhaltiges Eisen von Sanarka 50 Pf. = 25 K.
„ Verzeichniss der Meteorite in der Sammlung des mineralog. Cabinets in Dorpat 10 Pf. = 5 Kop.
Grube, Die Arachnoiden Liv-, Kur- u. Estlands 2 Mark = 1 Rbl.
Gruner, Vegetationsverhältnisse des östl. Allentackens 25 Pf. = 12 Kop.
„ Flora von Allentacken u. Nordlivland 2 Mk. = 1 R.
Gulecke, Die Brunnen Dorpats 3 Mark = 1 R. 50 K.
Kämtz, Tägliche Wärme in Dorpat 25 Pf. = 12 Kop.
Klinge, Die Schachtelhalme Liv-, Est- und Kurlands 1 Mark 50 Pf. = 75 Kop.
Kuhlberg, Die Insel Pargas chem.-gnogn. unters. 1 Mark = 50 Kop.
„ Ueber Meteoriten 75 Pf. = 37 Kop.
Kupfer, Chemische Constitution balt. silurischer Schichten 1 Mark 50 Pf. = 75 Kop.
Lagorio, Mikroskopische Untersuchung ostbaltischer Gesteine 1 Mark 50 Pf. = 75 Kop.
Lehmann, Zur Kenntniss der Flora Kurlands 25 Pf.=12 K.
Lemberg, Ein unterdevonisch. Profil an der Bergstrasse in Dorpat 50 Pf. = 25 Kop.
„ Die Gebirgsarten der Insel Hochland I u. II je 1 Mark = 50 Kop.
Lieven, Anwendbarkeit der Dolomitthone zu Wassermörtel 25 Pf. = 12 Kop.
Mädler, Eisbedeckung des Embachs 20 Pf. = 10 Kop.
v. z. Mühlen, Neuropteren 50 Pf. = 25 Kop.
Nieszkowski, Die Trilobiten in den silur. Schichten 2 Mk. = 1 Rbl. Nachträge 1 Mk. = 50 Kop.
„ Eurypterus remipes 1 Mark 50 Pf. = 75 Kop.
v. Oettingen und **Weihrauch**, Meteorologische Beobachtungen Jahrg. 1866—1875 je 1 Mk. 50 Pf. = 75 K.
„ Phaenologische Beobachtungen 2 Mark = 1 Rbl.
Pacht, Der Devon-Kalk in Livland 25 Pf. = 12 Kop.
Pahnsch, Flora Estlands 1 Mark 50 Pf. = 75 Kop.
Paucker, Vermessung des Embachs 25 Pf. = 12 Kop.
Paulson, Zur chemisch. Kenntniss der Glasperlen alter livländischer Gräber 50 Pf. = 25 Kop.
Petzholdt, Das Torflager von Awandus 25 Pf. = 12 Kop.
„ Zur Naturgesch. der Torfmoore 25 Pf. = 12 Kop.
„ Ueber Färbung der grauen Dolomite 25 Pf.=12 K.
Plater-Sieberg, Der Meteorit von Lixna 25 Pf. = 12 K.
Rosen, Geogn. Verhältn. der devon. Formation der Düna- und Welikajathäler 2 Mark = 1 Rbl.
Russow (E.), Zur Kenntniss der Torfmoose 1 Mk. = 50 K.
„ Anatomie der Torfmoose 3 Mark = 1 R. 50 K.
„ Flora der Umgebung Revals 1 Mark = 50 Kop.
„ **(Val.)** Ornis Liv-, Est- u. Kurlands 4 Mk. = 2 R.
Sagemehl, Verzeichniss der Apiden Liv-, Est- u. Kurlands 50 Pf. = 25 Kop.
Sass, Die Phanerogamenflora Oesels 50 Pf. = 25 Kop.
„ Flora der Insel Runoe 25 Pf. = 12 Kop.
Schamarin, Chemische Untersuchung des Brandschiefers von Kuckers 1 Mark = 50 Kop.
Schmidt, (C.) Wasserversorgung Dorpats I und II je 2 Mark = 1 Rbl.
„ Devon. und silur. Thone Liv- u. Estlands 50 Pf. = 25 Kop.
„ Devon. Dolomitthone bei Dorpat 50 Pf. = 25 Kop.
„ Salzquellen von Staraja-Russa 50 Pf. = 25 Kop.
„ **(F.)** Flora der Insel Moon 50 Pf. = 25 Kop.
„ Flora des Silurbodens von Estland etc. 1 Mark = 50 Kop.
„ Untersuchung der silur. Formation Estlands, Nordlivl. u. Oesels 2 Mk. 25 Pf. = 1 Rbl. 12 Kop.
„ Geologie der Insel Gotland 1 Mark = 50 Kop.
„ **(A.)** Notizen über die Insel Runoe 25 Pf. = 12 K.
Schilling, Steinmeteorit von Tennasilm 50 Pf. = 25 Kop.
v. Schrenck, Das obere silur. Schichtensystem Liv- u. Estlands 1 Mark = 50 Kop.
Schroeder, Chemische Constitution des Frühjahrssaftes der Birke 50 Pf. = 25 Kop.
v. Seidlitz, Eisgänge an der Newa 25 Pf. = 12 Kop.
„ Generalnivellement Estlands 50 Pf. = 25 Kop.
„ Narowastrom u. Peipusbecken 25 Pf. = 12 Kop.
„ **(G.)** Fauna baltica, Käfer 20 Mark 50 Pf. = 10 Rbl. 25 Kop.
„ **(G.)** Fauna baltica, Fische 2 Mark = 1 Rbl.
Senff, Chemische Untersuchung altquartärer Geschiebelehme 25 Pf. = 12 Kop.
Sintenis, Schmetterlinge der Ostseeprovinzen 1 Mark 25 Pf. = 60 Kop.
„ Nachtrag I u. II je 25 Pf. = 12 Kop.
Sivers, Flussfahrt auf dem Embach 25 Pf. = 12 Kop.
Sommer, Der Rinne-Kalns 2 Mark = 1 Rbl.
Türstig, Entwickelung der primitiven Aorten 2 Mk. = 1 R.
Wahl, Süsswasserbivalven Livlands 1 Mark = 50 Kop.
Weihrauch, Anemometrische Skalen für Dorpat 1 Mark = 50 Kop.
„ Zehnjährige Mittel aus den meteorolog. Beobachtungen 80 Pf. = 40 Kop.
„ Zwanzigjährige Mittelwerthe für Dorpat 1 Mark = 50 Kop.
„ Die Bessel'sche Formel und deren Verwendung in der Meteorologie 2 Mark = 1 Rbl. Fortsetzung 3 Mark = 1 Rbl. 50 Kop.
Winkler, Flora baltica 2 Mark = 1 Rbl.
Verzeichniss der Zeitschriften in den Dorpater Bibliotheken 20 Pf. = 10 Kop.

An Sortimentsbuchhandlungen werden obige Schriften mit 25 % Rabatt abgegeben.

Commissionäre: **K. F. Köhler** in Leipzig, **Th. Hoppe** und **E. J. Karow** in Dorpat.

Schriften
herausgegeben von der Naturforscher-Gesellschaft
bei der Universität Dorpat.
VI.

Studien
über die
Schwingungsgesetze der Stimmgabel
und über die
electromagnetische Anregung.

Von
Friedrich Heerwagen
Magister der Physik.

Mit 2 lithographirten Tafeln.

Dorpat.
Druck von C. Mattiesen.
1890.
In Commission bei:
K. F. Koehler in Leipzig, Th. Hoppe und E. J. Karow in Dorpat.

Schriften
herausgegeben von der Naturforscher-Gesellschaft
bei der Universität Dorpat.
VI.

Studien
über die
Schwingungsgesetze der Stimmgabel
und über die
electromagnetische Anregung.

Von
Friedrich Heerwagen
Magister der Physik.

Mit 2 lithographirten Tafeln.

Dorpat.
Druck von C. Mattiesen.
1890.

In Commission bei:
K. F. Koehler in Leipzig, Th. Hoppe und E. J. Karow in Dorpat.

Дозволено цензурою. — Дерптъ, 23-го Августа 1890 года.

Einleitung.

Obschon die Stimmgabel wol das meistbenutzte Instrument der physikalischen Akustik ist, obschon ihre Schwingungen als hervorragendstes Beispiel reiner Sinusschwingungen angesehen werden, mangelt es doch zur Zeit noch immer an einer genauen Untersuchung ihrer Schwingungsgesetze, speciell der Dämpfung, der Abhängigkeit der Tonhöhe von der Amplitude, und des Verhaltens der Gabel bei electromagnetischer Anregung. Zwar die Methoden zur Bestimmung der Schwingungszahl sind, veranlasst zumeist durch die Bedürfnisse der Praxis, in den Jahren 1874—1884 in hohem Maasse ausgebildet worden [1], und Hand in Hand mit diesen Arbeiten ging auch die Untersuchung des Einflusses der Temperatur auf die Tonhöhe der Gabeln. Bei den meisten Arbeiten über Tonhöhe und Temperaturcoefficient ist keine Rücksicht genommen auf die Abhängigkeit der Tonhöhe von der Amplitude, obschon die Variation derselben bei den vorkommenden Amplituden die Fehlergrenze übersteigt. Für die Bedürfnisse der musikalischen Praxis freilich ist diese Variation in der That verschwindend klein; so kam es, dass das Vorhandensein derselben überhaupt erst nachgewiesen wurde, als Lissajous [2]) die nach ihm benannte Differentialmethode zur Vergleichung zweier Schwingungszahlen erfand. Lissajous beschränkte sich darauf zu constatiren, dass, wenn man eine Stimmgabel von sehr hoher Amplitude abschwingen lasse, mit der Abnahme der Amplitude eine geringe Zunahme der Schwingungszahl verbunden sei. Diese Angabe ist seither von verschiedenen Autoren bestätigt worden. Ueber die Art und Weise aber, wie die Schwingungszahl von der Amplitude abhängt, ich meine, welche Function der Amplitude die Schwingungszahl sei, darüber sind nur wenige, und nicht ganz übereinstimmende Angaben vorhanden.

1) Poske, Pogg. Ann. 152, 448. 1874. — A. Mayer, Americ. Journ. of Science. (3) 14, 512. 1877. Mem. of the U. S. Nat. Acad. Vol. III, 45. 1884. — R. Koenig, Wied. Ann. 9, 394. 1880. — M'Leod u. Clarke, Phil. Trans. 171, 1, 1. 1880. — Michelson, Americ. Journ. of Science (3) 25, 61. 1883.

2) Lissajous, Sur l'étude optique des mouvements vibratoires. Ann. chim. phys. (3) 51 147. 1857.

Für Transversalschwingungen von Stahlstäben, welche an einem Ende befestigt waren, hat F. Braun [1]) auf theoretischem Wege das Gesetz hergeleitet, die Schwingungszahl sei nur von den geraden Potenzen der Amplitude, vornehmlich vom Quadrate derselben, abhängig. Zugleich bringt Braun experimentelle Belege für die Richtigkeit dieser Behauptung. Freilich ist die Genauigkeit seiner Messungen nur gering. Für Stimmgabeln giebt Poske [2]) einige Beobachtungsreihen. Poske's Beobachtungsweise bestand in der optischen Vergleichung einer abschwingenden und einer constant erregten Gabel. Das Abschwingen geschah immer von nahezu der gleichen Anfangsamplitude ab, und die Art der Amplitudenabnahme wurde durch vorhergehende Versuche ermittelt. Poske selbst erklärt die Genauigkeit seiner Beobachtungen für mangelhaft; immerhin ist sein Schluss ausreichend bewiesen, dass die Tonänderung wesentlich von der ersten Potenz der Amplitude abhänge. Dagegen giebt Ettingshausen [3]) an, dass die Tonänderung dem Quadrate der Amplitude proportional sei. Ettingshausen vergleicht ebenfalls die zu untersuchende Gabel mit einer constant erregten, doch hat er leider genauere Bestimmungen nur bei selbstthätiger electromagnetischer Anregung der Versuchsgabel gemacht. Die verschiedenen Amplituden wurden erzeugt theils durch Veränderung der Elementenzahl, welche zum Betriebe der Gabel diente, theils durch Verstellung des Quecksilbernapfes der Gabel bei ungeänderter Stromquelle. Die Schwingungszahl einer frei schwingenden Gabel wird aber durch die electromagnetische Selbstanregung in complicirter Weise modificirt, sie ist abhängig nicht nur von der Amplitude der Gabel, sondern auch von der Stromstärke und der Stellung des Quecksilbernapfes. Dadurch verlieren die von Ettingshausen mitgetheilten Zahlen (p. 345) sehr an Werth. Trägt man zudem die von Ettingshausen beobachteten Schwingungszahlen und Amplituden in Coordinatenpapier ein, so lehrt schon der Anblick, dass auch ein lineares Glied in dem Ausdrucke für die Schwingungszahl vorhanden sein muss, welches bei den kleineren Amplituden das quadratische weit überwiegt. Eine graphische Darstellung von Ettingshausen's Beobachtungsreihe auf p. 362, welche an einer frei abschwingenden Gabel ausgeführt ist, zeigt ebenfalls einen erheblich von einer Geraden abweichenden Verlauf. Die von Ettingshausen angewandten Amplituden waren sehr gross, bis zu 11 *mm*, bei einer Ut_{-1} Gabel von 360 *mm* Zinkenlänge.

Ueber die Dämpfung der Stimmgabelschwingungen lagen bis zum J. 1883 nur gelegentliche Beobachtungen von Poske [4]) vor, welcher die Abnahme der Ampli-

1) F. Braun, Ueber elast. Schwing. deren Ampl. nicht z klein sind. Pogg. Ann. 151, 5 u. 250. 1874.

2) Poske, Ueber d. Bestimm. d. absoluten Schwingungszahl eines Tones u. d. Abhängigkeit d. Tonhöhe v. d. Amplitude. Pogg. Ann. 152, 448. 1874.

3) Ettingshausen, Ueber den stroboscopischen Stimmgabelapparat. Pogg. Ann. 156, 337. 1875.

4) Poske, Pogg. Ann. 152, 465. 1874.

tude maass, um hernach bei der Vergleichung der Tonhöhen einer abschwingenden und einer constant erregten Gabel, die zugehörigen Amplituden auffinden zu können. Für eine Lissajous'sche Microscopgabel fand Poske Constanz des logarithmischen Decrementes; für eine andere, unbelastete Gabel von ca. 220 Schwingungen giebt Poske eine Tabelle, welche eine sehr starke Zunahme des Decrementes mit der Amplitude aufweist. Von der kleinsten bis zur grössten beobachteten Amplitude verdoppelt sich das Decrement. Versucht man eine graphische Darstellung, so zeigt es sich, dass innerhalb der Fehlergrenzen das Decrement durch eine lineare Function der Amplitude dargestellt werden kann. Zu demselben Zwecke wie Poske hat auch Ettingshausen die Amplituden einer abschwingenden Gabel gemessen, und seine Resultate in Form einer Curve [1]) niedergelegt, ohne jedoch aus denselben die Decremente zu berechnen. Zwar sind die Einheiten der Amplitude und der Zeit für jene Curve nicht ausdrücklich angegeben, doch geht aus dem Vergleich der Curve mit den Col. I und II der Tabellen auf p. 362 und 363 hervor, dass die Einheit des Abscissenmaasstabes gleich 2 *sec*, die Einheit der Ordinate ein Scaltheil (= 0.745 *mm*) ist. Damit gründe ich auf Ettingshausen's Fig. 4 die folgende Tabelle:

Zu dem Amplituden-intervall	finde ich die Abscissendistanzen: gestrichelte Curve (Abschwingen in Luft)	usgezogene Curve (Contactstift in Hg)	$x = \frac{la_1 - la_2}{t_2 - t_1}$ Contactstift in Luft	Quecksilber	Mittlere Amplitude.
12—6	4.9 = 9.8 *sec.*	4.4 = 8.8 *sec.*	0.071	0.079	9
10—5	4.5 = 9.0	4.7 = 9.4	77	74	7.5
8—4	5.2 = 10.4	5.8 = 11.6	67	60	6
6—3	6.6 = 13.2	7.0 = 14.0	53	50	4.5
4—2	7.7 = 15.4	7.6 = 15.2	45	46	3

Man sieht, dass auch hier ein wenigstens annähernd geradliniger Verlauf des Decrementes stattfindet. Die Decremente beider Reihen steigen aber erst langsamer, dann rascher an, bei der grössten Amplitude wieder langsamer. Col. II liefert sogar eine Umkehr.

Wead [2]) machte die Dämpfung der Stimmgabelschwingungen zum Gegenstande einer besonderen Abhandlung. Letztere wurde mir jedoch erst bekannt, nachdem meine eigenen Untersuchungen über den vorliegenden Gegenstand bereits zu einem gewissen Abschlusse gekommen waren (1885). Wead brachte ein wenig Antimonpulver auf das Zinkenende der zu untersuchenden Gabel, und maass die Amplituden

1) Pogg. Ann. 156, Taf. III, Fig. 4.

2) Wead, The Energy and Coefficient of Damping of a Tuning Fork. Americ. Journ. of Science. (3) 26. 177. 1883.

mit Microscop und Ocularmicrometer. Zur Zeitmessung diente „a stop watch", deren Zählwerk durch Druck auf einen Knopf ein- und ausgeschaltet werden konnte, sie gab Achtelsecunden an. Die Gabeln wurden mit einem Bogen angestrichen, und es wurde die Zeit beobachtet, in welcher die Amplitude von z' auf z'' sinkt. Dann ist das doppelte Decrement $x = 2\,(\log.\ \text{nat}\ z' - \log.\ \text{nat}\ z'')/t$. Jedes derartige Intervall wurde mehrere Male beobachtet. Nach einem mitgetheilten Beispiele zu urtheilen, sind die Beobachtungsfehler recht bedeutend, bis zu $^1/_2$ *sec.* weichen bei einem Intervall von 10 *sec.* ($z' = 12$, $z'' = 6$) die Zahlen vom Mittel ab. Wead ist erstaunt über das unerwartete Resultat, dass x so stark mit der Amplitude variirt, doch es zeigen alle die von ihm untersuchten 6 Gabeln (von Ut_2 bis Ut_5) dasselbe Verhalten. Die Beobachtungen lassen sich sehr gut durch Formeln darstellen, wenn man setzt

$$x = a + b\,\frac{z' + z''}{2}$$

Um nun aus dieser Formel und der Gleichung $z = Ae^{-\frac{1}{2}xt}$ die Amplituden für irgend eine Zeit t zu erhalten, benutzt Wead ein Verfahren successiver Annäherung. Er meint, x könne nicht als einfache Funktion der Zeit dargestellt werden. Wir werden jedoch späterhin sehen, dass dies sehr wohl möglich ist. Wead bemerkte auch, dass das Decrement in hohem Grade von der Art der Befestigung der Gabel abhängig sei. Ja sogar bei gleicher Montirung kamen beträchtliche Differenzen vor.

In neuster Zeit untersuchte noch L. Jacobson [1]) die Abnahme der Schwingungsamplituden bei ausklingenden Stimmgabeln. Er liess die Gabel mittelst einer Schreibspitze auf einem mit berusstem Papier überzogenen rotirenden Cylinder ihre Schwingungscurve aufzeichnen, und maass letztere mit Microscop und Ocularmicrometer aus. Die Decremente nahmen mit abnehmender Amplitude zu. Andere Versuche, bei denen die Gabel auf einem schwach berussten blank polirten Cylinder schrieb, ergaben Constanz des Decrementes bei kleinen Amplituden. Diese Versuche können nicht als einwurfsfrei betrachtet werden, denn es ist unstatthaft, ein neues Bewegungshinderniss von unbekannter Wirkung einzuführen, wenn man die Dämpfung studiren will. Dieser Einwand trifft nicht die Versuche Stefanini's [2]), welcher die Amplituden photographisch registrirte. Stefanini findet, dass Amplitude a und Zeit t nicht durch das bekannte Gesetz $a = a_0 e^{-\alpha t}$ verknüpft seien, sondern dass man setzen müsse $a = a_0 e^{-\alpha t^m}$, wo m ein Exponent, welcher zwischen 0.94 und 0.84 liegt. Die Originalarbeit ist mir leider nicht zugänglich gewesen, daher ich auch nicht weiss, wie weit der Autor Geltung für diese Formel beansprucht. Denn sobald α und a_0 als unabhängige Constanten betrachtet werden sollen, wie es doch den Anschein hat, so statuirt dieselbe eine höchst merkwürdige Abhängigkeit

1) L. Jacobson, Archiv f. Physiologie, 1887, 476.
2) Stefanini, Beibl. 13, 871. 1889. Aus Atti. R. Acc. Lucchese 25, 307. 1889.

des Decrementes von der Anfangsamplitude. Bei Torsionsschwingungen von Drähten ist freilich ein geringer Einfluss der Anfangsamplitude auf die Decremente beobachtet worden [1]), doch Stefanini's Formel besagt: Das anfängliche Decrement ist beim Abschwingen von jeder beliebigen Anfangsamplitude immer dasselbe. Ich selbst habe, veranlasst durch die angeführten Arbeiten von Schmidt und Braun u. Kurz, 1885 nach einer Abhängigkeit der Stimmgabeldecremente von der Anfangsamplitude gesucht, jedoch war eine solche überhaupt nicht nachzuweisen. Ich kann mir Stefanini's Formel nur erklären, wenn der Autor stets mit derselben Anfangsamplitude experimentirt hat, und auch dann scheint die Zweckmässigkeit der Formel fraglich zu sein.

Was nun weiter das Verhalten der Stimmgabeln bei electromagnetischer Anregung betrifft, so wird allgemein angenommen, dass dasselbe Lord Rayleigh's [2]) Theorie befolge. Rayleigh setzt, wie üblich, die Bewegungsgleichung der Stimmgabel in folgender Form an:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\,\varkappa\frac{dx}{dt} + 4\,\pi^2 m^2 x = 0 \qquad 1)$$

Das Integral dieser Gleichung ist

$$x = Ae^{-\varkappa t}\cos\left(\sqrt{4\,\pi^2 m^2 - \varkappa^2}\,.\,t - \gamma\right) \qquad 2)$$

Wirkt auf die Stimmgabelzinken eine periodische Kraft, so wird die Differentialgleichung der erzwungenen Schwingung:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\,\varkappa\frac{dx}{dt} + 4\,\pi^2 m^2 x = J\cos 2\,\pi n t \qquad 3)$$

Das vollständige Integral dieser Gleichung ist:

$$x = Ae^{-\varkappa t}\cos\left(\sqrt{4\,\pi^2 m^2 - \varkappa^2}\,.\,t - \gamma\right) + \frac{J\sin\varepsilon}{4\,\pi n\varkappa}\cos(2\,\pi n t - \varepsilon) \qquad 4)$$

$$\text{wo}\quad tang\,\varepsilon = \frac{n\varkappa}{\pi(m^2 - n^2)} \qquad 5)$$

Das erste Glied hat die Periode $\sqrt{4\,\pi^2 m^2 - \varkappa^2}$, das zweite hat die Periode $2\,\pi n$. Mit der Zeit verschwindet das erste Glied, wegen des Factors $e^{-\varkappa t}$, und die Stimmgabel geräth in einen Zustand stationärer Schwingungen, welcher ausgedrückt ist durch

$$x = \frac{J\sin\varepsilon}{4\,\pi n\varkappa}\cos(2\,\pi n t - \varepsilon) \qquad 6)$$

1) Schmidt, Wied. Ann. 2, 241. 1877. — W. Braun u. A. Kurz, Rep. d. Phys. 17, 244. 1881.

2) Rayleigh, Theory of Sound. I, Cap. 3. London 1877.

Die Schwingungen der Gabel haben mit dem Verlaufe der Kraft einen Phasenunterschied ε, welcher von Null bis zu einer halben Periode sich erstrecken kann. Die Phasendifferenz liegt zwischen 0 und 90°, so lange $m - n > 0$, zwischen 90° und 180°, wenn $m - n < 0$; für $m = n$ wird die Phasendifferenz gleich 90°, und alsdann wird die Amplitude der erzwungenen Schwingung ein Maximum. Dieses Maximum tritt also ein, wenn die Periode der Kraft mit der Periode übereinstimmt, in welcher die Stimmgabel schwingen würde, wenn keine Dämpfung da wäre. Die Maximalamplitude ist um so grösser, je geringer die Dämpfung ist. Andrerseits muss bei kleinerer Dämpfung auch die Differenz $m^2 - n^2$ kleiner gemacht werden, wenn derselbe Bruchtheil der Maximalamplitude erreicht werden soll. Die Uebereinstimmung dieser Theorie der erzwungenen Schwingungen mit der Erfahrung ist in den gröbsten Zügen schon von Mach [1]) nachgewiesen worden. Später haben Ettingshausen [2]) und Laske [3]) durch genaue Messungen an schwingenden Magneten die Uebereinstimmung von Theorie und Experiment dargethan. Das logarithmische Decrement änderte sich bei diesen Versuchen nicht mit der Amplitude, und die Schwingungsdauer war ebenfalls fast völlig constant, so dass die Aenderung derselben mit der Amplitude die Beobachtungsfehler kaum überstieg. Da somit die freien Schwingungen nach der Differentialgleichung 1) vor sich gingen, konnte auch kein anderes Resultat erwartet werden. Mit der Anwendung der Theorie auf die Stimmgabel steht es anders. Da die Dämpfung ihrer Schwingungen nur klein ist, wird man erwarten müssen, dass die Abhängigkeit der Schwingungszahl von der Amplitude sich schon sehr bemerklich machen wird. Denn aus Gl. 6 folgt

$$tan\, \varepsilon = \frac{x}{2\pi(m-n)\left(1+\frac{m-n}{2n}\right)} \qquad 7)$$

Also ist die Differenz der Schwingungszahlen m und n für die Phasendifferenz maassgebend. Ferner zeigt es sich, dass die Decremente bei der Stimmgabel durchaus nicht constant sind, sondern in hohem Maasse von der Amplitude abhängen. Endlich ist die Kraftwirkung eines intermittirenden Stromes, welcher eine Stimmgabel in Bewegung setzt, kein einfacher Cosinus der Zeit. Zwar findet Rayleigh es zulässig, ihn als solchen zu betrachten [4]). Aber gerade hierin liegt ein Mangel seiner Theorie, wie meine Beobachtungen zeigen werden.

---

1) Mach, Zur Theorie der Pulswellenzeichner. Wien. Ber. 46. 157. 1862. — Ueber die Gesetze des Mitschwingens. Wien. Ber. 47. 33. 1863.

2) Ettingshausen, Messungen über das Mitschwingen. Wien. Ber. 79. 215. 1879. od. Rep. d. Phys. 15, 489. 1879.

3) Laske, Messungen üb. d. Mitschwingen f. d. Fall starker Dämpfung. Wien. Ber. 82, 1011. 1880.

4) „When an intermittent current is sent through the wire, a periodic force acts upon the fork. This force is not expressible by a simple cirular function; but may be expanded by Fourier's theorem in a series of such functions, having periods τ, $\frac{1}{2}\tau$, $\frac{1}{3}\tau$, &c. If any of these, of not too

Ueber die erzwungenen Stimmgabelschwingungen liegen Versuche von La Cour[1]) vor, welche beweisen, dass die Phasen der durch einen intermittirenden Strom in Bewegung gesetzten Gabel bei starker Verstimmung derselben um 90° nach beiden Seiten, je nach dem Vorzeichen der Verstimmung, von jener Phase abweichen, in welcher die Gabel bei geringster Verstimmung zugleich mit der grössten Amplitude schwingt. Ausserdem hat La Cour sich experimentell davon überzeugt, dass in der That die Periode der erzwungenen Schwingung identisch mit der Periode der Kraft ist.

Die Resultate der Theorie sind von Ettingshausen[2]) dazu benutzt worden, um Schlüsse auf die Verzögerung des Magnetismus in den Stimmgabel-Electromagneten gegenüber dem erregenden Strome zu machen. Setzt man, wie Ettingshausen dies thut, die Anwendbarkeit jener einfachen Theorie auf die electromagnetische Stimmgabel voraus, so gelangt man aber bei näherer Betrachtung der experimentellen Ergebnisse zu Widersprüchen. Um dies nachzuweisen, muss ich etwas näher auf jene Arbeiten Ettingshausen's eingehen, soweit sie hier für uns von Interesse sind. In einer Versuchsreihe werden dort in den Stromkreis einer selbstthätigen electromagnetischen Stimmgabel die Electromagnete einer zweiten Gabel eingeschaltet. Versetzt man die erstere Gabel — nennen wir sie die primäre — in Schwingungen, so geräth die zweite, secundäre Gabel ebenfalls in Bewegung. Durch sorgfältiges Abstimmen wird die Amplitude der secundären Gabel zu einem Maximum gemacht, und es wird Folgendes beobachtet: Sei durch die punctirte Curve $ss's''$, Fig. 1, welche der Einfachheit wegen als Sinuscurve gezeichnet ist, der periodische Verlauf des Stromes, welcher die Electromagnete erregt, dargestellt, so stellt die ausgezogene Curve $ss's''$ die gleichzeitige Bewegung der oberen Stimmgabelzinke der primären Gabel dar. Die obere Zinke der secundären Gabel beschreibt dann eine Curve $pp'p''$, welche eine gewisse Phasendifferenz sp/ss'' gegen die erste Curve hat. Das maximale Mitschwingen der secundären Gabel trat ein, wenn $sp/ss'' = 0{\cdot}070$ war. Die benutzten Gabeln machten 32 Schwingungen pro Secunde. Da nun, schliesst der Autor, nach Helmholtz[3]) für das Maximum des Mitschwingens die Phasendifferenz zwischen Kraft und Bewegung 90° beträgt, so ist die magnetische Kraft, welche auf die Gabel wirkt, durch die Curve qq' darzustellen, wenn $pq = {}^1/_4\, pp''$ ist. Der Grad der Verstimmung, bei welchem das maximale Mit-

small amplitude, be nearly isochronous with the fork, the latter will be caused to vibrate; otherwise the effect is insignificant. In what follows we will suppose that it is the complete period τ which nearly agrees with that of the fork, and consequently regard the series expressing the periodic force as reduced to its first term. In order to obtain the maximum vibration, the fork must be carefully tuned by a small sliding piece or by wax, until its natural period (without friction) is equal to that of the force." (Theory of Sound, I, pag. 56).

1) La Cour, Das phonische Rad. Deutsch von Kareis. Leipzig 1880.

2) Ettingshausen, Pogg. Ann. 156, 337. 1875. — Pogg. Ann. 159, 51. 1876.

3) Tonempfindungen, p. 609.

schwingen eintrat, wurde in der Weise ermittelt, dass man jede der Gabeln für sich mit einem Strome, welcher an dem Rheometer den gleichen Ausschlagswinkel hervorrief, wie der früher durch die Electromagnete beider Gabeln geschickte Strom, selbstthätig betrieb, und nun die Dauer der stroboscopischen Schwingung einer Gabel, durch die andere betrachtet, bestimmte. Das Maximum des Mitschwingens trat bei den Gabeln Ut_{-1} ($n = 32$) dann ein, wenn die primäre in der Secunde etwa $^1/_{50}$ Schwingung mehr machte, als die secundäre. Ausserdem wurde die Schwingungsamplitude der jetzt selbstthätigen Gabel gemessen, und mit jener verglichen, welche beim Mitschwingen beobachtet war. Die Amplitude der mitgenommenen Gabel war im Allgemeinen etwas kleiner, als für den Fall der selbstthätigen Unterbrechung bei gleicher Stromintensität. Das Verhältniss beider Amplituden war im Mittel 0·94; in einigen Fällen gelang es, die Amplitude der mitgenommenen Gabel gleich oder sogar ein wenig grösser zu bekommen. Wurde die mitgenommene Gabel merklich weniger, oder aber stärker verstimmt, so war die Intensität des Mitschwingens erheblich schwächer, während gleichzeitig der Phasenunterschied der beiden Gabeln sich rasch änderte. Als die Amplitude der stark verstimmten mitgenommenen Gabel nur etwa $^1/_5$ von jener betrug, welche sie beim stärksten Mitschwingen angenommen hatte, war der Phasenunterschied $sp/ss' = 0·25$. Fast die gleichen Zahlen findet Ettingshausen auch für Gabeln von 64 und 128 Schwingungen. Erstere ergaben $sp/ss' = 0·091$, das Amplitudenverhältniss war 0·87, die günstigste Verstimmung war $^1/_{20}$ Schwingung, um welche die secundäre Gabel tiefer gestimmt sein musste. Aenderte man die Verstimmung, so nahm die Amplitude der mitgenommenen Gabel ab, während die Phasendifferenz rasch grösser wurde, und bei sehr schwachem Mitschwingen nahe den Werth 0·22 annahm. Bei den Gabeln von 128 Schwingungen war die Phasendifferenz $sp/ss' = 0·124$, die Amplitude der mitgenommenen Gabel meist grösser als die der selbstthätigen. In derselben Arbeit untersucht Ettingshausen auch, ob durch die selbstthätige electromagnetische Anregung die Schwingungszahl einer Stimmgabel sich ändert, und findet an einer Ut_{-1}-Gabel, dass für kleine Amplituden die Schwingungszahl der electromagnetischen Gabel grösser, für grössere Amplituden aber kleiner ist, als die Schwingungszahl der mit gleicher Amplitude frei schwingenden Gabel. Zum Schluss weist der Autor noch darauf hin, dass für den Mechanismus der Selbstanregung die Verzögerung des Magnetismus wesentlich sei, bringt dies aber nicht mit der Theorie der erzwungenen Schwingungen in Verbindung. In der zweiten Arbeit bestimmt Ettingshausen dieselben „Phasendifferenzen bei der Maximalamplitude" zu 0·115 für die Ut_{-1}-Gabel, zu 0·086 für die Ut_1-Gabel. Diese Versuche unterschieden sich von den früheren dadurch, dass die Zinken der mitschwingenden Stimmgabel kräftig magnetisirt waren.

Rayleigh hat die Theorie der erzwungenen Schwingungen auch auf die selbstthätige electromagnetische Stimmgabel angewendet. Wenn die auf die Gabel wirkende Kraft nur von der Stellung jener abhinge — davon, ob der Strom geschlossen oder geöffnet ist — so würde die bei dem Durchgange durch eine Lage

geleistete Arbeit wieder verbraucht, so dass nach einer vollständigen Periode nichts übrig wäre, wodurch die Wirkung der reibenden Kräfte compensirt werden könnte. Zwei Ursachen aber verzögern die magnetische Kraft. Erstens wird der Strom nicht in dem Augenblicke geschlossen, in welchem die Gabel ihre Ruhelage passirt, sondern der Contact zwischen Stift und Quecksilber wird erst nach Verlauf einer gewissen Zeit vollkommen; ebenso wird, wenn der Stift das Quecksilber verlässt, der Contact durch Adhäsion eines Quecksilberfadens verlängert. Zweitens aber braucht der Selbstinduction wegen der Magnetismus eines Electromagnetes eine gewisse Zeit sowohl zum Entstehen, als auch zum Vergehen. Diese beiden Gründe verzögern die Kraft der Electromagnete hinter jener, welche nur der Stellung der Gabel allein entsprechen würde. Wenn die magnetische Kraft nur von der Lage der Gabel abhinge, so müsste die Phase ihrer ersten harmonischen Componente als um 180° vor der Phase der eigenen Schwingung der Gabel voraus angesetzt werden. Die erwähnte Verzögerung vermindert diesen Vorsprung. Daher weicht auch die wirkliche Tonhöhe n der selbstthätigen electromagnetischen Gabel von der natürlichen Tonhöhe m derselben innerhalb eines nicht unbedeutenden Bereiches ab, entsprechend der Gleichung 7:

$$tan\,\varepsilon = \frac{x}{2\pi(m-n)\left(1+\frac{m-n}{2n}\right)}$$

ε ist in diesem Falle eine vorgeschriebene Phasendifferenz, welche von der Natur des Contactes und der Art des zeitlichen Verlaufes des Magnetismus in den Electromagneten abhängt.

Soweit geht Rayleigh auf diese Frage ein. Liegt also die Verzögerung des Magnetismus φ zwischen 0 und 90°, so ist $tan\,\varepsilon$ negativ, da $\varepsilon = 180° - \varphi$. Also ist auch $m - n < 0$, das heisst: Die Schwingungszahl n der selbstthätigen electromagnetischen Gabel ist grösser, als die Schwingungszahl derselben Gabel, wenn sie nur unter dem Einflusse ihrer elastischen Kräfte schwingt. Ist dagegen die Verzögerung $\varphi > 90°$, so ist $tan\,\varepsilon > 0$, $m > n$, d. h.: Die selbstthätige electromagnetische Anregung vermindert in diesem Falle die Schwingungszahl der Gabel.

Ettingshausen hat, wie referirt, bei kleinen Amplituden eine Tonerhöhung, bei grossen eine Tonerniedrigung durch die electromagnetische Anregung gefunden. Daraus wäre zu schliessen, dass bei kleinen Amplituden, also bei schwachen Strömen, die Verzögerung des Magnetismus zwischen 0 und 90°, bei starken Strömen zwischen 90 und 180° liegt. Vergleichen wir mit letzterem das Ergebniss, welches aus den Beobachtungen erzwungener Schwingungen hergeleitet wurde, so findet Uebereinstimmung statt. Denn grosse Stromstärken kamen zur Anwendung, und die Verzögerung betrug über 90°, nämlich $90° + sp/ss'' \cdot 360$. Für schwächere Ströme ist aber die Verzögerung nicht direct bestimmt worden, so dass hier die Controle fehlt.

Gegen eine Verzögerung des Magnetismus, welche grösser als 90° ist, sprechen

aber andere Gründe. Beetz[1]) hat eine Reihe sehr sorgfältiger Versuche über den zeitlichen Verlauf des Magnetismus in Eisenkernen angestellt. Darnach nimmt beim Oeffnen des magnetisirenden Stromes auch der Magnetismus eines massiven Eisenkernes sehr rasch ab. Das Anwachsen des Magnetismus beim Stromschluss geht erst langsam, dann rascher vor sich; schliesslich nähert sich der Magnetismus asymptotisch seinem Grenzwerthe. Die absoluten Zeiten, welche Beetz angiebt, sind für uns von geringer Bedeutung, da dieselben in nicht näher bekannter Weise von den Dimensionen der Electromagnete abhängen. Wichtig ist für uns insbesondere das steile Abfallen des Magnetismus nach Oeffnung des Stromes. Wenn es auch unbekannt ist, an welchem Puncte der ansteigenden Curve die Unterbrechung eintritt, so sieht man doch soviel, dass jedenfalls der grössere Theil der magnetischen Kraft vor der Unterbrechung wirksam ist. In einem ganz extremen Falle würde der Verlauf der magnetischen Intensität innerhalb einer Periode nach den Versuchen von Beetz etwa der in Fig. 2 dargestellte sein. Die punctirte Fortsetzung der linken Grenzcurve giebt den Verlauf an, wie er bei bleibendem Stromschluss stattfinden würde. Denkt man sich nun diese Curve nach Fourier's Satz in eine Sinusreihe entwickelt, und zieht blos das erste periodische Glied in Betracht, so würde man die gestrichelte Sinuslinie erhalten. Auf die Phase derselben kommt es uns hier allein an, und ich meine man sieht leicht ein, dass das Maximum dieser Welle in jedem Falle zeitlich vor der Oeffnung des Stromes liegen muss, auch im extremsten Falle der Verzögerung. Denn wir wissen durch Beetz, dass die Curve der Abnahme des Magnetismus immer eine sehr viel steilere ist, als die des Anwachsens.

Pflichtet man diesen Ausführungen bei, so folgt daraus, dass die Verzögerung des Magnetismus immer weniger als ein viertel Phase, d. i. also weniger als 90° betragen muss. Als gegentheilige Thatsache können die Schlüsse, welche Ettingshausen aus den Beobachtungen der Phasendifferenz bei erzwungenen Maximalamplituden zieht, nicht angeführt werden. Einmal liegt bei Ettingshausen's Beobachtungsverfahren die Möglichkeit vor, dass die Phasendifferenz sp/ss' in der That negativ war, und nur durch ein Versehen positiv angenommen wurde. Wichtiger aber ist der Einwand, dass die mitgenommene Gabel wol gar nicht das Maximum der Amplitude hatte. Setzt man überhaupt die Giltigkeit der Theorie voraus — und das kann man in dieser Frage — so muss vielmehr die Beobachtung, dass bei selbstthätiger Anregung die Amplitude der Gabel grösser wurde als bei der erzwungenen Schwingung mit gleicher Stromstärke, zu dem Schlusse führen, dass bei den erzwungenen Schwingungen, welche zur Beobachtung gelangten, die Phase der Kraft noch ungünstiger war, d. h. mehr von 90° abwich, als bei der selbstthätigen Anregung. Ferner, die Phasendifferenz zwischen magnetischer Kraft und erzwungener Schwingung bewegt sich nach der Theorie zwischen den Grenzen 0 und 180°. Die Grenzwerthe treten ein, wenn die eigene Schwingungszahl der mitgenommenen Gabel

1) Beetz, Pogg. Ann. 105, 497. 1858.

beträchtlich grösser, resp. kleiner ist. als die der Kraft. Ettingshausen beobachtete in einem Falle, wo das Mitschwingen bereits sehr schwach war, wo also die Grenze fast ganz erreicht sein musste, die Phasendifferenz $sp/ss' = 0{\cdot}22$, während für die Maximalamplitude 0·091 gefunden wurde. Hieraus glaube ich schliessen zu können, dass in der That die Verzögerung nur den Betrag $0{\cdot}22 = 79^0$ erreicht hat. Wenn somit das Vorkommen von Verzögerungen grösser als 90° in gewissem Grade unwahrscheinlich ist, so entsteht die neue Frage, wie denn die bei grossen Amplituden von Ettingshausen beobachtete Tonerniedrigung durch selbstthätige electromagnetische Anregung zu erklären sei, welche doch nach Rayleigh's Theorie auf eine Verzögerung grösser als 90° schliessen lässt. Ich glaube auf Grund meiner Versuche weiterhin eine befriedigende Antwort hierauf geben zu können.

Noch in einem Puncte berührt Ettingshausen die Theorie der erzwungenen Schwingungen. Dieselbe lehrte, dass das Maximum des Mitschwingens eintrete, wenn $m = n$ sei. Dann ist die Schwingungszahl der secundären Gabel

$$m' = \sqrt{n^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}, \tag{8}$$

also kleiner als n. Ettingshausen findet, dass seine Gabeln Maximalamplituden erreichen, wenn sie: Ut_{-1} um $^1/_{50}$, Ut_1 um $^1/_{20}$ Schwingung tiefer gestimmt waren, als die primäre Gabel. Das Vorzeichen ist richtig, und somit wird eine Bestätigung der Theorie hierin erblickt. Orientiren wir uns aber über den Betrag der Verstimmung, welchen die Theorie verlangt! Da x sehr klein gegen n, hat man $m' = n - x^2/8\pi^2 n$, und die Verstimmung wird

$$\triangle_n = \frac{x^2}{8\pi^2 n} \tag{9}$$

Auf p. 5 habe ich die x für Ettingshausen's Ut_{-1}-Gabel berechnet. Der grösste Werth der Tabelle, $x = 0{\cdot}08$ gehörte zur mittleren Amplitude $a = 9$. Die Amplitude des Mitschwingens ist nicht angegeben, doch mag sie noch so gross gewesen sein; man verzehnfache jenes x, und die theoretische Verstimmung ist immer noch kleiner, als die Beobachtungsfehler der Messungen. Eine Bestätigung der Theorie findet also hier nicht statt, doch werden die beobachteten Verstimmungen dadurch ausreichend erklärt, dass sie für die selbstthätig und mit grösserer Amplitude schwingende secundäre Gabel gelten, während doch die Messung an der frei abschwingenden Gabel bei einer Amplitude gleich der der erzwungenen Schwingung hätte angestellt werden müssen. Die nachstehenden Zahlen, berechnet aus Gl. 9, mögen zum Beweise des Gesagten dienen; sie zeigen, wie gering der Einfluss der Dämpfung auf die Eigenperiode der Stimmgabeln ist.

Wenn $x =$	0·1	0·2	0·4	0·6	0·8	1·0	Verstimmung, beob. von Ettingshausen
sinkt die Ampl. auf $^1/_{10}$ in	sec 23·0	11·5	5·8	3·8	2·9	2·3	
und es ist $10^3 \triangle_{32} =$	0·004	0·016	0·063	0·142	0·253	0·396	20
$10^3 \triangle_{64} =$	0·002	0·008	0·032	0·071	0·127	0·198	50

So gering ist der Einfluss, dass man es als völlig nutzlos bezeichnen muss, wollte man denselben überhaupt beachten und in Rechnung setzen. Die Decremente, für welche obige Tabelle berechnet ist, sind ganz ausserordentlich gross für eine Stimmgabel; um dies der Vorstellung zugänglich zu machen, habe ich in die Tabelle die Zeiten aufgenommen, welche bei jedem x die Amplitude braucht, um auf $1/_{10}$ ihres Anfangswerthes zu sinken. Zur Zählung der Schwebungen, welche eine solche Gabel mit einer constant erregten Vergleichsgabel macht, oder zur Bestimmung der stroboscopischen Schwingungsdauer $\theta = 1/m - n$ beider Gabeln ist kaum ein grösseres Intervall brauchbar, als das in der Tabelle angeführte. Es ist aber ganz unmöglich, in 2·3 Secunden die Differenz zweier Schwingungszahlen auf 0·4 Tausendstel Schwingung genau festzustellen, und noch weniger ist in 23 *sec* eine Bestimmung auf 4 Milliontel möglich. Die Tonänderungen $\triangle_n$ sind Grössen, welche allemal weit unter der Fehlergrenze auch der subtilsten Messungen liegen, und sie liegen um so weiter, je geringer die Dämpfung ist. Die Abhängigkeit der Tonhöhe von der Amplitude zumal setzt allen Bestrebungen, welche auf Nachweis der Grösse $\triangle_n$ gerichtet sind, ein Ziel. Die Amplitudenänderung $\triangle a$, welche einer Tonänderung $\triangle_n$ entspricht, ist in allen Fällen so gering, dass selbst eine 10 und 100 fache Verfeinerung der Messinstrumente dieselbe kaum aufdecken würde. Man muss daher immer, auch bei den allergenausten Versuchen, die Schwingungszahlen m' und m als identisch betrachten, und dies wird im Folgenden stets der Fall sein.

Eigene Versuche.

Meine Untersuchungen gliedern sich vornehmlich in 2 Abschnitte. Sie haben zum Gegenstande erstens die frei schwingende Stimmgabel, und behandeln deren Dämpfung und die Abhängigkeit der Tonhöhe von der Amplitude. Zweitens suchte ich zu entscheiden, wie weit man berechtigt sei, Rayleigh's Theorie der erzwungenen Schwingungen (vgl. oben p. 7) auf die electromagnetische Stimmgabel anzuwenden. Hierzu untersuchte ich zunächst, ob die beiden Constanten, welche in Rayleigh's Formeln auftreten, ob Decrement und freie Schwingungszahl nicht durch die Einwirkung des Electromagnetes Veränderungen unterworfen würden, welche bisher unbeachtet geblieben. Ich erregte den Electromagnet der secundären Gabel durch constante Ströme, und fand in der That erhebliche Aenderungen im Verhalten der Gabel. Dann endlich untersuchte ich Phasen und Amplituden erzwungener Schwingungen, in welche die secundäre Gabel versetzt wurde.

Auch zeitlich zerfallen meine Versuche in 2 getrennte Gruppen. Ein Theil derselben wurde im Jahre 1885, ein anderer Theil 1890 angestellt. Die Fragen des zweiten Abschnittes habe ich zwar auch i. J. 1885 bereits untersucht, doch nicht mit der erforderlichen Vollständigkeit und Genauigkeit. Auf den Resultaten

jener Untersuchung fussend, stellte ich 1890 neue wohl vorbereitete Versuche an, nach einer Verbesserung des Apparates. Diese sind es, welche vornehmlich im zweiten Abschnitte beschrieben werden sollen. Die Apparate waren bei den neueren Versuchen nicht ganz dieselben wie bei den älteren, doch stimmte die Versuchsanordnung in allen wesentlichen Puncten überein.

Die von mir untersuchten Stimmgabeln entnahm ich einem grossen, von R. Koenig in Paris gearbeiteten Satze electromagnetischer Gabeln, welche mit verstellbaren Laufgewichten versehen waren. Zur Beobachtung der Schwingungen diente das Lissajous'sche Verfahren. Jede Gabel trug an dem Ende einer Zinke einen Spiegel, dessen Gewicht durch den Contactstift und Zusatzstücke an der anderen Zinke genau aequilibrirt war. Die Gabeln waren in schweren eisernen Gestellen festgeschraubt, die eine Gabel, G_{I}, konnte in verticaler, die andere, G_{II}, in horizontaler Ebene schwingen. An der Wand des Zimmers waren — vgl. Fig. 3 — 4 Consolen C_{I}, C_{II}, C_{III}, C_{IV} befestigt, von diesen trug C_{II} die horizontal schwingende Gabel G_{II}. G_{I} stand auf einem massiven eichenen Tische, welcher fest auf dem cementirten Fussboden ruhte. Eine feine Oeffnung im Schirme D wurde (vermittelst eines Spiegelchens) von der Lampe L beleuchtet, das Licht wurde vom Spiegel der Gabel I reflectirt, fiel auf den Spiegel von G_{II}, und gelangte nach nochmaliger Reflexion in das Fernrohr F, welches seinen Platz auf C_{I} hatte. Das Fernrohr war mit einem Ocularmicrometer versehen, bestehend aus einer dünnen Glasplatte, in welche ein feines Coordinatennetz geritzt war. Ein Schirm T schützte G_{II} vor einer Erwärmung durch die Lampe. Letztere konnte nicht direct hinter das Diaphragma D gestellt werden, weil dann die aufsteigende warme Luft die Beobachtung des Galvanometers G, welches in der Ecke auf der Console C_{III} stand, unmöglich machte. Später (1890) setzte ich D und L zusammen auf einen starken Dreifuss an den mit B bezeichneten Ort, und stellte die Gabeln wie in der schematischen Fig. 4. Bei richtiger Justirung erscheint im Fernrohre genau im Nullpuncte des Coordinatennetzes eine hell leuchtende, scharf begrenzte, runde Scheibe, deren Durchmesser fast 0·1 beträgt, in Theilen des Ocularmicrometers. Ich fand, dass bei dieser Grösse des Bildchens die Beobachtungen am sichersten waren. Schwingt G_{I} allein, so erscheint im Fernrohre eine verticale Lichtlinie, welche genau mit der y-Axe des Micrometers coincidiren muss. G_{II} allein giebt eine Linie, welche mit der x-Axe zusammenfällt. Auf diese Justirungen habe ich stets die allerhöchste Sorgfalt verwendet.

Sind die beiden Gabeln in Ruhe, so sind L_{I} und L_{II} in Fig. 4 die virtuellen Bilder des leuchtenden Punctes L, erzeugt von den Spiegeln S_{I} und S_{II}. Das Objectivglas O des Fernrohres F entwirft endlich bei B in der Ebene des Micrometers ein reelles Bild, welches mit dem Ocular beobachtet wird. Schwingt eine der Gabeln, G_{II} etwa, so wird bei einer Elongation des Zinkenendes gleich e das virtuelle Bild L_{II} nach L_{II}' verschoben sein, und zwar ist, wie aus der Fig. 4 ersichtlich,

$$L_{II} L_{II}' = 2\alpha (d_1 + d_2) \qquad 10)$$

wenn α der Winkel ist, um welchen sich bei der Elongation e der Spiegel gedreht hat [1]). Bezeichnet f die Brennweite des Fernrohrobjectives, so ist die Verschiebung des reellen Bildchens

$$B\,B' = L_{11}\,L_{11}' \cdot \frac{f}{d_1 + d_2 + d_3 - f} = \frac{2\alpha\,(d_1 + d_2)\,f}{d_1 + d_2 + d_3 - f} \tag{11}$$

Auf 1 *mm* gingen 4·412 Theile des Micrometers, also entspricht einer Winkelamplitude α der Stimmgabel G_{11} in Theilen des Micrometers die Amplitude

$$a = \alpha\,\frac{8{\cdot}824\,(d_1 + d_2)\cdot f}{d_1 + d_2 + d_3 - f} \tag{12}$$

Die Brennweite des Beobachtungsfernrohres war $f = 455$ *mm*, also ist

$$a = \alpha\,\frac{4015\,(d_1 + d_2)}{d_1 + d_2 + d_3 - f} \tag{13}$$

und der Bogenwerth eines Theilstriches ist in Graden

$$\frac{\alpha^0}{a} = \frac{d_1 + d_2 + d_3 - f}{4015\,(d_1 + d_2)} \cdot \frac{180^0}{\pi} = \frac{d_1 + d_2 + d_3 - f}{70{\cdot}08\,(d_1 + d_2)} \tag{14}$$

Ebenso ist für G_1

$$\frac{\beta^0}{b} = \frac{d_1 + d_2 + d_3 - f}{70{\cdot}08\,d_1} \tag{15}$$

Diese Formeln gelten in gleicher Weise für die beiden in den Figg. 3 und 4 skizzirten Anordnungen der Apparate. Bei den Versuchen v. J. 1885 war

$$\beta^0 = 0{\cdot}0371\,b \qquad \text{und}\ \alpha^0 = 0{\cdot}0315\,a,$$

1890 dagegen war

$$\beta^0 = 0{\cdot}0302\,b \qquad \text{und}\ \alpha^0 = 0{\cdot}0265\,a.$$

Schwingen nun beide Gabeln, so wird der Lichtpunct im Fernrohre zu einer Linie ausgezogen. Die Bewegung der horizontalen Componente sei gegeben durch

$$x = a\,.\cos\,(2\pi mt - \psi), \tag{16}$$

1) Ist die Länge der Stimmgabelzinke gleich l, so ist $\alpha = \frac{e}{c.\ l}$, wo c ein echter Bruch ist. Für einen prismatischen Stab, welcher an einem Ende festgeklemmt ist, giebt **Rayleigh** (Theory of Sound § 179) die Gleichung der Schwingungscurve an. Aus dieser Gleichung folgt $c = 0{\cdot}726$. Besondere Versuche, welche ich an einer Stimmgabel von 327 *mm* Zinkenlänge anstellte, um mich von der Proportionalität der Grössen α und e bei verschiedenen Amplituden zu überzeugen, ergaben mir $c = 0{\cdot}70$, in genügender Uebereinstimmung mit dem theoretischen Werthe.

die der verticalen Componente durch

$$y = b \cdot \cos 2\pi n t \qquad 17)$$

Ist $m = n$, so erhält man durch Elimination von t die Gleichung der von dem Lichtpuncte durchlaufenen Linie:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cdot \cos \phi = \sin^2 \phi \qquad 18)$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse. Dieselbe geht für $\phi = 0$ und $\phi = 180^0$ in eine gerade Doppellinie über, denn es wird dann

$$\left(\frac{x}{a} \mp \frac{y}{b}\right)^2 = 0 \qquad 19)$$

Stimmen m und n nicht genau überein, so kann die resultirende Bahncurve des Lichtpunctes aufgefasst werden als Ellipse mit veränderlicher Phasendifferenz. Die Zeit, in welcher die Ellipse sämmtliche Phasendifferenzen von 0 bis 360° durchläuft, nenne ich mit Ettingshausen die „stroboscopische Schwingungsdauer" der Gabeln gegen einander, und bezeichne diese Grösse mit θ. Zwischen den Schwingungszahlen der Gabeln besteht dann die Relation

$$m - n = \frac{1}{\theta} \qquad 20)$$

Durch Registriren der Zeitmomente, in welchen die Phasendifferenz 0 oder 180°, wo also die Ellipse in eine gerade Linie übergeht, kann θ sehr genau bestimmt werden. Jene Zeiten nenne ich die Umkehrzeiten der Ellipse.

Zu den Zeitbestimmungen diente mir ein astronomischer Registrirapparat, von Fuess in Berlin gearbeitet. Derselbe bestand aus 2 Morse-Schreibern, welche neben einander montirt waren, und auf demselben Papierstreifen ihre Marken verzeichneten. Ein Uhrwerk bewegte das Papier mit einer mittleren Geschwindigkeit von 1 *cm.* pro Secunde vorwärts. Eine Pendeluhr mit Quecksilbercompensation bewirkte jede Secunde einen vorübergehenden Stromschluss, durch welchen der eine Morse-Schreiber in Thätigkeit gesetzt wurde. Den Tasterschlüssel zum zweiten Schreiber hielt ich bei den Beobachtungen in der Hand. Die registrirten Zeitpunkte konnten hernach mittelst eines Micrometers auf Zehntelsecunden genau abgelesen werden, die Hundertstel waren noch bequem zu schätzen.

Die vertical schwingende Gabel G_I diente mir als Vergleichsgabel, durch electromagnetische Selbstanregung hielt ich sie auf constanter Amplitude. Der Contactstift war an der unteren Zinke befestigt, und berührte stets in der Ruhelage gerade das Quecksilberniveau. Der Electromagnet befand sich zwischen den Zinken der Gabel. Die untere Zinke trug auf einem isolirenden Hartgummiplättchen noch

einen zweiten Unterbrecher, bestehend aus einem gebogenen Kupferdraht, dessen beide Enden in *Hg*-Näpfe tauchten. Die Näpfe waren durch Hartgummi von ihrem Halter isolirt. Die Quecksilberhöhen wurden so regulirt, dass der längere Schenkel des Drahtes stets in das *Hg* eintauchte, der kürzere aber, welcher mit einer Platinspitze versehen war, in der Ruhelage das *Hg* gerade berührte. Die richtige Stellung erkennt man am besten daran, dass schon beim leisesten Anschlagen der Gabel der Unterbrecher wirken muss. Zu einem Napfe dieser Vorrichtung führte vom Elemente E die Leitung — Fig. 3*a* — vom anderen Napfe ging dieselbe weiter zum Electromagnet der zweiten Gabel. Dann führte dieselbe an der Wand zurück zu einem bequemen Quecksilberschlüssel S, welcher auf C_I befestigt war, und von diesem durch einen einfachen Rheostat wieder zum Elemente E. Auch die Stromleitung der selbstthätigen G_I enthielt einen solchen Schlüssel und Rheostat, welche in der Zeichnung fortgelassen sind, um Ueberfüllung zu vermeiden. Befindet sich nun G_I in Thätigkeit, und schliesst man den zweiten Stromkreis, so wird durch den beschriebenen Unterbrecher ein intermittirender Strom hergestellt, welcher den Electromagnet von G_{II} erregt in einer Periode, welche mit der Periode der selbstthätigen Gabel I vollkommen identisch ist. Eine Reaction des secundären Stromkreises auf den Gang der selbstthätigen primären Gabel ist hierbei vollständig ausgeschlossen. Dies war bei Ettingshausen's Versuchen nicht der Fall, wo der Electromagnet von G einfach in den Stromkreis von G_I eingeschaltet wurde. Sind G_I und G_{II} nahe gleich gestimmt, so wird G_{II} in ergiebige Mitschwingungen versetzt, denen man durch passende Wahl der Stromstärke eine beliebig hohe Amplitude ertheilen kann. Diese Art der Anregung ist zugleich äusserst geeignet zum Studium der freien Schwingungen von G_{II}. Im geeigneten Moment wird der Strom geöffnet, die Gabel schwingt ab, und man kann Dämpfung und stroboscopische Schwingungsdauer gegen G_I untersuchen.

Zur Messung der Stromstärken in den beiden Kreisen diente ein Spiegelgalvanometer, welches im Nebenschluss eingeschaltet werden konnte. Die eine Zweigleitung ist in Fig. 3*b* angedeutet. Die Drähte führen zu einem Doppelcommutator, Fig. 5, und sind dort mit G_I + und —, resp. mit G_{II} + und — in Verbindung. Zwei Drähte D_1 und D_2, an welche die Galvanometerleitung angeschlossen ist, sind mit je einem Napfe jedes Commutators verbunden. Zwei Kupferbügel, von einem Ebonitbrettchen mit Glasgriff getragen, gestatten eine beliebige Leitung durchs Galvanometer zu schliessen, zu commutiren, zu öffnen. Ob die Zweigleitungen geöffnet sind, oder nicht, hat auf die Stromstärke im Hauptstrome keinerlei merklichen Einfluss. Die Aenderung konnte höchstens 1—2 Millionstel der gesamten Stromstärke ausmachen.

Das Galvanometer stand auf der Console C_{III}, Fig. 3*a*. 1885 benutzte ich ein aperiodisches Galvanometer von Edelmann, 1890 ein solches von Hartmann & Braun. Das Ablesefernrohr mit der Scala befand sich auf einer Console C_{IV}, Fig. 3*b*. C_{III} und C_{IV} waren in solcher Höhe angebracht, dass ich, von

meinem Platze vor *F* aufstehend, bequem das Galvanometer ablesen, und zugleich den Commutator handhaben konnte, welcher neben dem Ablesefernrohr stand. Um den Einfluss der Stimmgabelelectromagnete auf das Galvanometer zu vermindern, verstärkte ich durch einen permanenten Magnet die Richtkraft des Erdmagnetismus. Bei der stärksten Erregung der Electromagnete änderte sich die Ruhelage höchstens um 0·3 Scaltheile. Die Aenderung der Richtkraft, welche allein Fehler in der Strommessung veranlassen kann, war also gewiss zu vernachlässigen. Der Reductionsfactor des Galvanometers war für Messungen an beiden Stromkreisen stets auf die gleiche Grösse gebracht, und betrug

1890 : 100 Scaltheile Doppelausschlag = 0·609 Ampère
1885 : „ = 1·05 „

Als primäre und secundäre Gabel benutzte ich 1885 die beiden grössten Gabeln des Koenig'schen Bestecks. Die grösste, Zinkenlänge 385 *mm*, Theilung für die Laufgewichte von 64 bis 92 *v. s.*, benutzte ich als secundäre Gabel. Zuerst hielt ich die Laufgewichte am Ende der Theilung, nahe dem Stiel, später entfernte ich dieselben ganz. In diesem Zustande bestimmte ich die Schwingungszahl der freien Gabel bei kleiner Amplitude zu $n = 46{\cdot}57$ Ganzschwingungen pro Secunde. Die nächste Gabel, Zinkenlänge 327 *mm*, Theilung für die Laufgewichte von 91—128 *v. s.*, benutzte ich als primäre Gabel. Die Laufgewichte standen sehr nahe an den Zinkenenden, hatten aber nach beiden Seiten Spielraum für Verstimmungen von einigen Zehntelschwingungen gegen G_{II}.

1890 diente die grosse Gabel, Laufgewichte nahe den Enden, als G_I, und als G_{II} eine gleiche Gabel, welche neuerdings von Koenig bezogen war. Die Laufgewichte dieser Gabel standen genau auf 64 *v. s.* Ich hatte den Spiegel durch ein Zusatzstück genau auf dasselbe Gewicht gebracht, welches der Messingknopf besass, welcher vom Fabrikanten in die für den Spiegel bestimmte Bohrung eingeschraubt war. Es war also die Schwingungszahl $n = 32$. Dass die Theilung bis auf wenige Hundertstel richtig war, davon hatte ich mich durch optische Vergleichungen der neuen Gabel mit der alten überzeugt — letztere ohne Laufgewichte, gerade so wie 1885 montirt.

I. Die Dämpfung der Stimmgabelschwingungen und die Abhängigkeit der Tonhöhe von der Amplitude.

Die Untersuchung der Tonhöhen einer abschwingenden Gabel erfordert die Kenntniss der Amplitude als Function der Zeit. Die Theorie, welche von der linearen Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\,\varkappa\,\frac{dx}{dt} + 4\,\pi^2 m^2 x = 0 \qquad 1)$$

ausgeht, lehrt, dass die jeweilige Amplitude gefunden werde aus der Gleichung

$$a = Ae^{-\varkappa t} \qquad 21)$$

A, die Anfangsamplitude zur Zeit $t = 0$, kann jedesmal beobachtet werden. $\varkappa$, das auf die Zeiteinheit bezogene logarithmische Decrement, oder Decrement schlechtweg, kann vorher bestimmt werden. Sind 2 Amplituden a_1 und a_2 zu den Zeiten t_1 und t_2 beobachtet, so findet man:

$$\varkappa = \frac{la_1 - la_2}{t_2 - t_1} \qquad 22)$$

$\varkappa$ ist nach dieser Theorie eine von der Amplitude unabhängige Constante.

Zur Bestimmung des Decrements verfuhr ich folgendermaassen. Während die Stimmgabel von einer grossen Amplitude abschwang, registrirte ich die Zeitmomente, in welchen die Amplitude ganzzahlige Werthe hatte. Anfangs führte ich dies in der Art aus, dass ich die zu untersuchende Gabel sich selbstthätig electromagnetisch anregen liess, und den Strom unterbrach, sobald eine passend grosse Amplitude erreicht war. Der „leuchtende Punct" im Fernrohre hatte, wie erwähnt, einen Durchmesser von etwa 0·1, in Theilen des Ocularmicrometers. Die Bisection dieses Scheibchens durch einen Coordinatenstrich liess sich mit ausgezeichneter Schärfe beobachten. Die Lichtlinie, oder das Lichtband, um die Erscheinung richtiger zu bezeichnen, welche man im Fernrohre erblickt, ist nämlich nicht von gleichmässiger Helligkeit. Entsprechend der Geschwindigkeit, welche die Gabelzinke an jeder Stelle besitzt, ist, wenn nur eine Gabel schwingt, in der Mitte die Lichtstärke am schwächsten, an den Enden aber ist die runde Oeffnung des Diaphragma's vollkommen scharf begrenzt zu erblicken. Wenn also ein Theilstrich des Micrometers die Mitte dieses kleinen Kreises durchschnitt, notirte ich mittelst des Tasterschlüssels, welchen ich in der Hand hatte, den Zeitmoment auf dem Papierstreifen des Registrirapparates.

Bei meinen ersten Versuchen über die Dämpfung war die Schwingungszahl von G_{I} $n = 45{\cdot}0$. Die grosse Gabel G_{II} trug noch die Laufgewichte, nahe dem Stiel, ihre Schwingungszahl war $n = 45{\cdot}2$. Auch G_{II} hatte ich in einer verticalen Schwingungsebene montirt, um die Selbstanregung mit Quecksilbercontact benutzen zu können. Jede Gabel liess ich 4 Mal abschwingen, und registrirte 2 Mal die Durchgänge der Amplitude indem ich das obere Ende der Lichtlinie in's Auge fasste, 2 Mal indem ich das untere Ende beobachtete. Nimmt man die Mittel aus den Durchgangszeiten, so ist ein etwaiger geringer Fehler in der Einstellung der Ruhelage auf den Nullpunct eliminirt. Da der Anfangspunct der Zeitzählung für die Bestimmung der Decremente keine Bedeutung hat, so zählte ich bei jeder Beobachtungsreihe die Zeit von demjenigen Secundenpuncte des Registrirpapieres, welcher unmittelbar vor der ersten notirten Amplitude lag.

Tab. I giebt für die beiden Gabeln die beobachteten Amplituden und die Mittelwerthe der zugehörigen Zeiten. Col. 3 und 7 enthalten die Decremente von einer Amplitude zur nächsten.

Tab. I. (4/V 1885).

G_I				G_{II}			
b[1])	t	$10^3 x$ beobachtet	$10^3 x$ berechnet	a[1])	t	$10^3 x$ beobachtet	Diff.
	sec				sec		
13	0·48			8	0·91		
		19·0	18·8			124	
12	4·70			7	1·99		9
		18·1	18·1			115	
11	9·50			6	3·33		6
		17·3	17·4			109	
10	15·01			5	5·01		4
		16·9	16·7			105	
9	21·25			4	7·13		10
		15·8	16·0			95	
8	28·71			3	10·16		17
		14·8	15·3			78	
7	37·74			2	15·35		
		14·7	14·6				
6	48·20						
		14·0	13·9				
5	61·25						
0			10·0				

Man vergegenwärtige sich, auf welchen Grad von Genauigkeit diese Decremente Anspruch erheben können. Es ist

$$x = \frac{la_1 - la_2}{t_2 - t_1} = \frac{l(a_2 + 1) - la_2}{t_2 - t_1}.$$

Also in erster Annäherung $x = 1/a_2 (t_2 - t_1)$. Findet das Abschwingen langsam statt, wie bei G_I, so ist die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers $\pm \triangle a$ beim Registriren der Amplitudendurchgänge für alle Amplituden gleich zu setzen. Diese Fehler wirken auf x vornehmlich in der Weise, dass der Zähler 1 im obigen Bruche einen wahrscheinlichen Fehler $\pm \triangle a \cdot \sqrt{2}$ erhält. Bei einem grösseren Decremente, wie G_{II} es aufweist, sind die Beobachtungen der grösseren Amplituden wesentlich ungenauer, als die der kleineren, es werden die Decremente noch unsicherer.

In obiger Tabelle fällt vor allen Dingen auf die starke Zunahme der Decremente mit der Amplitude. Trägt man die Decremente von G_I als Ordinaten auf zu den mittleren Amplituden als Abscissen, so zeigt sich derselbe ausgesprochen geradlinige Verlauf, welchen wir schon bei P o s k e 's und W e a d 's Beobachtungen kennen lernten. Die einer Geraden entsprechenden Werthe von x habe ich der obigen Tabelle in Col. 4 beigefügt. Die grösseren Amplituden der G_{II} liessen wegen ihrer raschen Abnahme keine einigermassen genauen Beobachtungen zu. Der relative

1) Bei diesen Beobachtungen war noch nicht die definitive Aufstellung vorhanden. Die Umrechnungsfactoren der Amplituden auf Bögen waren hier für G_I : $\frac{\beta^0}{b} = 0·0353$; für G_{II} : $\frac{\alpha^0}{a} = 0·0305$.

(procentische) Fehler ihrer Decremente ist daher grösser, als dies bei G_I der Fall war. Der Verlauf der entsprechenden Curve ist aus den beigefügten Differenzen ersichtlich. Es wird kaum gestattet sein, die Beobachtungen durch eine lineare Interpolationsformel darzustellen.

Was nun die absoluten Werthe anlangt, so sind die für G_{II} gefundenen Decremente ungefähr 8 Mal so gross, wie die von G_I bei gleichen Amplituden. Für G_I folgt aus der Geraden der Grenzwerth $x_0 = 0{\cdot}010$. Ich wiederhole, dass G_I die Laufgewichte ganz am Ende der Zinken trug, während G_{II} ziemlich auf ihren höchsten Ton gestellt war, um eine Gleichheit der Schwingungszahlen beider Gabeln zu erreichen. Spätere Versuche erst haben mich erkennen lassen, dass diese Stellung der Laufgewichte die Ursache der grossen Dämpfung der G_{II} war. Doch davon später.

Zunächst ging aus den Resultaten dieser beiden Beobachtungsreihen die Nothwendigkeit hervor, die Giltigkeit der linearen Formel für die Decremente in strengerer Weise zu prüfen. Auch Wead hatte das Gesetz aufgestellt $x = x_0\ (1 + \alpha \cdot a)$, aber er vermochte nicht, a als Function der Zeit explicite darzustellen. Doch ist dies Problem schon vor Jahren von Gronau[1]) behandelt worden, und O. E. Meyer[2]) hat Gronau's Gesetz für die Abnahme der Schwingungsweiten von Pendeln bestätigt gefunden.

Dem einfachen Dämpfungsgesetze

$$a = A\, e^{-xt} \qquad 21)$$

gehört die Differentialgleichung zu

$$\frac{da}{dt} = -\, xt \qquad 23)$$

Gronau setzt $x_0\ (1 + \alpha a)$ für x ein, verlangt also eine lineare Abhängigkeit des Decrementes von der Amplitude. Die neue Differentialgleichung

$$\frac{da}{dt} = -\, x_0 a\, (1 + \alpha a) \qquad 24)$$

liefert das Integral

$$C - x_0 t = l \frac{a}{1 + \alpha a} \qquad 25)$$

$$e^C\, e^{-x_0 t} = \frac{a}{1 + \alpha a} \qquad 26)$$

Wenn für $t = 0$ $a = A$, so ist

$$e^C = \frac{A}{1 + \alpha A} = B \qquad 27)$$

1) Gronau, Ueber die Bewegung schwingender Körper im widerstehenden Mittel. Gymnasialprogramm, Danzig 1850. War mir trotz vielfacher Bemühungen nicht zugänglich.

2) O. E. Meyer, Pendelbeobachtungen. Pogg. Ann. 142, 481. 1871.

Wir werden später die beiden Formen der Constanten, B und $C = log\ nat\ B$ gebrauchen. Aus

$$Be^{-x_0 t} = \frac{a}{1 + \alpha a} \tag{28)}$$

folgt

$$a = \frac{Be^{-x_0 t}}{1 - \alpha Be^{-x_0 t}} \tag{29)}$$

Wir sahen, dass bei geringer Dämpfung jeder Beobachtung von a der gleiche wahrscheinliche Fehler zukomme. Will man nach der oben entwickelten Formel a als Function von t nach der Methode der kleinsten Quadrate darstellen, so ist die Summe der auszuführenden Rechnungen kaum zu überwältigen. Die Einführung von Näherungswerthen für die 3 Constanten B, x_0, α, die darauf folgende Berechnung der Coefficienten für die wahrscheinlichsten Correctionen jener Näherungswerthe verursacht schon so viel Rechnung bis zur blossen Aufstellung der Correlatengleichungen, dass ich dies Verfahren nach einmaliger Anwendung fallen liess. Im Hinblick darauf, dass die Bestimmungen der Dämpfung zugleich den Zweck hatten, zur Prüfung der Theorie erzwungener Mitschwingungen zu dienen, war aber eine möglichst genaue Kenntniss der ins Spiel tretenden Constanten durchaus erforderlich. Auch war es aus demselben Grunde wichtig, die wahrscheinlichen Fehler der berechneten Constanten kennen zu lernen, welche nur bei Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate erhalten werden.

Indem ich von Gl. 25 statt von Gl. 29 ausging, ist es mir gelungen, die Methode der kleinsten Quadrate in aller Strenge auf meine Beobachtungen anzuwenden, und zugleich eine grosse Vereinfachung der Rechnungen zu erzielen. Wir hatten

$$C - x_0 t = la - l(1 + \alpha a) \tag{25)}$$

Hat die Beobachtung von a einen Fehler $\triangle$, so sind Beobachtungen und wahrscheinlichste Werthe von C, x_0, α, verbunden durch solche Gleichungen:

$$C - x_0 t = la + \frac{\triangle}{a} - l(1 + \alpha a) - \frac{\alpha \triangle}{1 + \alpha a} \tag{30)}$$

$$C = x_0 t + l \frac{a}{1 + \alpha a} + \frac{\triangle}{a + \alpha a^2} \tag{31)}$$

Liegen nun für die Constanten Näherungswerthe vor: C', x_0', α', und bezeichnen wir deren wahrscheinlichste Correctionen mit C'', x_0'', α'', so folgt aus obiger Gleichung, unter Vernachlässigung höherer Potenzen der Correctionen:

$$C' + C'' = x_0' t + x_0'' t + l \frac{a}{1 + \alpha' a} - \frac{\alpha'' a}{1 + \alpha' a} + \frac{\triangle}{a + \alpha' a^2} \tag{32)}$$

$$C'' - x_0'' t + \frac{a}{1 + \alpha' a} \alpha'' = x_0' t + l \frac{a}{1 + \alpha' a} - C' + \frac{\triangle}{a + \alpha' a^2} \tag{33)}$$

Der Rest, welcher nach Einführung der Näherungswerthe in Gl. 25 verbleibt, ist

$$x_0' t + l \frac{a}{1 + \alpha' a} - C = N \qquad 34)$$

Endlich ist

$$(a + \alpha' a^2) \cdot C'' - (a + \alpha' a^2) t \cdot x'' + a^2 \cdot \alpha'' = (a + \alpha' a^2) N + \triangle \qquad 35)$$

Durch Ausgleichung dieser Correlaten erhält man also direct die Fehler $\triangle$ der beobachteten Amplituden. Der Vortheil, welchen dieses Verfahren für die numerische Rechnung bietet, liegt darin, dass die beobachteten Amplituden stets kleine ganze Zahlen sind, zwischen 1 und 16. Hierdurch wird die Aufstellung der nöthigen Coefficienten wesentlich vereinfacht. la und $l(1 + \alpha' a)$ konnte ich stets ohne Interpolation einer Tafel der natürlichen Logarithmen entnehmen. Von anderweitigen Rechnungshilfsmitteln haben mir namentlich Crelle's Multiplicationstafeln, sowie vielfach auch die Thomas'sche Rechenmaschine die besten Dienste geleistet. Ich will noch erwähnen, dass ich die Coefficienten in den Correlatengleichungen stets dreiziffrig nahm, um zu den Productbildungen die Crelle'schen Tafeln benutzen zu können. Controlrechnungen habe ich überall angestellt, wo sich nur die Möglichkeit für solche darbot.

Ich kehre zu meinen Versuchen zurück. Am 31/V 85 machte ich in der gleichen Weise, wie vorhin beschrieben, abermalige Beobachtungen der G_1. Die Gabel war in der Zwischenzeit aus dem Gestelle herausgenommen, und wol nicht genau ebenso wie früher festgeschraubt worden. Wenigstens kann man keine andere Erklärung dafür geben, dass die Decremente in Tab. II so sehr viel grösser sind, als die früheren in Tab. I.

Tab. II. (31/V 1885).

Beob. G_1		$10^3 x$	$100 . \triangle a$	
b	t			
	sec			$10^3 x_0 = 18{\cdot}09$
				± 19
12	0·00		− 1·11	
		29·8		
11	2·92		+ 0·69	$a = 0{\cdot}05362$
		28·0		
10	6·32		− 0·24	± 182
		27·9		
9	10·10		+ 1·61	
		26·2		
8	14·59		+ 0·98	$B = 7{\cdot}292$
		25·0		
7	19·93		− 0·55	
		24·4		
6	26·24		− 0·38	
		22·9		ε[1]) $= \pm 0{\cdot}0158$
5	34·20		− 2·35	
		22·7		
4	44·02		− 0·77	$r = \pm 0{\cdot}0107$
		22·2		
3	56·95		+ 2·34	

1) Ich bezeichne durchweg: Mittlerer / Wahrscheinlicher Fehler einer Beobachtung mit $\varepsilon = \pm$ / $r = \pm$

Auf diese Beobachtungsreihe wendete ich die Meth. d. kl. Quadr. an in der zuerst erwähnten Weise — von Gl. 29 ausgehend; das Resultat ist in der Tabelle aufgeführt. Der Gang der Fehler von $a = 7$ abwärts fällt zwar auf, ist aber zu klein, um auf eine Abweichung von Gronau's Gesetz schliessen zu lassen.

Als secundäre, mitschwingende, Gabel sollte späterhin die grosse Stimmgabel benutzt werden, es musste also speciell für diese die Dämpfung genauer studirt werden. Die Gabel musste dabei in horizontaler Ebene schwingen, konnte also nicht in gewöhnlicher Weise in selbstthätige Schwingungen versetzt werden. Die Platincontacte, welche für diesen Fall der Montirung der Gabel beigegeben sind, setzen den Schwingungen einen neuen, beträchtlichen Widerstand entgegen. Ich machte einige Versuche, bei welchen ich die Gabel in dieser Weise anregte, fand aber die Dämpfung so gross, dass die Beobachtung der grösseren Amplituden ganz unmöglich wurde. Darauf stellte ich eine Selbstanregung der Gabel her, indem ich einen dickeren Platindraht statt des ursprünglichen Contactstiftes an der Gabelzinke befestigte, und den Quecksilbernapf so anschraubte, dass der Draht gerade über ihn hinweg gehen konnte. In den Napf goss ich soviel *Hg*, dass dasselbe eine hohe Kuppe bildete. Schwang die Gabel, so fuhr der Platinstift in die Kuppe, und schloss und öffnete so den Strom. Durch richtige Einstellung des Drahtes erreichte ich es bald, dass derselbe bei seiner Bewegung gar kein Quecksilber mit sich riss. Doch das Verhalten der Gabel wurde hierdurch nur wenig gebessert. Und dabei blieb die Dämpfung nicht nur sehr gross, sondern war auch von einer Inconstanz, welche durch kein Mittel zu beseitigen schien. So gaben 2 Beobachtungen, welche um eine Stunde aus einander lagen, zwischen den Amplituden 2 und 1 die Decremente 0·17, resp. 0·13; zwischen 3 und 2: 0·24, resp. 0·17. Allen Beobachtungsreihen war jener merkwürdige Character eigen, welchen die aus Ettingshausen's Curve berechneten Decremente zeigten: erst langsameres, dann steileres, dann wieder langsameres Anwachsen mit der Amplitude. Um ein Beispiel zu geben, theile ich gleich die erste derartige Beobachtungsreihe mit. Die Zeiten sind diesmal Mittelwerthe aus 8 auf einander folgenden Registrirungen.

Tab. III (G_{II}, 8/VI 1885).

$a =$	6		5		4		3		2		1
$t =$	0·52		1·06		1·69		2·65		4·95		10·55
$x =$		0·338		·345		·300		·176		·124	

In Fig. 6 findet der Leser auch eine graphische Darstellung dieser Decremente.

Bisher trug die untersuchte Stimmgabel immer noch ihre Laufgewichte. Endlich entfernte ich dieselben versuchsweise, so dass die Gabel nur noch durch Spiegel und Gegengewicht belastet war, welche sich ganz am Ende der Zinken befanden.

Das Resultat war, dass jetzt beim Abschwingen die Amplituden der grossen Gabel (G_{II}) auch langsam abnahmen, wie jene der kleineren (G_I), welche ihre Laufgewichte nahe den Zinkenenden trug. Fortan benutzte ich die Gabel stets ohne Laufgewichte. Ueber den Einfluss, welchen die Stellung der Laufgewichte auf die Dämpfung ausübt, habe ich aber später noch besondere Versuche an G_I angestellt. Ich verschob von einer Beobachtungsreihe zur andern die Gewichte um einige Centimeter weiter zum Stiel der Gabel hin, und fand dabei ein sehr starkes Anwachsen der Decremente. Die kleine Tab. IV wird dies Verhalten zur Genüge illustriren.

Tab. IV (G_I, Zinkenlänge 327 *mm*. 27/VII 1885).

Abstand der Laufgewichte vom Zinkenende:	49^{mm}	88	120	198
Schwingungszahl nach der Theilung:	46·5	50·5	55·5	63.5 (höchster Ton)
Zeit, in welcher die Amplitude von 8 auf 3 sinkt:	33·1^{sec}	24·3	6·7	4·1

Es ist dies eine sehr eigenthümliche Erscheinung; die Erklärung wird wol darin zu suchen sein, dass in den entfernteren Lagen die Laufgewichte an Stellen kommen, in denen die Durchbiegung der Zinken bei den Schwingungen immer grösser wird. Die Laufgewichte liegen auf einer längeren Strecke den Stimmgabelzinken an, und müssen dann erheblich zur Dämpfung der Schwingungen beitragen. Wir werden später sehen, wie sich ein analoger Einfluss der Laufgewichtstellung auch auf die Aenderung der Schwingungszahl mit der Amplitude geltend macht.

Als ich die Laufgewichte entfernte, hatte die Gabel über 2 Wochen unbenutzt gestanden; ich liess sie jetzt mehrere Stunden mit grosser Amplitude schwingen, wobei zur Selbstanregung wieder der seitlich in die Quecksilberkuppe fahrende Platindraht diente. Dazwischen liess ich die Gabel auch einige Male abschwingen. Am folgenden Tage war die Gabel noch 1½ Stunden im Gange, ehe ich die Beobachtungen zur Bestimmung des Decrementes machte. Dies geschah, um jedenfalls die Decremente zu erhalten, welche dem Endzustande der Gabel entsprachen; wenn nämlich auch für die Stimmgabel eine „Accomodation" vorhanden ist, wie man sie bei den Torsionsschwingungen von Drähten beobachtet hat [1]). Ich registrirte dann, analog dem früheren Verfahren, zwei Mal die Amplitudendurchgänge auf der rechten Seite des Lichtstreifens, zwei Mal die auf der linken. Dann folgten Beobachtungen über die Aenderung der Schwingungszahl mit der Amplitude, und eine Stunde nach jener ersten eine zweite Beobachtungsreihe zur Bestimmung der Dämpfung, bei welcher ich die Gabel zwei Mal abschwingen liess. Tab. V enthält die Mittelwerthe der beobachteten Zeiten, sowie die aus denselben berechneten Decremente x.

1) Streintz, Pogg. Ann. 153, 387. 1874. — Schmidt, Wied. Ann. 2, 48. 1877. — W. Braun und A. Kurz, Carl's Repert. f. Physik. 15, 561. 1879.

Tab. V. (G_{II}, 3/VII 1885).

a	t	$10^3 x$	a	t	$10^3 x$
	sec			sec	
13	0·00		13	0·00	
		32·4			33·1
12	2·47		12	2·41	
		32·5			36·1
11	5·15		11	4·83	
		32·2			29·6
10	8·11		10	8·04	
		29·9			31·1
9	11·63		9	11·43	
		29·7			30·9
8	15·60		8	15·25	
		27·6			28·8
7	20·43		7	19·87	
		27·8			27·9
6	25·99		6	25·41	
		25·4			27·2
5	33·17		5	32·11	
		25·8			25·3
4	41·83		4	40·91	
		24·9			26·2
3	53·37		3	51·89	
		23·7			26·1
2	70·46		2	67·40	
		23·2			25·5
1	100·41		1	94·57	

Wieder ist eine Differenz vorhanden zwischen den Resultaten der beiden Beobachtungsreihen, welche die Fehlergrenzen weit übersteigt! Ich stellte am 6/VII 1885 neue Beobachtungen an. Vor dem Beginne derselben war die Gabel anderthalb Stunden in Gang gewesen. Jetzt begann ich auch einige Beobachtungsreihen mit kleineren Amplituden, um zu sehen, ob ein Einfluss der Anfangsamplitude auf die Grösse des Decrementes nachzuweisen sei. Die erste Beobachtungsreihe, G_{II} von $A = 13$ abschwingend, ergab die Decremente um 10% kleiner, wie in Tab. V, 1. Beobachtungen mit der Anfangsamplitude $A = 8$, welche unmittelbar folgten, liessen keinen Unterschied der Decremente erkennen. Nach anderthalb Stunden neue Beobachtungen von $A = 13$ ab. Decremente 5 % grösser, als bei der ersten Beobachtungsreihe. Unmittelbar darauf Abschwingen von $A = 7$, dann von $A = 6$, endlich wieder von $A = 13$. Nur die letzte Beobachtungsreihe lässt eine kleine Aenderung des Decrementes, eine Steigerung von 2 % ungefähr, gegenüber den drei vorhergehenden Reihen erkennen, welche unter sich vollkommen übereinstimmen. Die Anfangsamplitude hat also keinerlei nachweisbaren Einfluss auf die Decremente. Einige Tage später gaben 2 Bestimmungen wieder etwas abweichende Decremente — es war also immer noch eine Inconstanz vorhanden.

Mittlerweile hatte ich auch die Aenderung der Schwingungszahl von G_{II} mit der Amplitude untersucht, und zwar in der Weise, dass ich die stroboscopischen Schwingungsdauern der abschwingenden G_{II} gegen die constant erregte G_I registrirte. Hierbei nun stellte sich die Nothwendigkeit heraus, die beim Abschwingen herrschenden Amplituden in genauerer Weise bestimmen zu müssen, als dies aus der notirten Anfangsamplitude und den vorher berechneten Decrementen

möglich war. Ich versuchte daher, ob es mir nicht gelingen möchte, Amplitudendurchgänge und stroboscopische Schwingungsdauern gleichzeitig zu registriren. Und in der That, nach vielfachen Uebungen war ich im Stande, dem Wechsel der Erscheinungen mit genügender Schnelligkeit zu folgen, um gute Beobachtungen zu erlangen. Ein Experiment verlief jetzt in folgender Weise: G_{I} wurde durch electromagnetische Selbstanregung auf constanter Amplitude erhalten. Dann wurde G_{II} unter Benutzung der auf p. 18 beschriebenen Stromleitung in Mitschwingungen versetzt. Wenn man in passenden Augenblicken den Strom öffnet und schliesst, so kann man auch bei grösserer Verstimmung der Gabeln hohe Anfangsamplituden der mitgenommenen Gabel G_{II} erreichen. Ich öffnete den Strom, und überliess die Gabel dem freien Abschwingen in einem solchen Augenblicke, wo eine Umkehr der Ellipse womöglich zwischen der ersten und zweiten Amplitude, welche ich registriren konnte, stattfinden musste. Ich registrirte dann mit dem Tasterschlüssel alle die Zeitmomente, wo die horizontale Amplitude ganzzahlige Werthe hatte, und ebenso alle die Umkehrzeiten der Ellipse. Die Amplituden beobachtete ich abwechselnd rechts und links. In meinem Journal notirte ich, welches die erste und welches die letzte registrirte Amplitude gewesen. Ein Missverständniss in der Deutung der Puncte beim nachherigen Ablesen der Beobachtungen vom Registrirpapier ist völlig ausgeschlossen. Der Verlauf der Amplitudenabnahme mit der Zeit ist seinem Character nach ja bekannt, die Umkehrzeiten der Ellipse sind nahe aequidistant. Durch Differenzenbildung kann man leicht controliren, zu welcher der beiden neben einander herlaufenden Beobachtungsreihen ein Punct gehört. Kamen zwei Puncte nahe an einander zu liegen, so notirte ich überdies im Beobachtungsjournal ihre Bedeutung. Manchmal freilich kam es auch vor, dass ein Amplitudendurchgang und eine Umkehr der Ellipse zeitlich so nahe an einander lagen, dass nur das eine Phänomen registrirt werden konnte, weil es nicht möglich war, die Aufmerksamkeit rasch genug wieder auf das folgende zu concentriren. Solch eine angenäherte Coincidenz sieht man schon einige Secunden vor dem Eintritte derselben voraus. Ich registrirte dann dasjenige Phänomen, welches für die Vollständigkeit seiner Beobachtungsreihe von grösserer Wichtigkeit war. Die Anwendung dieses Verfahrens erfordert natürlich eine mit rigoroser Sorgfalt justirte Coincidenz der resp. Schwingungsebenen der Gabeln mit den verticalen und horizontalen Nulllinien des Ocularmicrometers, denn es kommt die horizontale Amplitude bald im oberen, bald im unteren Theile des Gesichtsfeldes zur Beobachtung.

Da G_{II} durch Mitschwingen erregt wurde, war das Quecksilbergefäss dieser Gabel jetzt überflüssig geworden. Am 13/VII 85 machte ich zuerst Beobachtungen, bei welchen das Quecksilbergefäss noch die alte Stellung hatte. Sodann entfernte ich dasselbe, und machte sofort eine neue Beobachtungsreihe. Die Decremente der zweiten Reihe waren um 7—8% kleiner als die der ersten. Der Widerstand, welchen das *Hg* der Bewegung entgegengesetzt hatte, musste die Ursache dieser Differenz sein. Ich war geneigt, die Inconstanz der Dampfung, welche sich in den bis-

herigen Beobachtungen immer noch gezeigt hatte, allein auf Rechnung etwas verschiedener Stellungen des Quecksilbers zu setzen, und glaubte nunmehr mit der völligen Entfernung desselben auch den letzten Grund für eine solche Inconstanz beseitigt zu haben. Wenn es sich nun auch in der Folge zeigte, dass dennoch von einem Tage zum andern Variationen der Grössen x_0 und α stattfanden, welche die Beobachtungsfehler weit überstiegen, so hatte die Entfernung des *Hg* doch die Wirkung, dass Beobachtungen zu Anfang und zu Ende eines Termines stets genügend übereinstimmende Werthe für x_0 und α ergaben.

Aus den Beobachtungen berechnete ich die Constanten in der oben (p. 24) angegebenen Weise; stets liessen sie sich gut durch jene Formeln darstellen, und ich habe nie weiter Abweichungen von Gronau's Dämpfungsgesetz gefunden. Als Beispiel theile ich in Tab. VI eine der von mir berechneten Beobachtungsreihen mit; weiter unten in Tab. VII findet der Leser die Umkehrzeiten, welche zur selben Beobachtungsreihe gehören.

Tab. VI. (G_{II}, 30/VII 1885).

α	t		Correlaten (rechte Seite = 100 N)				$\Delta = 100\,\Delta\alpha$
	sec						
14	0·37	Näherungs-	27·7 (100 C'')	− 1·0 (1000 x_0'')	+ 19·6 (1000 α')	= + 2·1	− 1·6
13	3·28	werthe:	24·8	8·1	16·9	+ 1·2	− 0·4
12	6·36		22·1	14·0	14·4	− 4·8	+ 5·9
11	10·39	$x_0' = 10^{-3} \cdot 13$	19·5	20·2	12·1	+ 3·9	− 2·6
10	14·60		17·0	24·8	10·0	+ 3·0	− 1·7
9	19·50	$\alpha' = 0{\cdot}07$	14·7	28·6	8·1	+ 3·1	− 1·7
8	24·99		12·5	31·2	6·4	− 0·5	+ 1·7
7	31·93	$C' = 1{\cdot}96$	10·4	33·3	4·9	+ 2·3	− 1·2
6	39·74		8·5	33·9	3·6	− 1·9	+ 2·8
5	50·24		6·8	33·9	2·5	+ 1·7	− 1·1
4	63·24		5·1	32·4	1·6	+ 0·8	− 0·5
3	81·56		3·6	29·6	0·9	+ 3·0	− 3·0
2	106·10		2·3	24·2	0·4	− 4·2	+ 3·9
$C = 1{\cdot}9721$			$10^3 x_0 = 13{\cdot}099 \pm 0{\cdot}165$		$\alpha = 0{\cdot}06832 \pm 0{\cdot}00243$		

Wir haben weiter die Abhängigkeit der Schwingungszahl von der Amplitude zu untersuchen. Dies geschieht am bequemsten und am genausten durch Differentialbeobachtungen, indem man die zu untersuchende Gabel mit einer constant erregten vergleicht. Nennt man die stroboscopische Schwingungsdauer, also die Zeit, in welcher die eine Gabel der andern um eine ganze Schwingung vorangeht, θ, so ist die Differenz der Schwingungszahlen beider Gabeln

$$m - n = \pm \frac{1}{\theta} \qquad 36)$$

Statt der langen Bezeichnung „Differenz der Schwingungszahlen“ will ich fortan kürzer „Verstimmung“ schreiben, und soll dieselbe dem Vorzeichen nach immer die Differenz $m - n$ bedeuten. Mit n war die constante Schwingungszahl der Vergleichsgabel G_I bezeichnet worden, m ist die Schwingungszahl der zu untersuchenden G_{II}. Hat man beim Abschwingen der Gabel die Umkehrzeiten der Ellipse registrirt, so ist die Differenz je zweier auf einander folgender Umkehrzeiten $\theta/_2$. Das jedesmalige Vorzeichen der Verstimmung findet man nach der einfachen Regel: Wächst θ mit abnehmender Amplitude, so ist $m-n$ negativ zu nehmen, nimmt θ ab, so ist $m-n$ positiv. Diese Regel folgt aus der Beobachtung, dass bei kleiner werdender Amplitude die Schwingungszahl der Stimmgabel zunimmt.

Die Beobachtungen, welche ich anfangs noch an der mit Laufgewichten versehenen Gabel anstellte, ergaben eine ungemein starke Aenderung der Verstimmung mit der Amplitude. G_{II} brachte ich damals noch durch Selbstanregung auf die gewünschte Anfangsamplitude. Ich registrirte dann zunächst einige Umkehrzeiten der Ellipse, solange die Gabel selbstthätig auf constanter Amplitude blieb, unterbrach sodann im Augenblicke einer Umkehr den Strom, und registrirte zugleich diesen Moment. Die folgenden Umkehrzeiten registrirte ich, so lange die Ellipse deutlich genug war. Diese Beobachtungen wiederholte ich, und bildete Mittelwerthe. Vorher und nachher beobachtete ich die Amplitudenabnahme der abschwingenden Gabel, und entwarf dann in Millimeterpapier eine Curve, die Amplituden als Function der Zeit darstellend. Bei den vorigen Beobachtungen hatte ich die Anfangsamplitude notirt: mit Hilfe eines Planimeters ermittelte ich dann die zu jeder stroboscopischen Halbschwingung gehörige mittlere Amplitude. Dies ist ein recht umständliches Verfahren, und doch sind die Resultate nur wenig zuverlässig.

Fig. 7 illustrirt das Ergebniss einer derartigen Beobachtungsreihe. Abscissen sind die Amplituden, Ordinaten die Verstimmungen. Die Kreuzchen geben die Beobachtungen an, die bei electromagnetischer Selbstanregung beobachtete Verstimmung bei $a = 8{\cdot}0$ ist durch einen Kreis besonders gekennzeichnet. Die Schwingungszahl scheint in den Fehlergrenzen als lineare Function der Amplitude darstellbar zu sein, die Tonänderung beträgt im mitgetheilten Beispiel etwa 0·024 Schwingungen für die Einheit der Amplitude.

Ich erwähnte bereits den immensen Einfluss, welchen die Stellung der Laufgewichte auf die Dämpfung der Stimmgabelschwingungen hat. Einen gleichen Einfluss übt diese Stellung auch auf den Betrag der Tonänderung mit der Amplitude aus. Denn nachdem die Laufgewichte entfernt waren, änderte sich die Schwingungszahl derselben Gabel pro Einheit der Amplitude nur noch um 0·0003 Schwingungen.

Graphische Darstellungen zeigten, dass auch jetzt die Abnahme der Schwingungszahl der Amplitude proportional sei. Um nun die Methode der kleinsten

Quadrate auch auf die Beobachtungen der Umkehrzeiten anwenden zu können, muss zuerst ein analytischer Ausdruck für diese Zeiten aufgestellt werden.

Die Schwingungszahl der Vergleichsgabel G_I ist bei jeder Beobachtungsreihe constant $= n$. Die Schwingungszahl der zu untersuchenden Gabel G_{II} ist von der Amplitude abhängig und ist jeweil

$$m = m_0 - p \cdot a \tag{37}$$

Die Amplitude a ist selbst eine Function der Zeit, und zwar war

$$a = \frac{Be^{-x_0 t}}{1 - a\, Be^{-x_0 t}} \tag{29}$$

Folglich ist die Anzahl von Schwingungen, welche G_{II} seit der Zeit $t = 0$ vollführt hat

$$M = \int_0^t (m_0 - p \cdot a)\, dt = m_0 t - p \cdot \int_0^t \frac{Be^{-x_0 t}}{1 - a\, Be^{-x_0 t}}\, dt \tag{38}$$

$$M = m_0 t - p \cdot \frac{1}{a x_0}\, l\, \frac{1 - a\, Be^{-x_0 t}}{1 - a\, B} \tag{39}$$

Gegenstand der Beobachtung ist die Differenz der von beiden Gabeln vollführten Schwingungen:

$$M - nt = \delta + \eta \tag{40}$$

δ bedeute eine jeder Beobachtungsreihe eigenthümliche Constante, nämlich die Differenz, welche von $t = 0$ ab bis zur ersten Umkehrzeit entstanden ist. Die Beobachtung der Umkehrzeiten t_0, t_1, t_2, ... liefert dann die Gleichungen

$$\begin{aligned} \delta \pm 0 &= M_{(t_0)} - n \cdot t_0 \\ \delta \pm 0{\cdot}5 &= M_{(t_1)} - n \cdot t_1 \\ \delta \pm 1 &= M_{(t_2)} - n \cdot t_2 \\ &\ldots\ldots \end{aligned} \tag{41}$$

Wir haben also:

$$\eta = (m_0 - n)\, t - p\, \frac{1}{a x_0}\, l\, \frac{1 - a\, Be^{-x_0 t}}{1 - a\, B} - \delta \tag{42}$$

Ich stellte nun die Versuche an, wie auf p. 28 beschrieben. Dann wurden a, x_0, B, aus den Amplitudendurchgängen gefunden, welche mit den Umkehrzeiten zugleich registrirt waren. Die Gl. 42 enthält die 3 unbekannten Constanten $(m_0 - n)$, p, δ, in linearer Form, letztere können also nach der Meth. d. kl. Quadr. gefunden werden. Streng genommen sollte man die Summe der Fehlerquadrate von t zu einem Minimum machen, doch kann man ebensogut die Fehler der η ausgleichen, da η und t sich doch sehr nahe proportional ändern. Alle meine Beobachtungen liessen sich gut nach Gl. 42 darstellen, in den Grenzen der von mir benutzten Amplituden war also stets die Schwingungszahl als lineare Function der Amplitude zu betrachten. Die in Tab. VII mitgetheilten Beobachtungen geben ein Beispiel hierfür.

Tab. VII. (G_{II}, 30/VII 1885).

η	t	$\int a\,dt$	$10^3 \Delta\eta$	
	sec			$10^3 (m_0 - n) = 29{\cdot}021$
0	6·36	83·0	+ 0·1	± 39
1	43·48	390·8	− 1·0	
1·5	61·57	478·0	+ 1·9	$10^3 p = 0{\cdot}2542$
2	79·26	541·1	− 0·8	± 76
2·5	96·91	588·6	− 0·6	
3	114·49	624·8	+ 0·4	$\delta = 0{\cdot}16345$

Ein Uebelstand aber machte sich auch hier bemerkbar. Der Amplitudencoefficient p hielt sich nicht constant. Beobachtungen, welche an verschiedenen Tagen angestellt wurden, ergaben Zahlen, die in einem extremen Falle um das 10fache des wahrscheinlichen Fehlers differirten! Es ist mir nicht gelungen, die Ursache dieser eigenthümlichen Inconstanz aufzufinden, und dieselbe ist um so befremdlicher, als die Beobachtungen sich durchweg der Formel 42 auf's beste fügten. Nachdem ich aber mit den Laufgewichten die referirten Erfahrungen gemacht habe, glaube ich, dass auch jetzt noch die Inconstanz der Dämpfung und die des Coefficienten p einen gemeinsamen Grund haben. Die Gabel war wol auf's beste festgeschraubt, und das Stativ sowie die Tische massiv und fest genug, und doch kann hier allein der Mangel zu suchen sein.

Ich gebe in der nachfolgenden Tab. VIII eine Uebersicht über die Werthe von $\varkappa_0$, α, p, welche ich aus verschiedenen Beobachtungsreihen berechnet habe, damit der Leser den Betrag der Variationen dieser Constanten kennen lernt. Jeder Zahl füge ich ihren wahrscheinlichen Fehler bei.

Tab. VIII. (1885).

Beobachtungs-Datum & Nr.	$10^3 \varkappa_0$	α	Welche Ampl. beob.	$10^3 p$	$10^3 (m_0 - n)$	Anzahl der beob. Umkehrz.
20/VII 1	14·70	0·0587	13−1	0·2947	− 53·307	11
	± 9	± 12	4 fehlt	± 85	± 46	
6	14·76	0·0604	13−1	0·3205	+101·547	20
	± 22	± 29		± 188	± 99	
12	15·12	0·0551	13−1	0·2345	+ 43·675	8
	± 14	± 18		± 82	± 43	
26/VII 1	13·76	0·0705	13−1	0·3118	+ 54·543	16
	± 17	± 26		± 66	± 24	
11	14·04	0·0680	13−2	0·3593	+ 40·501	11
	± 19	± 27	8 fehlt	± 21	± 29	
30/VII 1	13·10	0·0683	14−2	0·2542	+ 29·021	6
	± 16	± 24		± 76	± 39	
5	13·38	0·0670	14−1	0·2362	+ 28·031	8
	± 17	± 25		± 78	± 33	

Man sieht, die Variationen der 3 Constanten $\varkappa$, α, p sind sehr merklich. Doch da jede einzelne Beobachtungsreihe sich so gut den Formeln anpasste, wird es gestattet sein, das Resultat dieses Abschnittes dahin zusammenzufassen, dass Schwingungszahl und Decrement der Stimmgabel als lineare Functionen der Amplitude angesehen werden müssen.

II. Die electromagnetische Anregung der Stimmgabel.

Es war zu erwarten, dass, wenn die Gabel unter dem Einflusse eines intermittirenden Stromes schwingt, zu der im vorigen Abschnitte behandelten Dämpfung, welche durch innere Reibung und Luftreibung hervorgebracht wird, noch ein gewisser Betrag hinzukommen würde, verursacht durch Inductionswirkung des Electromagnets auf die sich bewegenden Stimmgabelzinken. Dieser, von der erregenden Stromstärke abhängige Antheil der Dämpfung kann aber nicht gefunden werden bei Anwendung eines intermittirenden Stromes, denn letzterer wirkt durch die periodischen Stösse direct auf die Amplitude ein, so dass das zu beobachtende Phänomen in ganz unberechenbarer Weise beeinflusst wird. Um aber doch eine Vorstellung zu bekommen von der Grösse dieser Dämpfung durch den Electromagnet, untersuchte ich den Einfluss, welchen der durch einen constanten Strom erregte Electromagnet auf die Stimmgabelschwingungen ausübt. Dazu war eine geringe Aenderung der Stromleitungen erforderlich. Während bisher der Electromagnet von G_{II} direct mit dem zweiten Quecksilbernapf des Unterbrechers an G_{I} verbunden war, führte ich jetzt von beiden Stellen Drähte zu einer Wippe, welche ich neben das Beobachtungsfernrohr stellte. Die Wippe verband ich ferner direct mit dem galvanischen Element, und schaltete in diese Verbindung einen Rheostaten ein. In einer Lage der Wippe ging dann der Strom in der gewöhnlichen Weise vom Element durch den Unterbrecher zum Electromagnet von G_{II}, wurde also intermittirend gemacht. Dieser Strom gestattete, die nöthige Anfangsamplitude der G_{II} durch Mitschwingen zu erzwingen. Beim Umlegen der Wippe wurde der Unterbrecher ausgeschaltet, und der Strom (durch den Rheostaten) bleibend geschlossen; die Gabel schwang also unter dem Einflusse des constant erregten Electromagnetes ab. Die Intensität des constanten Stromes wurde jedesmal vor und nach dem Abschwingen am Galvanometer abgelesen, und das Mittel aus den höchstens um 0·2 Scaltheile differirenden Ausschlägen genommen. Ich registrirte auch hier Amplitudendurchgänge und Umkehrzeiten zusammen, und rechnete nach den im vorigen Abschnitt mitgetheilten Methoden. G_{I} war während der Dauer der Versuche ununterbrochen selbstthätig im Gange. Das Resultat meiner Versuche war, dass nicht allein das Decrement, sondern zugleich auch die Schwingungszahl von G_{II} hierdurch verändert wurde, und zwar wuchs das Decrement proportional dem Quadrate der Stromstärke, und die Schwingungszahl nahm ab, ebenfalls proportional dem Quadrate der Stromstärke.

Dieselben Versuche stellte ich auch 1890 an, wo eine andere Ut_{-1}-Gabel von K o e n i g als G_{II} benutzt wurde, welche am Ende der Zinken Laufgewichte trug, und die Schwingungszahl $m = 32$ hatte. Die nachfolgenden Tabellen enthalten die Resultate meiner Beobachtungen an dieser Gabel. Wir betrachten am zweckmässigsten jede der vier Constanten $\varkappa_0$, α, $(m_0 - n)$, p, für sich.

Ich muss hier noch eine Bemerkung einschalten über die Einheit, in welcher ich $\varkappa$, $m - n$ und p hinfort ausdrücken will. Alle drei sind kleine Grössen, und ich habe es sehr bequem gefunden, eine t a u s e n d m a l k l e i n e r e E i n h e i t für dieselben zu benutzen. Diese Einheit nenne ich das M i l l i, und bezeichne sie mit M. Da ihre Dimension T^{-1} ist, so kommt dies der Benutzung einer Zeiteinheit von tausend Secunden gleich.

Discussion von $\varkappa_0$. Ist $\varkappa_i$ das Decrement, welches bei einer erregenden Stromstärke i beobachtet wird, so versuchte ich den Ansatz:

$$\varkappa_{0i} = \varkappa_0 + \gamma i^2 \tag{43}$$

Berechnet man nach der Methode der kleinsten Quadrate aus den beobachteten Decrementen die Werthe $\varkappa_0$ und γ, so ergiebt die Rückberechnung eine sehr gute Uebereinstimmung, wie dies aus Tab. IX hervorgeht.

Tab. IX. (10/II 1890).

Beob.-Nr.	i	i^2	$\varkappa_{0i}$ gefunden.		△ (ber. nach 43 minus gefunden).	
			M			$\varkappa_0 = \overset{M}{7{\cdot}755} \pm 32$
1	0·000	0·000	7·795	± 0·066	− 0·61	
7	0·000	0·000	7·782	66	− 0·42	$\gamma = 3{\cdot}713$
2	0·421	0·177	8·407	93	+ 0·06	± 60
6	0·844	0·712	10·253	76	+ 1·91	
3	1·122	1·259	12·577	166	− 0·89	$\varepsilon = \pm 1{\cdot}14$
5	1·485	2·205	16·276	283	− 1·17	$r = \pm 0{\cdot}77$
4	1·730	2·993	19·047	478	− 0·37	

Die Einheit der Stromstärke ist 100 Scaltheile = 0·609 Ampère. Die Fehler $\triangle \varkappa_{0i}$ sind ausgedrückt in Theilen des wahrscheinlichen Fehlers jeder einzelnen Bestimmung. Bei einer grossen Zahl von Beobachtungen wäre also $r = \pm 1$ zu erwarten. Da jedoch r sogar kleiner als 1 gefunden wird, so ist die Uebereinstimmung der Formel 43 mit der Erfahrung sehr befriedigend zu nennen. D e r d u r c h d i e I n d u c t i o n s w i r k u n g d e s E l e c t r o m a g n e t e s v e r u r s a c h t e Z u w a c h s d e s D e c r e m e n t e s u n e n d l i c h k l e i n e r S c h w i n g u n g e n i s t a l s o d e m Q u a d r a t e d e r S t r o m s t ä r k e p r o p o r t i o n a l.

Discussion von α. Die Constante α schien bei den Versuchen v. J. 1885 sich gar nicht zu ändern unter dem Einflusse des Electromagnetes. Jetzt aber geht

aus Tab. X eine sehr merkliche Aenderung hervor. α nimmt erst ab, dann wieder zu mit wachsender Stromstärke. Man kann eine Formel aufstellen

$$(\alpha\varkappa_0)_i = (\alpha\varkappa_0) + \delta i^2 \qquad 44)$$

und kann die Constanten mit kleinsten Quadraten berechnen.

Tab. X. (10/II 1890).

Beob.-Nr.	i^2	a		$\alpha\varkappa_0$		$\triangle$	
1	0·000	0·05322 ±	137	M 0·4148 ±	113	+ 0·81	$(\alpha\varkappa_0) = \overset{M}{0\cdot4239}$ ± 48
7	0·000	5629	138	4380	113	− 1·26	$\delta = 0\cdot1308$
2	0·177	5267	179	4428	158	+ 0·27	± 83
6	0,712	5044	117	5172	126	− 0·02	
3	1·259	4454	204	5602	267	+ 1·07	$\varepsilon = \pm 1\cdot03$
5	2·205	4360	263	7096	445	+ 0·06	$r = \pm 0\cdot69$
4	2·993	4858	392	9253	782	− 1·42	

Die Uebereinstimmung der Formel mit den Beobachtungen ist recht gut, wie Tab. X zeigt. Doch darf es nicht befremden, dass $r = \pm 0\cdot69$ so klein ist. Die wahrsch. Fehler von $\alpha\varkappa_0$, welche die Einheit für $\triangle$ abgegeben haben, sind berechnet aus den Einzelfehlern der Factoren, als ob die Bestimmungen von α und $\varkappa_0$ unabhängig von einander wären. Dies ist aber gar nicht der Fall, daher sind die wahrsch. Fehler in der vierten Colonne jedenfalls zu hoch gegriffen, und hierdurch ist r, welches auf eine Beobachtung vom wahrsch. Fehler ± 1 bezogen ist, zu niedrig geworden.

Bei diesen Versuchen war also das Decrement darstellbar durch die Gleichungen

$$\varkappa = \underset{\pm 32}{\overset{M}{7\cdot755}} + \underset{\pm 60}{3\cdot713}\, i^2 + \left[\underset{\pm 48}{0\cdot4239} + \underset{\pm 83}{0\cdot1308}\, i^2\right] a$$

oder

$$\varkappa = \underset{\pm 32}{\overset{M}{7\cdot755}} + \underset{\pm 48}{0\cdot4239}\, a + \left[\underset{\pm 60}{3\cdot713} + \underset{\pm 83}{0\cdot1308}\, a\right] \cdot i^2$$

Bei jeder Stromstärke wächst also das Decrement proportional der Amplitude, und bei jeder Amplitude wächst das Decrement proportional dem Quadrate der Stromstärke.

Discussion von $(m - n)$. Die Verstimmung und den Coefficienten p konnte ich bei meinen neueren Versuchen nicht mehr mit kleinsten Quadraten aus dem Beobachtungsmaterial berechnen. Es war mir nämlich nicht möglich, die Amplitude der Vergleichsgabel G_1 vollkommen constant zu erhalten, und dieser Umstand brachte

eine Unsicherheit in die Deutung der stroboscopischen Schwingungsdauern, welche eine exacte Rechnung unmöglich machte. Durch sorgfältige Reinigung der Contactspitze und Beschwerung des Stimmgabelstatives mit grossen Bleiklötzen gelang es wenigstens, die Schwankungen in engen Grenzen zu halten. Während der ganzen Dauer der in diesem Abschnitt mitgetheilten Beobachtungen — dieselben erstreckten sich sogleich auch auf die erzwungenen Schwingungen — war die höchste Amplitude der Vergleichsgabel $b = 12 \cdot 3$, die niedrigste $b = 9 \cdot 9$. Während der einzelnen Beobachtungsreihe, d. h. während eines Abschwingens von G_{II}, betrug die Variation nur wenige Zehntel. Es gelang mir, auch diese Schwankungen noch messend zu verfolgen, und ihren störenden Einfluss fortzucorrigiren. Ich verfuhr so: Vor dem Beginn und nach Beendigung einer Beobachtungsreihe notirte ich immer die Amplitude von G_I. Während des Abschwingens kommen nur Variationen in den Zehnteln vor. Zwischen den einzelnen Zeitmomenten, welche registrirt werden müssen, den Amplitudendurchgängen und Umkehrzeiten, hat man immer Zeit genug, um die Zehntel der Amplitude b abzulesen, in's Journal kann man sie aber nicht eintragen. Ich notirte diese Zehntel mit Hilfe des Tasterschlüssels auf dem Papierstreifen des Registrirapparates. 10 Puncte dicht hintereinander bedeuteten —·0, 11 Puncte —·1, 2 Puncte —·2, u. s. f. Ich gewöhnte mich bald an diese neue Complication des Registrirverfahrens, und war bestrebt, stets möglichst oft b zu notiren. Beim Ablesen der Beobachtungen erhält man also nun für jede stroboscopische Halbschwingung einen mittleren Werth von b, welcher hernach zur Reduction auf einen Normalwerth dient. Die mittlere Amplitude von G_{II} berechnete ich für jede stroboscopische Halbschwingung nach der Formel

$$a = \frac{l(1 - aBe^{-x_0 t_2}) - l(1 - aBe^{-x_0 t_1})}{a x_0 (t_2 - t_1)} \qquad 45)$$

Jede Halbschwingung liefert einen Werth der Verstimmung

$$m_a - n = \frac{2}{t_2 - t_1} \qquad 46)$$

wenn t_1 und t_2 zwei aufeinander folgende Umkehrzeiten der Ellipse sind. Ich hatte die stroboscopische Schwingungsdauer so gewählt, dass die Fehler in Zeit, welche beim Registriren begangen wurden, auf $m - n$ keinen merklichen Einfluss ausübten gegenüber der Unsicherheit, welche aus dem Fehler entsprang, mit dem die b noch behaftet waren.

Zunächst trug ich nun für jede Beobachtungsreihe die uncorrigirten $m - n$ als Ordinaten zu den a als Abscissen auf. Da zeigte es sich nun, dass ich zum Glück über eine Beobachtungsreihe verfügte, welche zur exacten Berechnung von p geeignet war. In Tab. XI theile ich dieselbe mit, und gebe zugleich das Resultat der Berechnung an, sowie die Fehler in η, welche bei der Ausgleichung übrig bleiben.

Tab. XI. (10/II 1890, Nr. 14).

η	t	$m-n$	a	b	$10^3\Delta\eta$
0	1·72				− 0·24
		18·88 (M)	13·12	12·2	
0·5	28·20				+ ·22
		19·50	9·35	12·2	
1	53·84				+ ·61
		19·94	6·95	12·2	
1·5	78·91				− ·27
		20·19	5·29	12·2	
2	103·67				− ·59
		20·36	4·10	12·2	
2·5	128·23				− ·19
		20·49	3·22	12·2	
3	152·63				+ ·50
		20·65	2·55	12·2	
3·5	176·84				− ·06
		20·65	2·03	12·16	
4	201·05				
		20·59	1·63	12·1	
4·5	225·34				
		20·57	1·31	12·1	
5	249·65				
		20·57	1·05	12·07	
5·5	273·96				

$m_0 - n = +\overset{M}{21{\cdot}0470} \pm 76$

$p = \overset{M}{0{\cdot}16375} \pm 118$

$10^3\varepsilon = \pm 0{\cdot}49 \quad 10^3 r = \pm 0{\cdot}33$

Im Mittel ist $\theta = 50$ *sec*, also die Beobachtungsfehler in Zeit

$\varepsilon_t = \pm \overset{sec}{0{\cdot}025} \quad r_t = \pm \overset{sec}{0{\cdot}017}$

Zur Rechnung, welche darauf ausging, einen genauen Werth von p zu erhalten, konnten natürlich nur die Beobachtungen bis $\eta = 3{\cdot}5$ benutzt werden, solange b constant geblieben war. Die Colonne $\Delta\eta$ beweist, wie genau die Beobachtungen, und wie gut sie sich der Formel 42 anschliessen. Für alle weiteren Reductionen beobachteter Verstimmungen auf $a = 0$ benutzte ich nun den Coefficienten $p = 0{\cdot}164$.

Ferner war es erforderlich, um alle $m - n$ auf eine Normalamplitude der Vergleichsgabel G_1 zu reduciren, den Coefficienten $dn/db = -q$ zu ermitteln. Ich benutzte hierzu alle Verstimmungsbeobachtungen der frei abschwingenden Gabel, über welche ich verfügte. In jeder einzelnen Reihe reducirte ich alle die beobachteten $m - n$ (z. B. Col. 3 in Tab. XI) auf $m_0 - n$, nach der Formel $m_0 - n = m - n + 0{\cdot}164a$. Für jede Reihe bildete ich aus diesen Zahlen ein Mittel, ebenso das Mittel der Amplitude b, welches dazu gehörte.

Die Beobachtungen erzwungener Schwingungen i. J. 1885 hatten mir gezeigt, dass es ein zu primitives Verfahren sei, die Verstimmung durch Verschieben der Laufgewichte auf G_1 zu ändern. Für meine neueren Versuche liess ich desshalb an einem Laufgewichte eine Schraube anbringen, welche das Gewicht parallel der Stimmgabelzinke durchsetzte, und durch eine Contramutter in jeder beliebigen Stellung festgehalten werden konnte. Die Ganghöhe der Schraube betrug 0·5 *mm*, durch Ausbohren war ihr Gewicht so regulirt, dass eine Verschiebung derselben um eine Umdrehung eine Aenderung der Tonhöhe um 1 *M* verursachen musste. Das umgearbeitete Laufgewicht mit Schraube und Contramutter war durch Abfeilen einer Kante wieder genau auf das ursprüngliche Gewicht zurückgebracht. Die Laufgewichte selbst blieben nun bei allen meinen Beobachtungen unverändert an derselben Stelle festgeschraubt, und die Verstimmungen wurden

nur durch die Verstellung der Schraube geändert. Ist nun S die Anzahl von Schraubhöhen, um welche der Schraubenkopf von der Seitenfläche des Laufgewichtes absteht, so kann für die Schwingungszahl von G_I die Formel aufgestellt werden

$$n = n_0 - q \cdot b + v \cdot S \tag{47}$$

Die Schwingungszahl von G_{II} ist stets ungeändert m_0. also konnte ich aus den in der folgenden Tabelle aufgeführten Beobachtungen die Constanten q und v berechnen.

Tab. XII. (10/II 1890).

Beob.-Nr.	S	$m_0 - n$	b
1	42	M − 15·07	9·96
7	42	− 14·18	10·39
8	42	− 13·78	10·58
9	30	− 1·20	11·07
12	22	+ 9·44	12·48
13	10	+ 21·19	12·30
14	10	+ 20·98	12·17
15	28	+ 3·08	12·10
17	32	− 1·18	11·80
18	35	− 3·93	11·87
19	42	− 10·83	11·84
20	42	− 11·08	11·62

Ich fand $q = \overset{M}{2{\cdot}261} \pm 0{\cdot}074$, und $v = \overset{M}{0{\cdot}9650} \pm 0{\cdot}0050$.

Nun erst war es möglich, zur Berechnung der Versuche mit constant erregtem Electromagnet zurückzukehren. Aus jeder stroboscopischen Halbschwingung hatte ich $m - n$ berechnet, jetzt reducirte ich mit $q = 2{\cdot}26$ auf $b = 10{\cdot}2$ als Normalamplitude. Diese reducirten Verstimmungen trug ich nun als Ordinaten auf zu den mittleren Amplituden a als Abscissen. In jedem Diagramm zog ich eine gerade Linie, welche die Beobachtungen möglichst gut wiedergab, und erhielt aus jeder Geraden den Amplitudencoefficienten p, (Tab. XIII, Col. 2) welcher bei der betreffenden Stromstärke vorhanden war. Für die freiabschwingende Gabel, d. i. für $i = 0$, hatten wir schon $p_0 = 0{\cdot}164$. Diese p trug ich in Coordinatenpapier ein, zu i^2 als Abscisse. Die beste Gerade hatte die Gleichung $0{\cdot}164 + 0{\cdot}050 i^2$. Die hiermit berechneten Zahlen stehen auch in der Tab. XIII. In den ursprünglichen Diagrammen, welche $m - n$ als Function von a enthielten, tilgte ich nunmehr die Geraden, welche für Tab. XIII die p geliefert hatten. Ich zog neue Linien, welche die berechneten p zu Richtungsconstanten hatten. Auch diese schlossen sich gut den Beobachtungen an, und dienten nun zur Ermittelung der $m_0 - n$. Tab. XIV enthält die Resultate.

Tab. XIII. (10/II 1890).

i^2	p aus den Diagr.	p berechnet $0{\cdot}164 + 0{\cdot}050\, i^2$	Δ
	M		
0·000	0·164	0·164	
0·177	0·18	0·173	−0·007
0·712	0·185	0·200	+ ·015
1·259	0·23	0·227	− ·003
2·205	0·30	0·274	− 0·26
2·993	0·30	0·314	+ ·014

Tab. XIV. (10/II 1890).

Beob.-Nr.	i^2	$m_{0i} - n$ aus den Diagr.	$m_{0i} - n$ berechnet $-14{\cdot}62 - 4{\cdot}14 i^2$	Δ
		M		
1	0·000	−14·51	−14·62	−0·11
7	0·000	14·62	14·62	·00
2	0·177	15·47	15·35	+ ·12
6	0·712	17·71	17·57	+ ·14
3	1·259	19·95	19·83	+ ·12
5	2·205	23·64	23·75	− ·11
4	2·993	26·89	27·01	− ·12

Eine Formel

$$(m_{0i} - n) = (m_0 - n) - \mu i^2 \tag{48}$$

stellt die Beobachtungen gut dar. Wieder durch graphisches Verfahren erhielt ich $(m_0 - n) = -14{\cdot}62$ und $\mu = 4{\cdot}14$. Die übrig bleibenden Fehler sind, wie aus Tab. XIV ersichtlich, Fehlern von 0·05 in b aequivalent, übersteigen also nicht die zu erwartenden Grenzen.

Die durch Einwirkung des constant erregten Electromagnetes erzeugte Verminderung der Schwingungszahl ist also dem Quadrate der Stromstärke proportional, und wächst mit der Amplitude. Es ist bei diesen Versuchen:

$$m_i = m - (\mu + \rho \,.\, a)\, i^2 \tag{49}$$

$$\overset{M}{\mu = 4{\cdot}14} \qquad \overset{M}{\rho = 0{\cdot}050}$$

Die früheren Versuche v. J. 1885 hatten dasselbe Resultat ergeben, nur war dort natürlich der numerische Werth der Coefficienten ein anderer. Ich fand damals, bei anderer Aufstellung, mit anderem Galvanometer und für eine andere Gabel: $\gamma = 26{\cdot}92 \pm 0{\cdot}49$; $\mu = 24{\cdot}56 \pm 0{\cdot}09$; $\rho = 0{\cdot}474 \pm 0{\cdot}005$. Da die Constanten grösser waren, war auch ihre Bestimmung leichter, auch hatte ich namentlich nicht mit Inconstanz der Vergleichsgabel G_1 zu kämpfen.

Wie kommt nun diese Aenderung der Schwingungszahl zu Stande?

Für die frei schwingende Stimmgabel setzten wir die Beschleunigung:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -4\pi^2 m^2 x - 2\varkappa \frac{dx}{dt}$$

Wirkt auf die Gabelzinke in ihrer Schwingungsebene ein Magnetpol P in der Entfernung e von ihrer Ruhelage, so kommt jetzt, wenn i die den Magnetismus erzeugende Stromstärke ist, zu obigem Ausdrucke ein Glied hinzu, welches umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung von Magnet und Zinke, und direct pro-

portional dem Quadrate[1]) des magnetischen Momentes des Electromagnetes ist. Also erhalten wir jetzt:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -4\pi^2m^2x - 2\varkappa\frac{dx}{dt} - \frac{c\,i^2}{(e+x)^2} \qquad 50)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\varkappa\frac{dx}{dt} + 4\pi^2m^2x = -\frac{c\,i^2}{e^2} + \frac{2\,c\,i^2}{e^3}x - \dots \qquad 51)$$

Hierbei ist die nach auswärts gerichtete Elongation, bei welcher die Stimmgabelzinke sich vom Magnetpol entfernt, positiv gerechnet. Unter $\varkappa$ ist die durch die Induction vergrösserte Dämpfung zu verstehen. Da nur eine Theorie der Aenderung von m_0 beabsichtigt wird, so ist bei der Entwicklung des „Stromstärkegliedes", wie man jene Correction nennen könnte, das Glied mit der ersten Potenz allein zu berücksichtigen. Ist $i = f(t) =$ const., wie dies bei den obigen Versuchen der Fall war, so zeigt das erste Glied rechter Hand nur eine Verschiebung der Ruhelage an, hat also für uns weiter keine Bedeutung. Das zweite Glied aber ist nach links zu bringen, die Coefficienten von x sind zu vereinigen, und das Resultat ist eine neue Schwingungszahl

$$m_i = \sqrt{m^2 - \frac{c\,i^2}{2\pi^2e^3}}$$

$$= m - \mu i^2\,; \qquad \mu = \frac{c}{4\pi^2e^3m} \qquad 52)$$

Die Theorie verlangt also eine Abnahme der Schwingungszahl proportional dem Quadrate der Stromstärke, wie das Experiment sie auch ergeben hat.

Die Bedeutung der vorstehenden Betrachtungen geht aber weit hinaus über diese Experimente mit constantem Strom. Die Gl. 50 und 51 wurden aufgestellt ohne irgend eine Annahme über die Natur von i, als Function der Zeit betrachtet. Bei der Erzeugung erzwungener Schwingungen durch einen intermittirenden Strom werden daher diese Gleichungen ebenfalls giltig sein, und die Theorie der electromagnetischen Anregung einer Stimmgabel wird auf dieselben Rücksicht zu nehmen haben, wie wir in der Folge sehen werden.

In der Einleitung bereits reproducirte ich Rayleigh's Theorie. Sie ging aus von der Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\varkappa\frac{dx}{dt} + 4\pi^2m^2x = J\cos 2\pi nt. \qquad 3)$$

Das Integral war:

$$x = \frac{J\sin\varepsilon}{4\pi n\varkappa}\cos(2\pi nt - \varepsilon) \qquad 6)$$

---

1) cf. Wiedemann, Lehre v. d. Electricität, 1885. Bd. III, p. 577.

$$tan\,\varepsilon = \frac{nx}{\pi(m^2 - n^2)} = \frac{x}{2\pi(m-n)\left(1 + \frac{m-n}{2n}\right)} \qquad 7)$$

Die Untersuchungen des ersten Abschnittes haben nun gezeigt, dass weder x, noch m von der Amplitude unabhängig sind, wie es doch die obige Theorie voraussetzt. Schon bei den kleinen Amplituden, welche überhaupt zur Anwendung kamen, trat fast eine Verdoppelung des Decrementes ein, gegenüber dem Grenzwerthe für $a = 0$. Es entsteht die Frage, ob dieser Abhängigkeit der Grössen x und m von der Amplitude durch eine Modification der Theorie Rechnung getragen werden könne. An eine Lösung des Problems in geschlossener Form ist dabei natürlich garnicht zu denken, man wird sich mit Näherungsrechnungen zu behelfen haben. Zunächst wäre eine Differentialgleichung aufzustellen, deren Integral den experimentell gefundenen Eigenschaften der Stimmgabel genügt. Chwolson[1]) hat allgemeine Principien aufgestellt, nach welchen man in solchen Fällen zu verfahren hat, doch ist seine Methode hier nicht wohl anwendbar. Sie hat zur Voraussetzung, dass die Amplitude nur einen relativ geringen Einfluss auf Decrement und Schwingungsdauer ausübt. Bei meinen Versuchen aber stieg das Decrement der Stimmgabelschwingungen von $a = 0$ bis $a = 15$ fast auf seinen doppelten Betrag. Ich habe eine Lösung des Problems auf einem anderen Wege versucht. Die Rechnungen werden aber dabei so weitläufig dass ich auf die Wiedergabe derselben verzichte, zumal die Giltigkeitsgrenze des Resultates der zahlreichen Vernachlässigungen wegen doch etwas unsicher ist. Ich will nur andeuten, wie ich dabei vorging.

Die Bewegung der Stimmgabel ist nach meinen Versuchen darstellbar durch die Gleichung

$$x = \frac{Be^{-x_0 t}}{1 - aBe^{-x_0 t}} \cdot \cos\left(2\pi m_0 t - \frac{2\pi p}{a x_0}\, l \frac{1 - aBe^{-x_0 t}}{1 - aB} - \Gamma\right) \qquad 53)$$

Die Constanten B und Γ sind von den Anfangsbedingungen abhängig.

Ich habe nun die betreffenden Rechnungen erst für den Fall $p = 0$, dann für den Fall $a = 0$ gesondert durchgeführt. Wollte man die Veränderlichkeit von Decrement und Schwingungszahl zugleich berücksichtigen, so würden die Formeln gar nicht mehr zu übersehen sein. Ich setze in die Gleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + y \cdot \frac{dx}{dt} + z \cdot x = 0 \qquad 54)$$

x und seine Differentialquotienten aus Gl. 53 ein, bestimme y und z nach der Methode der unbestimmten Coefficienten, und ersetze B und Γ durch x und seine Derivirten. Dabei geht auch t aus den Ausdrücken für y und z heraus, dieselben werden Functionen von x und dx/dt.

1) Chwolson, Allgemeine Theorie der magnetischen Dämpfer. Mém. de l'acad. Imp. de St.-Pétersbourg. VII-e Série, Tome XXVIII. 1880.

Die Differentialgleichung für erzwungene Schwingungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{dx}{dt} + zx = J\cos 2\pi nt \tag{55}$$

muss als Integral jedenfalls einen Ausdruck von der Periode $2\pi n$ haben. Also versuche ich als Lösung zu setzen

$$x = a\cos(2\pi nt - \varepsilon) \tag{56}$$

Berechnet man hiermit y und z, welche vorhin als Functionen von x und dx/dt gefunden wurden, so folgt das überaus einfache Resultat:

$y = 2\varkappa_0(1 + \alpha a)$ $\quad z = 4\pi^2 m_0^2$ $\quad$ für den Fall, wo $p = 0$ gesetzt war,
und $y = 2\varkappa_0$ $\quad z = 4\pi^2(m_0 - pa)^2$ für den Fall, wo $\alpha = 0$.

Das heisst also: *Für Phasendifferenz und Amplitude bei erzwungenen Schwingungen sind diejenige Verstimmung und dasjenige Decrement maassgebend, welche der erreichten Amplitude zukommen.*

Für alle Glieder, welche hierbei vernachlässigt wurden, habe ich die Maximalwerthe, welche dieselben bei meinen Versuchen erreichen konnten, berechnet. Der Betrag der vernachlässigten Glieder war geringer, als der der Beobachtungsfehler der Hauptglieder. Ob freilich derselbe Grad von Annäherung zum Vorschein kommen würde, wenn man die Veränderung von Decrement und Verstimmung zugleich in Rechnung zieht, muss ich dahingestellt sein lassen.

Ferner haben die Versuche mit constant erregtem Electromagnet gezeigt, dass es nicht so ohne weiteres statthaft ist, die auf die Stimmgabel wirkende electromagnetische Kraft durch einen Cosinus der Zeit auf der rechten Seite der Gleichung darzustellen. Wir haben vielmehr — für unendlich kleine Amplituden — die Gleichung gefunden:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\varkappa\frac{dx}{dt} + 4\pi^2 m^2 x = -\frac{c}{e^2}\cdot i^2 + \frac{2c}{e^3}\, i^2\cdot x \tag{51}$$

Der intermittirende Strom kann allemal dargestellt werden durch eine Reihe:

$$i = i_0 + \sum_1^\infty{}^h\, i_h\cos(2\pi hnt - \varphi_h) \tag{57}$$

$$\text{Also } i^2 = i_0^2 + 2i_0\sum_1^\infty{}^h\, i_h\cos(2\pi hnt - \varphi_h) + \left[\sum_1^\infty{}^h\, i_h\cos(2\pi hnt - \varphi_h)\right]^2 \tag{58}$$

$$\begin{aligned}\left[\Sigma\right]^2 &= \sum_1^\infty{}^h\sum_1^\infty{}^k\, i_h i_k\cos(2\pi hnt - \varphi_h)\cdot\cos(2\pi knt - \varphi_k)\\ &= \sum_1^\infty{}^h\sum_1^\infty{}^k\,\frac{i_h i_k}{2}\left\{\cos(2\pi\,\overline{h+k}\,nt - \varphi_h - \varphi_k) + \cos(2\pi\,\overline{h-k}\,nt - \varphi_h + \varphi_k)\right\}\end{aligned} \tag{59}$$

Für $h = k$ folgt aus dem zweiten Cosinus eine Reihe von Gliedern, welche nicht mehr periodisch sind, nämlich $\sum_1^\infty {}^h \frac{i_h^2}{2}$. Für $h = k + 1$, für $k = h + 1$ kommen Glieder von der einfachen Periode $2\pi n$:

$$\sum_1^\infty {}^k \frac{i_{k+1}\, i_k}{2} \cos(2\pi nt - \varphi_{k+1} + \varphi_k) + \sum_1^\infty {}^h \frac{i_h\, i_{h+1}}{2} \cos(-2\pi nt - \varphi_h + \varphi_{h+1}) =$$

$$= \sum_1^\infty {}^h i_h\, i_{h+1} \cos(2\pi nt + \varphi_h - \varphi_{h+1}) = J_1 \cos(2\pi nt - \phi_1) \qquad 60)$$

Ebenso kommen — nun auch aus dem ersten Cosinus — Glieder von der doppelten, dreifachen Periode u. s. f. Also ist

$$\left[\Sigma\right]^2 = \sum_1^\infty {}^h \frac{i_h^2}{2} + \sum_1^\infty {}^h J_h \cos(2\pi hnt - \phi_h) \qquad 61)$$

und

$$i^2 = i_0^2 + \sum_1^\infty {}^h \frac{i_h^2}{2} + \sum_1^\infty {}^h I_h \cos(2\pi hnt - \Phi_h) \qquad 62)$$

wenn

$$I_h \cos(2\pi hnt - \Phi_h) = 2 i_0 i_h \cos(2\pi hnt - \varphi_h) + J_h \cos(2\pi hnt - \phi_h) \qquad 63)$$

Dann wird die Differentialgleichung 51:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\varkappa \frac{dx}{dt} + 4\pi^2 m^2 x = -\frac{c}{e^2}\left(i_0^2 + \sum_1^\infty {}^h \frac{i_h^2}{2}\right) + \frac{2c}{e^3}\left(i_0^2 + \sum_1^\infty {}^h \frac{i_h^2}{2}\right) \cdot x +$$

$$+ \left(-\frac{c}{e^2} + \frac{2c}{e^3}\, x\right) \sum_1^\infty {}^h I_h \cos(2\pi hnt - \Phi_h) \qquad 64)$$

Das erste Glied bedeutet eine Aenderung der Ruhelage, kommt also nicht weiter in Betracht. Das zweite Glied ist nach links zu bringen, und von $4\pi^2 m^2 x$ zu subtrahiren. Es bedeutet also eine Aenderung der Eigenperiode der Gabel. Nicht mehr die der freien Gabel zukommende Schwingungszahl m ist es, deren Differenz mit der Schwingungszahl der periodischen Kraft die Phasendifferenz und Amplitude der erzwungenen Schwingung bestimmt. An Stelle von m tritt

$$m_1 = m - \mu\left(i^2 + \sum_1^\infty {}^h \frac{i_h^2}{2}\right) \qquad 65)$$

Das dritte Glied repräsentirt die periodische Kraft, welche die erzwungenen Schwingungen hervorbringt und unterhält. In demselben kann man $2cx/e^3$ gegen c/e^2 vernachlässigen, da diese Entwicklungen nur für unendlich kleine Amplituden giltig sein sollen. Ferner kommt von der Cosinusreihe auch nur das erste Glied in Betracht, wenn wir die Festsetzung machen, dass m nahe gleich n sei. Dann bleibt die Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\varkappa \frac{dx}{dt} + 4\pi^2 m_1^2 x = -\frac{c}{e^2} I_1 \cos(2\pi nt - \Phi_1) \qquad 66)$$

wo $I_1 \cos(2\pi nt - \Phi_1) = 2\, i_0 i_1 \cos(2\pi nt - \varphi_1) + \sum_1^\infty{}^h\, i_h\, i_{h+1} \cos(2\pi nt + \varphi_h - \varphi_{h+1})$ 67)

Der Ableitung dieser Formeln lag die Annahme zu Grunde, dass in jedem Augenblicke das in den Stimmgabelzinken inducirte magnetische Moment dem Magnetismus des Electromagnetes proportional sei. Wenn man aber bedenkt, dass die stählernen Stimmgabelzinken jedenfalls eine bedeutende Trägheit im Annehmen und Verlieren des inducirten Magnetismus haben müssen, so erscheint es fraglich, ob die gemachte Voraussetzung giltig ist. Es ist vielmehr wahrscheinlich, dass der in den Stimmgabelzinken inducirte Magnetismus im Verlaufe einer Schwingung nur eine relativ geringe Oscillation um seinen Mittelwerth, welcher dem i_0 proportional ist, vollführt. Dann aber wäre die Attraction des Electromagnetes nicht mehr schlechtweg proportional i^2, sondern sie würde sich dem Grenzfalle nähern, wo sie proportional $i \cdot i_0$ ist. In diesem Grenzfalle aber nimmt die Differentialgleichung die Form an:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\varkappa \frac{dx}{dt} + 4\,\pi^2 m^2 x = -\frac{c i i_0}{(e+x)^2} = -\frac{c}{e^2} i_0 i + \frac{2c}{e^3} i_0 i\, x$$

$$= -\frac{c}{e^2} i_0^2 + \frac{2c}{e^3} i_0^2 .\, x - \frac{c}{e^2} i_0 \left(1 - \frac{2x}{e}\right) \sum_1^\infty{}^h\, i_h \cos(2\pi h n t - \varphi_h) \qquad 68)$$

Lassen wir wie früher das erste und letzte Glied rechts fort, und nehmen auch von der Cosinusreihe nur das erste Glied, so haben wir:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\varkappa \frac{dx}{dt} + 4\,\pi^2 m_i^2 x = -\frac{c}{e^2} i_0 i_1 \cos(2\pi nt - \varphi_1) \qquad 69)$$

wo

$$m_i = m_0 - \mu\, i_0^2$$

Weder die periodische Kraft, noch die Aenderung der Eigenperiode sind in diesem Falle von den höheren Gliedern der Cosinusreihe beeinflusst. Je weniger also der in den Stimmgabelzinken inducirte Magnetismus im Verlaufe einer Schwingung sich von seinem Mittelwerthe entfernt, um so geringer wird auch der Einfluss der höheren Glieder in der Fourier'schen Reihe, welche den Verlauf des Stromes darstellt, auf die Kraft sein, welche die Bewegung der Stimmgabel hervorruft.

Die Bewegung der primären Gabel, welche den Strom intermittirend macht, sei gegeben durch

$$y = b.\ \cos 2\,\pi nt. \qquad 70)$$

Dann ist Φ_1, resp. φ_1, die Phasendifferenz zwischen der Bewegung dieser Gabel und dem Verlaufe der Kraft.

Macht man die Voraussetzung, dass die Verzögerung des Magnetismus im Electromagnet nur durch Selbstinduction verursacht sei, so bietet die Berechnung der Coefficienten in Fourier's Reihe keine Schwierigkeit. Die i_h sind bei constanter

Tonhöhe alle dem i_0 proportional, woraus die Berechtigung hergeleitet werden mag, unserer Differentialgleichung die Form zu geben:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\varkappa_i \frac{dx}{dt} + 4\pi^2 m_i^2 x = -Ci^2 \cos(2\pi nt - \varphi) = Ci^2 \cos(2\pi nt - \varphi - 180^0) \quad 71)$$

$$\varkappa_i = \varkappa + \gamma' i^2 \qquad m_i = m_0 + \mu' i^2 \quad 72)$$

i bezeichnet wie früher die galvanometrische Stromstärke, welche ja mit i_0 identisch ist. γ' und μ' sind mit Indices versehen worden, um sie von den Coefficienten γ und μ zu unterscheiden, welche für die Versuche mit constantem Strom galten.

Auf Grund dieser Erörterungen war also experimentell zu untersuchen, ob in der That Phasendifferenz und Amplitude der erzwungenen Schwingungen sich berechnen liessen aus den Gleichungen

$$tan\,\varepsilon = \frac{\varkappa}{2\pi(m-n)\left(1+\frac{m-n}{2n}\right)} \quad 73)$$

$$a = \frac{Ci^2 \sin\varepsilon}{4\pi n\varkappa} \quad 74)$$

Die Phasendifferenz ε kann nicht direct beobachtet werden, sondern nur die Differenz der beiden Gabeln G_I und G_{II}

$$\psi = \varepsilon + \varphi + 180^0 \quad 75)$$

Schliesst man, während die primäre Gabel G_I selbstthätig electromagnetisch mit constanter Amplitude schwingt, den Stromkreis von G_{II}, so wird auch diese Gabel in erzwungene Schwingungen versetzt. Die Beobachtung der Lissajous'schen Ellipse im Fernrohre zeigt, dass die Amplitude von G_{II} anfangs Schwebungen vollführt, hervorgerufen durch die Existenz freier Schwingungen neben den erzwungenen, wie dies auch von dem vollständigen Integral der Differentialgleichung verlangt wird. Die freie Schwingung verschwindet jedoch mit der Zeit, und es bleibt die erzwungene allein übrig. Der Eintritt dieses Endzustandes kann durch passendes Oeffnen und Schliessen des Stromes wesentlich beschleunigt werden. Amplitude und Phase sind constant geworden, die Ellipse ist unbeweglich. Ihre Gleichung ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\psi = \sin^2\psi \quad 18)$$

Man erhält für $x = 0$ . . . . $y_0 = b \sin\psi$
für $y = 0$ . . . . $x_0 = a \sin\psi$

Liest man also die Amplituden der beiden Gabeln sowie die Durchschnittspuncte der Ellipse mit den Coordinatenaxen am Micrometer ab, so hat man Amplitude und Phase bestimmt, denn es ist

$$\sin \varphi = \frac{x_0}{a} = \frac{y_0}{b} \tag{76}$$

Sind diese Brüche schon nahe gleich 1, so wird die Bestimmung von φ aus dem Sinus ungenau, und man benutzt besser den Cosinus

$$\cos \varphi = \frac{x_b}{a} = \frac{y_a}{b} \tag{77}$$

x_b ist die Abscisse für $y = b$, y_a die Ordinate für $x = a$, doch lassen diese Coordinaten sich nicht so scharf ablesen, wie x_0 und y_0. Bei der Mittelbildung aus den beiden Zahlen für *sin*, resp. *cos* habe ich stets auf ihr ungleiches Gewicht Rücksicht genommen. Um zu erfahren, in welchem Quadranten φ liegt, muss stets auch die Lage der Ellipse notirt werden — ob sie nach rechts, ob nach links geneigt. Doch gestattet auch dies noch nicht die Unterscheidung zwischen dem ersten und vierten sowie zwischen dem zweiten und dritten Quadranten. Hierzu ist noch die Kenntniss der Richtung erforderlich, in welcher die Ellipse von dem Lichtpuncte durchlaufen wird. Mit Hilfe eines Stroboscopes constatirte ich durch vorläufige Versuche, in denen verschiedene Stromstärken zur Anwendung kamen, dass im Falle starker Verstimmung ($\tan \varepsilon$ sehr klein) φ zwischen 180^0 und 270^0 lag, wenn $m - n$ positiv war, zwischen 360^0 und 450^0 aber, wenn $m - n$ negativ war. Aber auch ohne diese Versuche hätte bei den späteren Beobachtungsreihen keine Unsicherheit aufkommen können über den Quadranten, in welchen φ zu verlegen sei. Die Art, in welcher die Ellipse sich beim Abschwingen verändert, ich meine die fortschreitende Verwandlung der Phase, giebt in Verbindung mit der Kenntniss des Vorzeichens von $m - n$ stets den Quadranten mit Sicherheit an.

Um zu Phasendifferenz und Amplitude auch die Verstimmung zu erhalten, liess ich G_{II}, nachdem Stromstärke und Constanten der Ellipse notirt waren, abschwingen. Dabei registrirte ich die Umkehrzeiten der Ellipse, sowie einige Amplitudendurchgänge. Letztere dienten zur Berechnung der Constanten B in Formel 42. x_0, a und p waren ja schon vorhanden: also erhält man auch $m_0 - n$. Es kam aber vor, dass die Verstimmung so klein war, dass sie nicht mehr gemessen werden konnte nach diesem Verfahren. Hier half bei den neuen Versuchen die Schraube im Laufgewichte von G_I aus. Aus ihrer Stellung und den benachbarten Beobachtungen konnte $m_0 - n$ mit Sicherheit interpolirt werden. Es versteht sich, dass da, wo ich beim Abschwingen Umkehrzeiten registrirte, ich auch stets b notirte. War b ein wenig anders, als während der erzwungenen Schwingung, so wurde durch Hinzufügung einer Correction $q \cdot \triangle b$ die Verstimmung während der erzwungenen Schwingung ermittelt. Die Zahlen $(m_0 - n)$ in der Tab. XV gelten also alle für diejenige Amplitude von G_I, welche als Constante der Ellipse notirt war. In der Tabelle ist auch angeführt $m_a - n$, erhalten als $m_0 - n - p.a.$ Wir hatten $p = 0{\cdot}164$ gefunden, a war mit den Constanten der Ellipse notirt. Die

Amplituden a sind nicht die direct abgelesenen Zahlen; die Stromstärke war nicht immer ganz dieselbe, ich reducirte daher alle Amplituden auf $i = 0{\cdot}383$, unter der Annahme, dass die Amplitude proportional i^2 sei. (Gl. 74). Daher rührt die zweite Decimale der a. Diese reducirten Zahlen sind in der Tabelle aufgeführt.

Tab. XV. (10/II 1890).

Beob.-Nr.	ψ	a	$m_0 - n$	$m_a - n$	$m_{ai} - n$	$90 - \varepsilon = 270 + \varphi - \psi = 283{\cdot}3 - \psi$
8	367°2	2·49	− 13·73	− 14·13	− 14·75	− 83·9
19	365·6	3·17	− 10·69	− 11·21	− 11·85	− 82·3
18	357·9	5·78	− 3·86	− 4·89	− 5·60	− 74·6
9c	347·5	8·38	− 1·57	− 2·95	− 3·62	− 64·2
a	344·9	8·58	− 1·24	− 2·65	− 3·32	− 61·6
b	343·8	8·78	− 1·35	− 2·79	− 3·47	− 60·5
17	342·1	9·16	− 1·18	− 2·72	− 3·41	− 58·8
16	323·1	13·07	+ 1·06	− 1·07	− 1·77	− 39·8
15	295·7	16·76	+ 3·08	+ 0·37	− 0·34	− 12·4
10	289·3	16·99	+ 3·73	+ 0·96	+ 0·23	− 6·0
11	234·8	12·73	+ 6·04	+ 4·01	+ 3·32	+ 48·5
12	208·2	5·47	+ 9·49	+ 8·59	+ 7·94	+ 75·1
13	198·2	2·10	+ 21·19	+ 20·85	+ 20·22	+ 85·1

Man findet in der Tabelle die Beobachtung № 9 mit a, b, c angeführt. Dies hängt so zusammen. Die Ellipse war vollständig constant geworden, und ich hatte die a, b, x_0, y_0 notirt, als plötzlich eine Veränderung eintrat. Nach erreichter Constanz trat nochmals eine Aenderung ein: so erhielt ich 3 Beobachtungen, welche ich für gleichwerthig halte. Ursache der Veränderung müssen die Schwankungen der Amplitude b gewesen sein, wodurch n, also auch die Verstimmung $m - n$ sich änderte. Der neuen Verstimmung mussten sich dann auch Phasendifferenz und Amplitude anpassen.

Die Resultate dieser Beobachtungen sind in Tafel II graphisch dargestellt. Die beobachteten Phasendifferenzen ψ dienen als Abscissen, Ordinaten sind in Fig. 8 die Amplituden a, in Fig. 9 die Verstimmungen $m - n$.

Um nun Theorie und Erfahrung vergleichen zu können, bedarf man zuerst noch einer Bestimmung der Grösse φ, welche wir die Verzögerung des Magnetismus nannten. Man kann φ sowohl aus der Curve der Amplituden, als auch aus der Curve der Verstimmungen erhalten. Beide Bestimmungen basiren auf dem Satze der Theorie, dass mit den Grenzwerthen $m - n = \pm \infty$ $a = 0$ und $\varepsilon = 0$, resp. 180° verbunden sei. Die Grenzwerthe von ψ sind also $180° + \varphi$ und $360° + \varphi$. Dies graphische Verfahren ist hier allein anwendbar, und man darf es demselben nicht zum Vorwurf machen, dass es eine

Extrapolation involvire. Dadurch, dass letztere an beiden Enden jeder Curve stattfindet, und die constante Differenz von 180° für die 2 Endwerthe von ψ vorgeschrieben ist, geschieht vielmehr die Ermittelung der Verzögerung φ aus den beiden Curven mit grosser Sicherheit. Ich finde aus Fig. 8 und 9 $\varphi = 13{\cdot}3°$.

Meine älteren Versuche v. J. 1885 bestanden aus 3 Beobachtungsreihen, in denen die Stromstärke 1·45, resp. 0·77 und 0·43 Ampère betrug. Die Schwingungszahl der damals benutzten Gabel war grösser, $n = 46{\cdot}57$, auch Contactspitze und Electromagnet nicht ganz dieselben. Die 3 Beobachtungsreihen ergaben das Resultat: $\varphi = 37{\cdot}3 - 36{\cdot}5 - 34{\cdot}0°$. Also ändert sich φ jedenfalls nur in sehr geringem Maasse mit der Stromstärke.

Die „beobachtete“ Phasendifferenz ε kann man nun erhalten als $\psi - \varphi - 180°$. In die Tabelle habe ich aufgenommen nicht ε, sondern $90° - \varepsilon$; das ist also der Winkel, um welchen die Phase von 90°, der Phase des maximalen Mitschwingens, abweicht. Man gewinnt hierdurch eine bessere Uebersicht, denn nach der Theorie soll die Verstimmung 0 sein, wenn $90° - \varepsilon = 0$, und es sollen Verstimmung und dieser Winkel mit gleichem Vorzeichen zunehmen und abnehmen. Fassen wir nun zunächst das Verhältniss von Phasendifferenz und Amplitude in's Auge.

Fig. 8 giebt die Amplituden als Function der Phasedifferenzen wieder, die Kreuzchen stellen die Beobachtungen dar. Drei Linien sind zum Vergleiche beigefügt. Die gestrichelte Curve ist eine Sinuslinie, welche die grösste der beobachteten Amplituden in sich aufnimmt. Die beiden anderen Curven sind berechnet nach Gl. 74, wobei für x gesetzt wurde $x_{ai} = x_{0i}(1 + \alpha a)$. α wurde aus den Gleichungen p. 35 gefunden zu $\alpha = 0{\cdot}0534$, und $x_{0i} = 7{\cdot}755 + 3{\cdot}713 \cdot (0{\cdot}383)^2 = 8{\cdot}30\ M$. Von den beiden ausgezogenen Curven schliesst sich die untere den kleineren Amplituden bis $a = 10$ recht gut an, sie ist berechnet mit $Ci^2/4\pi n x_{0i} = 26{\cdot}8$. Die andere, berechnet mit $Ci^2/4\pi n x_{0i} = 32{\cdot}4$, giebt die grösseren Amplituden wieder, nur $a = 13$ bei $\psi = 323°$ liegt zwischen den beiden Curven, gerade auf der Sinuslinie. Das Ergebniss ist unbefriedigend für die Theorie, und meine älteren Versuche v. J. 1885 hatten wol eine bessere Uebereinstimmung erwarten lassen. Ich hatte damals 3 Versuchsreihen angestellt bei verschiedenen Stromstärken, welche sich nahe wie 4:2:1 verhielten. In den beiden ersten Reihen konnte die Maximalamplitude nicht erreicht werden. Sie war viel zu gross, und so erhielt ich von der Amplitudencurve nur die beiden Enden. In der Formel 74 war für die erste Beobachtungsreihe $C/4\pi n = 2{\cdot}3$, für die zweite 3·0, für die dritte 2·6. Hiermit ist bewiesen, dass das i^2 in der Gleichung richtig ist, daher reducirte ich auch die neueren Versuche in dieser Weise. x_{ai} hatte ich, ebenso wie jetzt, aus Versuchen mit constantem Strom berechnet. In der ersten Beobachtungsreihe waren die Bestandtheile des Decrementes x_0 und γi^2 resp. gleich 14·7 und 51·0 — also die electromagnetische Dämpfung viel stärker als die natürliche. In der zweiten Reihe waren die Zahlen 13·9 und 14·3, in der dritten 14·0 und 4·4. Dass d' Constan

ten C unter diesen Verhältnissen noch so nahe gleich gefunden wurden, ist doch sehr bemerkenswerth. Die dritte Beobachtungsreihe enthielt nun auch die Maximalamplitude im Messungsbereich, doch war sie sehr unvollständig. Der erste Quadrant enthielt nur zwei Beobachtungen, bei $\varepsilon = 4°$ und $\varepsilon = 24°$. Dann fingen erst bei $\varepsilon = 104°$ die Beobachtungen an häufiger zu werden. Die linke Seite fügte sich nun ganz gut der berechneten Curve, die einzige Beobachtung rechts aber fiel stark heraus. Daraus allein durfte man noch nicht auf eine Asymmetrie der Amplitudencurve schliessen, doch muss ich die Thatsache erwähnen, denn jetzt zeigt in Fig. 8 $a = 12{\cdot}7$ bei $\varepsilon = 41{\cdot}5°$ eine Abweichung in demselben Sinne, und ungefähr von gleichem Betrage. Ich halte es daher für wahrscheinlich, dass die Amplitudencurve nicht symmetrisch ist, und dass sie im ersten Quadranten von ε eine stärkere Ausbauchung zeigt, als im zweiten. Vielleicht ist auch das Maximum um einen geringen Betrag in den ersten Quadranten hinein verschoben. Doch sind dies nur Vermuthungen, das vorliegende Material gestattet leider keinen sicheren Schluss in dieser Richtung. Die Verstimmungen, mit welchen man bei diesen Versuchen zu operiren hat, sind so ausserordentlich gering, dass die Inconstanz in b meine Vorausberechnungen für die Einstellung der Stimmschraube illusorisch machte, denen zufolge die Beobachtungen gleichmässig über das ganze Gebiet vertheilt sein sollten.

Wenden wir uns nun dem Zusammenhange von Phasendifferenz und Verstimmung zu.

Die Theorie lieferte die Formel

$$tan\,\varepsilon = \frac{x}{2\pi(m-n)\left(1+\frac{m-n}{2n}\right)} \tag{73)}$$

Im Nenner hatten wir schon früher ein von x^2/n abhängiges Glied vernachlässigt, weil es weit unterhalb der Genauigkeitsgrenze lag, welche den Bestimmungen von $(m-n)$ gezogen ist. Man kann aber die Formel noch weiter vereinfachen, denn es ist:

$$\frac{x}{2\pi(m-n)\left(1+\frac{m-n}{2n}\right)} = \frac{x}{2\pi(m-n)} - \frac{x}{4\pi n}$$

Die Messung von ε ist fast bis auf einen ganzen Grad unsicher, also kann der Term $x/4\pi n$ jedenfalls vernachlässigt werden, so lange er kleiner ist als 0·001, denn ein solcher Fehler in der Tangente würde selbst in den ersten Graden einen Fehler von nur $^1/_{20}{}^0$ in ε veranlassen. Bei meinen Versuchen ist diese Vernachlässigung stets weit geringer, wir benutzen also in Zukunft die Formel

$$m - n = \frac{x}{2\pi} \cdot tan\,(90° - \varepsilon) \tag{78)}$$

Auch hier benutze ich nicht ε als Argument, sondern $90° - \varepsilon$, wie schon in der Tabelle.

Halten wir uns nun weiter an Fig. 9 bei der Discussion. Die gestrichelte Curve ganz rechts, welche mit $m_0 - n$ bezeichnet ist, stellt den gefundenen Zusammenhang von Phasendifferenz und Verstimmung dar, wenn man, im Sinne der Rayleigh'schen Theorie, nur die Schwingungszahl für unendlich kleine Schwingungen m_0 in Betracht zieht. Wie augenfällig ist hier die Abweichung von der einfachen Theorie! Wie deutlich zeigt diese Curve, dass die Abnahme der Schwingungszahl mit wachsender Amplitude, eine äusserst kleine Grösse für sich betrachtet, hier entscheidenden Einfluss erlangt auf den Gang der Erscheinungen. Nicht $m_0 - n = 0$ liefert die günstigste Phase $\varepsilon = 90^0$, sondern eine Verstimmung von fast 4 M. Dieselbe Verstimmung, negativ, macht $\varepsilon = 165^0$, und bringt die Amplitude auf $^4/_{10}$ der Maximalamplitude herunter. Bei $m_0 - n = 0$ stellt sich ein $\varepsilon = 140^0$. Dabei sind die Amplituden noch sehr klein, mit denen ich experimentirte. Meine Maximalamplitude entspricht einer Winkelbewegung des Spiegels von 0·45°; die lineare Excursion des Zinkenendes ist 4 *mm* (Doppelamplitude), bei 375 *mm* Zinkenlänge.

Die nächste Curve, bezeichnet mit $m_a - n$, trägt der Abhängigkeit der Schwingungszahl von der Amplitude Rechnung. Sie giebt die Verstimmung der secundären Gabel bei der Amplitude der erzwungenen Schwingung an. Aber wie man sieht, reicht auch diese Vervollständigung der Theorie nicht im mindesten aus, es bleibt immer noch eine Verstimmung von + 1·1 M bestehen, bei der „günstigsten Phase" $\varepsilon = 90^0$, und man muss um 22° weiter gehen, um $m_a - n = 0$ zu erlangen. Diese Differenz ist der Effect der unmittelbaren Einwirkung des Electromagnetes auf die Tonhöhe der untersuchten Gabel, die theoretischen Entwicklungen von p. 42—45 finden hier ihre Bestätigung.

Ich habe noch versucht, ob im Sinne von p. 44 eine Identität von μ und μ' vorhanden, und habe desshalb in die Tabelle eine Columne $(m_{ai} - n)$ aufgenommen, welche nach Gl. 49, p. 39, berechnet ist. Diese Zahlen sind auch in das Diagramm aufgenommen, ihnen entspricht bei jeder Phasendifferenz das dritte, am meisten nach links gelegene Kreuzchen. Ich habe keine Curve hindurch gelegt, um die Figur nicht noch mehr zu überladen. Doch man sieht auch so, dass diese Reduction noch nicht ausreichend gewesen ist. Dies kann nicht Wunder nehmen, denn μ ist aus Beobachtungen bei constantem Strom abgeleitet worden, wo die Tonänderung einfach proportional ι^2 ist, während hier, bei intermittirendem Strom, nach p. 42 auch die Quadrate der höheren Glieder in der Fourier'schen Reihe mitwirken.

Wir können aber weiter durch eine Parallelverschiebung $m - n = 0$ mit $\varepsilon = 90^0$ zur Coincidenz gebracht denken, und nun den Versuch machen, nach Gl. 78 berechnete Verstimmungen mit den Beobachtungen zu vergleichen, um den Einfluss der Dämpfung auf die Phasendifferenz zu controliren. Drei berechnete Curven sind in das Diagramm eingezeichnet, sie schneiden natürlich sämtlich die Nulllinie der Ver-

stimmung bei $\varepsilon = 90^0$. Von den beiden ausgezogenen Linien ist die steilere, bezeichnet mit x_{ai}, berechnet nach der Formel

$$m - n = \frac{x_{0i}(1 + \alpha a)}{2\pi} tan(90^0 - \varepsilon)$$

Es war $x_{0i} = 8{\cdot}30$, wie wir vorhin sahen. Diese Curve ist zu steil, wie man sieht, es muss ein grösseres Decrement in Rechnung gesetzt werden. Die zweite ausgezogene Linie ist berechnet als $1{\cdot}52(1 + \alpha a) tan(90^0 - \varepsilon)$; ihr würde $x_{0i} = 9{\cdot}55$ entsprechen. Durch eine Parallelverschiebung kann diese Linie ganz gut mit den Kreuzchen für $m_{ai} - n$ zur Deckung gebracht werden. Daraus folgt, dass eine Theorie der electromagnetischen Anregung, welche die Abhängigkeit der Schwingungszahl und des Decrementes von der Amplitude, sowie die Veränderung dieser Constanten durch directe Einwirkung des Electromagnetes in Rücksicht zieht, wol geeignet ist, den Gang der Erscheinungen wiederzugeben, in den Genauigkeitsgrenzen meiner Versuche.

Wir haben bisher im Wesentlichen nur die Beobachtungen, welche in der Mitte der Curve liegen, in Betracht gezogen. Bei grösseren Werthen von $90^0 - \varepsilon$ ist die Aenderung der Verstimmung mit der Phase so stark, dass diese Beobachtungen an den Enden der Curve nicht dazu dienen können, berechnete und beobachtete Verstimmung zu vergleichen. Doch in anderem Sinne sind sie gut zu verwerthen. Der Abstand der Curve von der Asymptote, also ε, resp. $180^0 - \varepsilon$ ist gleich $arc.\ tang. \frac{x}{2\pi(m - n)}$. Welchen Werth man für $m - n$ einfügt, ist von untergeordneter Bedeutung, die Beobachtungen geben also eine gute Controle für x ab. Ich habe desshalb in das Diagramm noch eine gestrichelte Linie aufgenommen, welche eine einfache Tangens-Linie ist. Bei kleinen Werthen von $90^0 - \varepsilon$ verläuft sie ja auch aequidistant zu den $m_{ai} - n$, aber bei der Annäherung an die Asymptoten wird die Abweichung augenfällig. Sollte die Tangens-Linie an den Enden den Beobachtungen sich anschliessen, so würde sie sehr viel steiler verlaufen müssen, würde in der Richtung des Pfeiles die Nulllinie durchschneiden. Man sieht hieraus, wie viel die Zunahme des Decrementes mit der Amplitude dazu beiträgt, die Curve in der Mitte flacher verlaufen zu lassen. Sie erleichtert also das Zustandekommen der „günstigsten Phase“ $\varepsilon = 90^0$.

Schon bei Besprechung der Amplituden erwähnte ich, dass bei meinen alten Versuchen vom Jahre 1885 die Berechnung des Decrementes nach der Formel $x_{ai} = (x_0 + \gamma i^2)(1 + \alpha a)$ sich bewährt hatte, ohne dass für den intermittirenden Strom eine Vergrösserung von γ nothwendig zu sein schien. Die kleine Tab. XVI möge dies vollends bestätigen. Sie enthält Resultate der Beobachtungsreihe mit stärkstem Strom.

Tab. XVI. (20/VII 1885).

ε beobachtet	2·0°	1·8	3·0	7·4	173·7	174·6	178·6	179·5
ε berechnet	1·2	2·5	3·6	7·8	173·9	175·4	177·8	178·6
Differenz	− ·8	+ ·7	+ ·6	+ ·4	+ ·2	+ ·8	− ·8	− ·9

Die Phasendifferenzen umfassen nur 7° an beiden Grenzen des Gebietes, doch zeigen die beobachteten und die berechneten Zahlen durch ihre Uebereinstimmung zur Genüge, wie wichtig die Correction der Dämpfung war; war doch das corrigirte $\varkappa_{0i} = 65·7$, gegen das uncorrigirte $\varkappa_0 = 14·7$. Dasselbe Resultat gaben die Beobachtungsreihen mit geringerer Stromstärke. Ueberall schien die Reduction mit γi^2 ausreichend zu sein. Ueber die Reduction der Verstimmungen wegen des Quadrates der Stromstärke konnte ich damals zu keinem feststehenden Ergebniss gelangen. Ich hatte nur wenige und viel zu ungenaue Beobachtungen der Verstimmung in der Nähe von $\varepsilon = 90°$, dazu nur auf der einen Seite der Nulllinie. Dass die uncorrigirte Curve für $m_u - n$ bei $\varepsilon = 90°$ noch weit entfernt lag von der Nulllinie war freilich sicher, weiter aber ging das Resultat nicht.

Suchen wir nun zusammenzufassen, was das Studium der erzwungenen Schwingungen uns gelehrt hat. Die einfache Theorie R a y l e i g h 's musste vervollständigt werden, um den Gang der Erscheinungen wiedergeben zu können. Dadurch complicirte sie sich aber in hohem Maasse, und verlor an Uebersichtlichkeit. Eher liess sich an den Curven der Einfluss der neuen Glieder demonstriren. D i e Z u n a h m e d e s D e c r e m e n t e s mit Amplitude und Stromstärke liess die Curve in der Mitte flacher verlaufen, erleichterte also das Erreichen der „günstigsten Phase" $\varepsilon = 90°$. D i e A b n a h m e d e r S c h w i n g u n g s z a h l bewirkte eine Verschiebung der Phasendifferenzen in's Gebiet der positiven Verstimmungen. Es muss also die mitschwingende secundäre Gabel ein wenig z u h o c h g e s t i m m t s e i n, u m d a s M a x i m u m d e r A m p l i t u d e z u e r z i e l e n. Je grösser man die Amplitude haben will, je stärker also der Strom ist, welchen man anwendet, um so grösser muss diese „günstigste Verstimmung" sein. Die einfache Theorie hatte eine andere „günstigste Verstimmung" verlangt. Die Gabel sollte um $\frac{\varkappa^2}{8\pi^2 n}$ z u t i e f gestimmt werden. Wir haben dies Glied schon lange vernachlässigt, denn es erwies sich viel zu klein, als dass man es je hätte nachweisen können.

Auch über die e l e c t r o m a g n e t i s c h e S e l b s t a n r e g u n g und über die Tonänderung, welche dieselbe verursacht, belehrt uns das Diagramm. In diesem Falle ist eine vorgeschriebene Phasendifferenz vorhanden, dieselbe beträgt $180° - \varphi$. Wol immer ist $\varphi < 90°$, wenn man nicht besondere Vorrichtungen zur Hilfe nimmt. Eine negative Verstimmung wird also entstehen. Aber es kommt noch hinzu die Tonänderung, welche i^2 proportional, und welche positiv ist. So kann bei einem grösseren Werthe von φ der Fall eintreten, dass $m - n$ positiv wird, dass bei hinreichend grosser Stromstärke d i e S c h w i n g u n g s z a h l d e r s e l b s t t h ä t i g e n

Gabel n kleiner ist, als die Schwingungszahl m der freien Gabel bei gleicher Amplitude. Dies ist nach meiner Meinung in Ettingshausen's Versuchen der Fall gewesen, wo dieser Autor bei kleinen Amplituden eine Tonerhöhung, bei grösseren Amplituden, also bei grösserer Stromstärke, dagegen eine Tonerniedrigung durch Selbstanregung fand. Die Verzögerung des Magnetismus war dort gross, auf p. 13 habe ich berechnet $\varphi = 79^\circ$. Auch die Ströme waren stark, die Amplituden gross, also alle Bedingungen für das Eintreten dieser Erscheinung vorhanden. Mit meinen Electromagneten hatte ich keine Aussicht, positive Tonänderungen zu erreichen, φ war zu klein. Dass solche möglich sind, auch wenn $\varphi < 90^\circ$, ist aber durch meine Versuche mit Sicherheit erwiesen.

Was hier über electromagnetische Anregung auf Grund von Stimmgabeluntersuchungen gesagt ist, muss in ähnlicher Weise für alle nach dem Principe des Neef'schen Hammers construirten Apparate gelten. Es wäre nun eine lohnende Aufgabe, zu untersuchen, wie weit durch passende Wahl der Abmessungen der Electromagnete hier maximale Amplituden bei möglichst geringen Stromstärken zu erzielen sind, indem man einerseits günstige Phase, andrerseits geringe dämpfende Wirkung des Electromagnetes erstrebt. Doch hat in jüngster Zeit Dvorák [1]) sich dem Studium dieser Apparate zugewandt, und seinen Bemühungen haben wir bereits Verbesserungen der bisher üblichen Constructionen zu verdanken.

---

1) Dvorák, Ueber die Wirkung der Selbstinduction bei electromagnetischen Stromunterbrechern. Wien. Ber. 98, II a, 55. 1889.
Zur Theorie und Praxis des electrischen Läutewerkes und verwandter Apparate. Z.-S. f. Instrumentenkunde, 10, 43, 1890.

Heerwagen, Schwingungsgesetze der Stimmgabel und electromagnetische Anregung

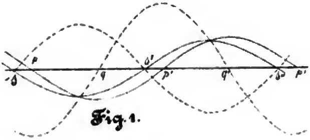


Fig. 1.

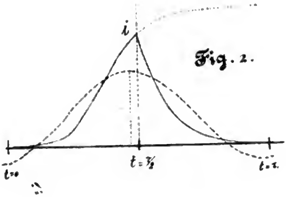


Fig. 2.

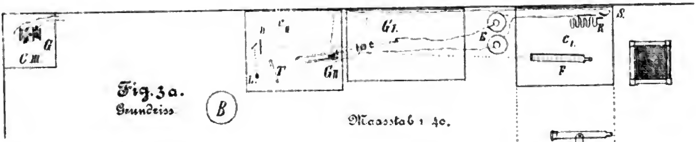


Fig. 3a.
Grundriss

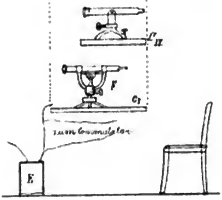


Fig. 3b.
Aufriss.

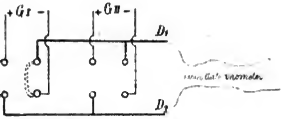


Fig. 5.

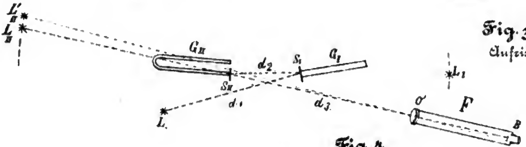


Fig 4

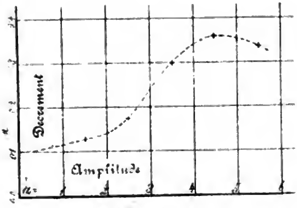


Fig. 6.

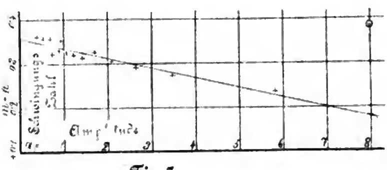
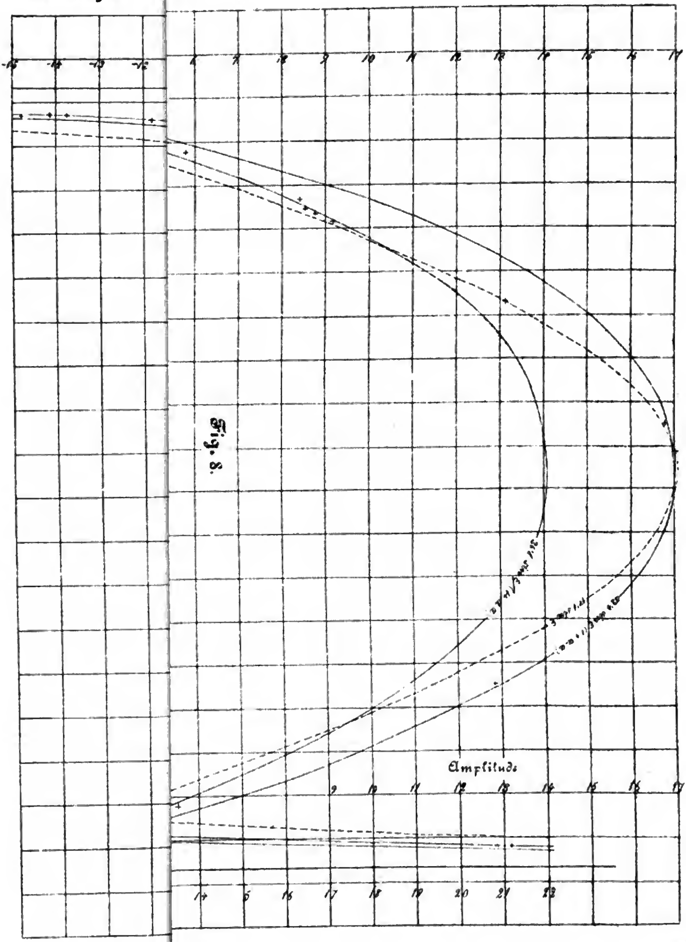


Fig. 7.

Heerwagen, Sc

Taf. II.



Schriften
herausgegeben von der Naturforscher-Gesellschaft
bei der Universität Dorpat.
VII

Die

Verwandtschaftsverhältnisse der Arthropoden.

Von

Dr. J. v. Kennel
o. ö. Professor der Zoologie.

Dorpat.
Druck von C. Mattiesen.
1891.
In Commission bei
K. F. Koehler in Leipzig. Th. Hoppe und E. J. Karow in Dorpat.

Schriften
herausgegeben von der Naturforscher-Gesellschaft
bei der Universität Dorpat.
VI.

Die
Verwandtschaftsverhältnisse der Arthropoden.

Von

Dr. J. v. Kennel
o. ö. Professor der Zoologie.

Dorpat.
Druck von C. Mattiesen.
1891.

In Commission bei
K. F. Koehler in Leipzig. Th. Hoppe und E. J. Karow in Dorpat

Gedruckt auf Anordnung der Naturforscher-Gesellschaft bei der Universität Dorpat.
Nr. 1.
Dorpat, 9. December 1891. Der Präsident: G. Dragendorff.

Bis vor Kurzem drückte sich in der zoologischen Literatur, besonders auch in den systematischen und vergl. anatomischen Darstellungen der Lehrbücher ganz allgemein mehr oder weniger deutlich die Anschauung von der Einheit des Arthropodenstammes aus. Die Unterabtheilungen der Crustacea, Myriapoda, Arachnoidea und Insecta wurden als gleichwerthige neben oder hinter einander gestellt; zwischen die beiden ersten Gruppen stellte man allenfalls noch die der Onychophora oder Protracheata, wenn man nicht vorzog, dieselbe mit den Myriapoden zu vereinigen oder ganz aus der Classe herauszunehmen und enger mit den Anneliden zu verbinden. Dass die Protracheata aber enge Beziehungen zu den mit Tracheen athmenden Arthropoden, speciell den Myriapoden haben, dürfte ziemlich allgemein angenommen werden. Die Bestrebungen, alle Arthropoden unter gleiche phylogenetische Beziehungen zu bringen, zeigen sich u. A. besonders in den Bemühungen, die verschiedenen Körperregionen und deren äussere Anhänge mit einander direct zu vergleichen und zu homologisiren; das kann aber nur geschehen, wenn man die einzelnen Arthropodengruppen direct von einander ableiten will, oder wenn man sie alle auf gemeinsame Vorfahren bezieht, die bereits eine Reihe von Characteren besassen, wie sie heute als gleichartige bei den Arthropoden vorhanden sind. Ich meine, wenn man die Antennen und Mundtheile der Insecten und Spinnen mit denen der Crustaceen oder einem Theil derselben homolog zu setzen versucht, so muss man annehmen, dass die gemeinschaftlichen Vorfahren beider bereits so hoch differenzirte Thiere waren, dass sie eine Gliederung des Körpers und an den einzelnen Segmenten verschiedenartig gebildete und functionirende Anhänge besassen, aus denen sich direct die der Arthropoden, der Krebse sowohl als der übrigen, entwickelt hätten. Während in diesen Beziehungen und einigen anderen die Vorfahren also schon die Entwicklungsrichtung den verschiedenen aus ihnen hervorgehenden Zweigen gleichartig vorschrieben, wären sie in anderen noch so undifferenzirt gewesen, dass sie der freien Anlage und Ausbildung der Organe weiten Spielraum liessen, z. B. hinsichtlich der Athmungs- und Geschlechtsorgane.

Besonders die ersteren sind in den Gruppen der Crustaceen und der tracheaten Arthropoden so verschieden, in jeder derselben aber, trotz mancher Abweichungen in Organisation und Function so gleichartig, dass in neuester Zeit mehr und

mehr die Nothwendigkeit hervortrat, die Gruppe der Arthropoden in zwei Stämme, die Branchiata und Tracheata zu theilen, die nur an ihrer Wurzel zusammenhängend sich in eigenartiger Weise entwickelt haben. Da aber in beiden Stämmen noch so viel gleichartiges vorhanden ist, wie die Segmentirung, das Chitinskelet, die Verschmelzung mehrerer Segmente zu grösseren Körperabschnitten, die gegliederten Extremitäten, die Umbildung solcher zu Mundwerkzeugen, die quergestreifte Muskulatur, die Ganglienkette, die facettirten Augen, das gegliederte Rückenherz, so durfte man die gemeinsame Wurzel nur so weit zurückverlegen, als man noch Thiere fand, die alle diese Eigenthümlichkeiten wenigstens in unverkennbarer Anlage und sicherer Vorzeichnung der Weiterentwicklung darboten.

In Peripatus haben wir nun eine Thierform kennen gelernt, von der ziemlich allgemein angenommen wird, dass sie den Vorfahren der Tracheaten sehr nahe steht; nicht nur das Vorhandensein der, wenn auch sehr einfachen, Tracheen berechtigt zu dieser Annahme, sondern eine Reihe anderer Verhältnisse: die in einem Paar vorhandenen praeoralen Antennen, die paarigen, mit Andeutung von Gliederung und mit Krallen versehenen Fussstummel, die Umwandlung einiger derselben zu Fang- und Fresswerkzeugen, das Vorhandensein eines Rückenherzens mit segmentalen Ostien und offenes Circulationssystem, die Geschlechtsorgane und eine Menge embryologischer Thatsachen aus der Entwicklung der Organe, welche auf die Entwicklung und ursprüngliche Bedeutung so mancher Organe der Tracheaten helles Licht zu werfen im Stande sind.

Peripatus besitzt aber auch Organisationsverhältnisse, die als typische Annelidencharactere bezeichnet werden müssen, nämlich wahre Segmentalorgane in jedem Rumpfsegment, sofern dieselben nicht, was embryologisch nachgewiesen ist, zu anderer Function umgebildet sind. Dazu kommen Augen vom Annelidentypus, ein Rest des Hautmuskelschlauchs, glatte Muskulatur und sog. Coxaldrüsen, die vielleicht auf Borstensäcke bezogen werden dürfen. Freilich zeigt Peripatus auch Verhältnisse, die weder mit typischen Anneliden noch mit Tracheaten übereinstimmen: das Nervensystem ist strickleiterförmig mit zahlreichen Queranastomosen, ohne eigentliche segmentale Ganglien; die Längsnervenstämme haben fast gleichmässigen Belag von Ganglienzellen; dadurch ist dieses Nervensystem auch von demjenigen mancher Anneliden verschieden, wo die Längsnerven weit von einander getrennt sind. Die Verhältnisse der Leibeshöhle stellen eine Zwischenstufe zwischen Anneliden und Tracheaten dar. Im Gegensatz zu Anneliden ist ein Parapodienpaar in die Mundöffnung hineingerückt als Kiefer, während wiederum bei Tracheaten mehrere Extremitätenpaare an die Peripherie der Mundöffnung gerückt als äussere Kauwerkzeuge functioniren. Indessen liegt in der Umwandlung eines zweiten Parapodienpaares zu den Schleimpapillen und der Nephridien desselben zu Speicheldrüsen ein Uebergang zu letzterem Verhalten.

In Folge dieser Verschiedenheiten wird man behaupten dürfen: wir kennen unter den Anneliden keine Uebergangsform zu Peripatus,

und Peripatus ist kein Durchgangsstadium in der Entwicklungsreihe der Tracheaten; man wird aber andrerseits die Ueberzeugung hegen können: 1) dass Peripatus einen in bestimmter Richtung weiterentwickelten Zweig einer unbekannten, vermuthlich ausgestorbenen, Annelidenfamilie von bereits hoher Organisationsstufe repräsentirt, und 2) dass die tracheaten Arthropoden, zunächst myriapodenähnliche Thiere, zwar nicht von den heutigen Peripatusarten, aber doch von ähnlichen Annelidenabkömmlingen herzuleiten sind. Die Stammeltern der Tracheaten sind homonom deutlich segmentirte Anneliden von hoher Entwicklungsstufe, aber in manchen Beziehungen abweichend von den jetzigen höchststehenden Anneliden und das Durchgangsstadium waren Peripatus ähnliche Thiere.

Mit dieser Anschauung, die, so viel ich beurtheilen kann, ziemlich verbreitet ist, stimmt auch überein, dass wir bei den Tracheaten keine primären Larvenformen, der Trochosphaeralarve [1]) der Anneliden entsprechend, finden. Dieselbe fehlt auch bereits bei Peripatus, dessen Arten sich zu einer directeren, abgekürzten Entwicklungsform aufgeschwungen haben — es müsste denn sein, dass man in den Embryonalhüllen der genannten Thiere noch die Reste der Trochosphaera sehen will, wie ich dies in meiner Abhandlung über die Embryologie des Peripatus wahrscheinlich zu machen suchte. Wie man sich zu dieser Frage übrigens stellen mag, ist für die vorliegende Untersuchung ziemlich gleichgültig. Aber der Mangel einer freilebenden primären Larve, die der Annelidentrochosphaera entspräche, ist von Bedeutung für die Frage nach der Verwandtschaft der Tracheaten und Branchiaten und der Abstammung der letzteren.

Die Crustaceen haben selbst bis in die höchsten Gruppen hinein, die doch in ihrer Art ebensoweit von der Stammform entfernt sind, wie beispielsweise die Insecten oder Spinnen, wenigstens zum Theil im Nauplius eine Larvenform, welcher allgemein Beziehungen zur Trochosphaera zuerkannt werden; diese Larve ist von den niedersten bis zu den höchsten Branchiaten so gleichartig und überall so niedrig organisirt, dass die Larven der Anneliden eine weitaus grössere Mannigfaltigkeit und Complication der Larvenorgane aufweisen. Dieses starre Festhalten einer Larvenform bis in die höchsten Zweige eines Thierstammes hinein berechtigt, dieser Larve eine besondere Bedeutung beizumessen, und man hat auch vielfach den Nauplius als eine Larve aufgefasst, welche der Stammform der Krebse sehr nahe steht. Was die Trochosphaera für die Anneliden, das wäre der Nauplius für die Crustaceen: ein Rotatorien-ähnliches (früher geschlechtsreifgewordenes Thier), aus dessen Längenwachsthum unter gleichzeitiger Segmentirung mit Wiederholung einzelner Organe die Urformen der Crustaceen hervorgegangen seien. Ob dabei die übrigen secundären

1) Ich sage „Trochosphaera“ und nicht „Trochophora“, weil jene Bezeichnung von Rey Lankester und Semper zuerst angewandt wurde. Der Umstand, dass eine Thiergattung Trochosphaera heisst, giebt nicht, wie Hatschek meint, ein Recht, den Namen der Larvenform zu ändern; wir sprechen auch von Cyprislarven, Mysisstadium etc. Es soll ja gerade durch den gleichen Namen die Uebereinstimmung ausgedrückt werden.

Krebslarven die phylogenetisch durchlaufene Reihe für die höheren Branchiaten darstellen, kann hier undiscutirt bleiben.

Nach dieser Anschauung würden die Branchiaten mit den Anneliden zusammen gleichweit zurückliegenden Ursprung aus Rotatorien-artigen Thieren haben, während die Tracheaten, wie gezeigt und meist angenommen wird, aus viel höher stehenden Formen, und zwar fertig segmentirten, hochstehenden Anneliden entsprungen wären. Von einer nahen Verwandtschaft der beiden Hauptstämme, die bisher als Arthropoden zusammengefasst wurden, wäre dann nicht die Rede, ihre Organisation wäre in jedem Stamm besonders zur Ausbildung gekommen und die Aehnlichkeiten nur durch convergente Entwicklungsrichtung erzeugt.

Die grosse Menge der vollkommenen oder annähernden Uebereinstimmungen zwischen Crustaceen und tracheaten Arthropoden lässt indessen eine derartige Consequenz etwas gewagt erscheinen. Manche Forscher verlegen daher neuerdings den Ursprung der Branchiaten in grössere Nähe der Tracheaten, wie ich das bereits weiter oben als Grundlage für die Möglichkeit angedeutet habe, die Organisationsverhältnisse beider Gruppen wirklich zu vergleichen, resp. einzelne Organe zu homologisiren. Zu diesen gehört auch Arnold Lang, welcher in seinem Lehrbuch der vergl. Anatomie pag. 419 ff. seine Anschauung über diese Frage entwickelt, und im Zusammenhang mit einer Begründung vorträgt, die man als Quintessenz der Stützpuncte für diese Auffassung ansehen kann. Eine Discussion derselben dürfte demnach zur Klärung der Frage beitragen.

Die erwähnte Anschauung ist niedergelegt in folgenden Sätzen: pag. 420:

> „Der Nauplius, als für die Krebse characteristische Larvenform, nicht aber als Stammform, wird in ungezwungener Weise durch die Annahme einer annelidenähnlichen Stammform der Krebse erklärt. Wie die Stammform der Krebse auf Anneliden zurückzuführen ist, so die Larvenform der Krebse auf die Larve der Anneliden. Charactere der erwachsenen Thiere treten überall im Thierreich in der Entwicklungsgeschichte immer früher auf. So treten bei den Krebsen Krebscharactere schon bei der der Trochophora der Anneliden entsprechenden Larve auf, es sind dies vor allem die 3 Beinpaare und der Rückenschild". Ferner pag. 421: „Der Nauplius ist eine typische Krebslarve; die Vorfahren der Krebse besassen noch keine typische Naupliuslarve, noch weniger stammen sie von einer naupliusähnlichen Stammform ab".

Auf das Oben gesagte angewendet heisst das: Die Branchiaten stammen ebenso, wie Peripatus und die Tracheaten von hochstehenden Anneliden ab, die nicht allzusehr von einander verschieden waren. Während aber die Tracheatenahnen bereits directe Entwicklung durchmachten, hatten die Stammeltern der Branchiaten noch eine freilebende ächte Trochosphaera, die auch bei letzteren beibehalten wurde. Je mehr Krebscharactere aber bei den Nachkommen auftraten, desto mehr wurde die Trochosphaeralarve von derjenigen der Anneliden verschieden, indem sie durch Rückwärts-

verlagerung eine Reihe von Eigenthümlichkeiten erhielt, die als Crustaceencharactere zu bezeichnen sind.

Der Anschauung, dass die Stammform der Krebse ein nauplinsähnliches Thier gewesen sei, stellt Lang allgemeine und specielle Gründe entgegen, die leider alle negativen Character tragen. Pag. 420 l. c. heisst es:

> „Allgemeine Gründe. 1) Wir kennen keine Thierform, welche im erwachsenen geschlechtsreifen Zustand einem Nauplius gliche. 2) Wir dürfen nicht ohne weiteres aus den frühen Larvenzuständen einer Thiergruppe auf frühe phylogenetische Formzustände schliessen. — Specielle Gründe. Bei der Annahme einer naupliusähnlichen Stammform bleibt das Problem der Entstehung der typischen Krebsorganisation, der Segmentation des Körpers, des gegliederten Bauchmarks, des segmentirten Rückenherzens ganz unerklärt. Es muss auch betont werden, dass die Ausführungsgänge der Geschlechtsorgane mit Ausnahme eines einzigen Falles in Körperregionen ausmünden, die beim Nauplius gar nicht vorhanden sind".

Dass wir nicht ohne Weiteres aus den frühen Larvenzuständen einer Thiergruppe auf frühe phylogenetische Formzustände schliessen dürfen, wird man zugeben müssen; denn es gibt eine Menge secundärer Larven, die durch Anpassung an bestimmte Lebensverhältnisse entstanden Erscheinungen für sich sind, wie z. B. die zahllosen Jugendzustände der Insecten, die allerhöchstens für ganz kleine Gruppen von Bedeutung sein können, um die Verwandtschaftsbeziehungen, d. h. einheitliche Herkunft zu erkennen. Man wird aus der Aehnlichkeit einer Blattwespenlarve mit einer Schmetterlingsraupe ebensowenig schliessen wollen, dass diese beiden Insectengruppen gleiche Vorfahren von Raupengestalt gehabt hätten, wie man aus der Mannigfaltigkeit der Fliegen- und Mückenlarven einen stark polyphyletischen Ursprung dieser Thiere erschliessen kann. Ein anderes aber ist es bei den primären Larven. Hier ist der Satz, dass die Ontogenie eine Wiederholung der Phylogenie ist, für unsere ganzen Anschauungen von so enormer Bedeutung, dass man nicht ohne schwerwiegende Begründung die Larven einer Thiergruppe als belanglos ausschliessen kann.

Gewiss bietet keine einzige Larve ein genaues Bild eines phylogenetisch durchlaufenen Formzustandes; denn es fehlen derselben vor allem die Fortpflanzungsorgane, deren Vorhandensein und deren Structur von wesentlicher Bedeutung für den früheren Körperbau und die wirklich durchlaufene Gestalt gewesen sein mussten. Ausserdem aber wird jede Entwicklung im Lauf der Zeit abgeändert; theilweise wird sie verkürzt, verschiedene Stadien zusammengezogen, einzelne zur Unkenntlichkeit verwischt und die Larve erscheint in einem recht unreifen Zustand und dennoch zu freiem Leben tauglich, theilweise erwerben die Larven während ihres freien Lebens durch Anpassung und Auslese besondere Charactere, die sie vom Typus des Thieres, das sie eigentlich recapituliren sollten, beträchtlich entfernt, — Eigenschaften, die aber auch wieder auf die Larven der Nachkommen vererbt werden, und endlich kommt dazu, dass „Charactere der erwachsenen Thiere in der Entwicklungsgeschichte immer

früher auftreten", wodurch ebenfalls das Bild des durch die Larve recapitulirten Stammthieres undeutlicher, ja vielfach ganz unkenntlich wird.

Der Satz: „wir kennen keine Thierform, welche im erwachsenen geschlechtsreifen Zustande einem Nauplius gliche" dürfte darum schlankweg verallgemeinert werden, und lauten: „wir kennen keine Thierform, die im erwachsenen, geschlechtsreifen Zustande irgend einer Thierlarve gliche". Damit fällt aber die Kraft des Satzes als Beweis, dass der Nauplius keine Urform des Krebsstammes darstellen könne.

Es kommt bei der Beurtheilung der Bedeutung und des Werthes einer Larvenform nicht auf die Gleichheit, sondern auf die Aehnlichkeit mit niederen geschlechtsreifen Thieren an, d. h. auf die Möglichkeit, in der Gestalt und Organisation der Larve Anklänge, Hinweise, Beziehungen zu niederen fertigen Thieren zu finden. Die Froschlarve ist kein Fisch, und wir kennen kein geschlechtsreifes Thier, das einer solchen gliche; trotzdem lesen wir, und gewiss mit Recht, aus den morphologischen Verhältnissen dieser Larve heraus, dass die Amphibien mit den Fischen innige Verwandtschaftsbeziehungen haben, dass sie von Fischen abstammen — nicht von irgend einer jetzt lebenden Art, sondern von längst vergangenen Urformen, Provertebraten, aus deren Eigenthümlichkeiten diese wie jene abgeleitet werden können. Es gibt wenige, vielleicht keine lebenden Thiere, deren phylogenetische Durchgangsstadien noch neben ihnen existiren; dergleichen dürfte nur in ganz kleinen Gruppen allernächst verwandter Thiere zu finden sein, innerhalb der Gruppen, die wir als Gattungen oder Familien zusammenfassen.

Freilich ist eine grosse Gefahr bei der Beurtheilung der Larvenformen auf ihren Werth als phylogenetische Hinweise vorhanden: die Möglichkeit, dass die Anklänge und Aehnlichkeiten mit niedriger stehenden fertigen Thieren kein Ausdruck wirklicher Herkunft von diesen seien, sondern selbstständig erworbene Eigenschaften, unabhängige Errungenschaften in convergenter Richtung. Dergleichen ähnlich machende Entwicklungsrichtungen ursprünglich entfernt stehender Thiergruppen können nicht geleugnet werden, sei es, dass dieselben die ausgebildeten Thiere oder die Larven betreffen. Beispiele für ersteres sind die zahllosen Fälle von Mimicry, und für letzteres finden sich bei den Larven der verschiedensten Insectengruppen eine Menge Zeugen: Larven der Blattwespen und Schmetterlinge, manche Mückenlarven z. B. von einigen Pilzmücken gleichen ganz und gar kleinen Raupen, die Minirraupen ohne Bauchfüsse gleichen Käferlarven u. s. w., ferner die Convergenz in der Entwicklung der äusseren Gestalt bei Parasiten: Blutegel einerseits, Branchiobdella, Malacobdella, Planaria limuli andrerseits und viele andere stark degenerirte Parasiten aus ganz verschiedenen Thiergruppen. Darum ist es ganz richtig, wenn man „nicht ohne weiteres aus den frühen Larvenzuständen einer Thiergruppe auf frühe phylogenetische Formzustände schliessen darf".

Dieser Schwierigkeit begegnen wir aber bei der Beurtheilung des Nauplius nicht, denn seine Beziehungen zu einer Trochosphaeralarve werden allerseits anerkannt. Die Frage ist nur: repräsentirt der Nauplius, als typische Krebslarve, na-

türlich mit dem Vorbehalt mancher später hinzugekommener Abänderungen, ein Thier, das den Stammeltern der Crustaceen entspricht (nicht gleicht!), oder haben wir in ihm nur die modificirte Larve höherer Krebsahnen (mit Annelidencharacteren) zu sehen?

Ich möchte die erste Frage bejahen, und zwar aus folgenden Ueberlegungen, wobei auch die speciellen Gründe Lang's besprochen werden sollen.

Die Abstammung der Anneliden aus rotatorienähnlichen Thieren wird ziemlich allgemein angenommen, da man hier der typischen Trochosphaeralarve der Anneliden, auf die alle übrigen sich ohne besonderen Zwang beziehen lassen, die weitgehendste phylogenetische Bedeutung beilegt. Es ist dabei eine ganz differente Frage, ob der Annelidenkörper aus den Rotatorienahnen durch Längsstreckung des hinteren Körperabschnitts unter regelmässiger Wiederholung der Organe und Organentheile, oder durch eine Art innere Knospung entstanden ist, zu vergleichen der Bildung des Nemertinenkörpers im Pilidium. Selbst wenn wir die Trochosphaera äquatorialis Semper nicht kennen würden, welche bis auf einige Abweichungen und den Besitz von Geschlechtsorganen von der Annelidentrochosphaera täuschend recapitulirt wird, hätte diese Annahme dennoch Stützen genug, besonders da wir in der Gattung Dinophilus Thiere kennen, welche mit allen typischen Characteren der Rotatorien versehen, eine Längsstreckung des Körpers, Wiederholung der Wimperkränze und Nephridien aufweisen, was sie den einfachsten Anneliden nähert.

Die Rotatorien sind Gastrulathiere, welche sich durch Ausbildung eines Afters, die Localisation eines Centralnervensystems (vom Ectoderm her) und durch die Entwicklung von ein Paar Nephridien in dem lockeren mit Flüssigkeitsräumen durchsetzten Mesoderm auf eine höhere Stufe aufgeschwungen haben. Bei den jetzt noch existirenden Rotatorien kamen hiezu allmählich noch weitere Organisationsverbesserungen und Umwandlungen, die zu einer solchen Vielgestaltigkeit der Formen geführt haben, dass sich in dieser Hinsicht nur wenige Thierclassen mit ihnen vergleichen lassen. Die ursprüngliche, ziemlich gleichmässige Bewimperung des Körpers zog sich zu dem prae- und postoralen Wimperkranz zusammen, als Bewegungs- und Fangorgan dienend; bald ist mehr der eine, bald der andere entwickelt, ja es können beide allmählich verschwinden, in dem Maasse, wie die Bewegung in anderer Weise bewerkstelligt wird, und zwar durch das ausgezogene ventrale Hinterende mit Greifzangen, eingerichtet zum Einziehen und Ausstrecken, und zur Beugung in jeder Richtung. Auch andere hohle Fortsätze der Körperwand, im Innern mit Muskulatur zur Bewegung versehen, kamen zur Ausbildung (z. B. Hexarthra und Polyarthra).

Mit der Cuticularbildung auf der Körperoberfläche und deren Erstarkung ging eine Faltenbildung der Cuticula parallel, welche die Bewegung einzelner Körperabschnitte auch dann noch ermöglichte; diese Faltung ist entweder eine quere bei den langgestreckten Formen und dem ausgezogenen Bewegungsfortsatz, oder auch eine Scheidung in dorsalen und ventralen „Panzer“. Die Muskulatur ist, wenigstens bei manchen Formen und in einzelnen Muskelgruppen, die rasche, ausgiebige Bewegungen

auszuführen haben, quer gestreift; mit dem dorsal vom Schlund gelegenen Centrum des Nervensystems verbinden sich paarige oder (durch Vereinigung) unpaare Augenflecke und bilateral symmetrisch periphere, nach hinten ziehende Nerven. Der Schlundkopf, im Innern cuticularisirt, brachte besondere Kauapparate zur Ausbildung.

Trotz grosser Verschiedenheiten in Gestalt und im Verhältniss der einzelnen Organe ist dennoch die Classe der Rotatorien in sich gut abgeschlossen, und geht in ihren jetzigen Vertretern, abgesehen vielleicht von Dinophilus, in keine andere Thiergruppe über.

Die Trochosphaeralarven der Mollusken und Anneliden aber zeigen, dass vor Zeiten die Urrotatorien noch viel weiter entwicklungsfähig waren; ich sage Urrotatorien, weil ich meine, dass die Larve der genannten Thierclassen einem Rotator entspricht, das zwar alle wesentlichen Charactere eines typischen Räderthiers besass, aber noch nicht zu der Differenzirung gelangt war, in der wir die heutigen Vertreter dieser Gruppe sehen. Am nächsten steht jenen Urahnen der Mollusken und Anneliden die Trochosphaera äquatorialis, obgleich auch sie in gewissen Richtungen verändert sein mag, z. B. in der Lage des Centralnervensystems, der Sinnesorgane, der Wimperreifen, wahrscheinlich auch der Geschlechtsorgane; über die Verhältnisse des Genitalapparates jener Stammgruppe der genannten höheren Thiere können wir natürlich nichts wissen.

Während sich die „Molluskenrotatorien“ (es kann das eine ganze Gruppe etwas verschiedener Formen gewesen sein) allmählich in toto umänderten, d. h. in allen Theilen ihres Körpers sich ziemlich gleichmässig umwandelten, im allgemeinen weichhäutig blieben und nur auf der Dorsalseite Cuticula ausbildeten, nahmen die Annelidenrotatorien in der Längsrichtung des Körpers die Hauptumwandlung vor; sie streckten sich, indem der zwischen dem Mund und After liegende Körperabschnitt in die Länge wuchs. Bei diesem Process trat eine Wiederholung einzelner Organe und eine Gliederung anderer ein, ein Verhalten, das in einfacher Weise bei Dinophilus noch vorliegt. Die Borstenbüschel der Chaetopoden und die Parapodien sind entweder im Verlauf der Gliederung des Körpers als neue Bewegungsapparate in regelmässiger Wiederholung aufgetreten, oder aber die ungegliederten Stammeltern hatten zum Theil schon paarige Drüsen, deren Secret zu Borsten erstarrte, zur Ausbildung gebracht, die ebenso wie die Nephridien an jedem Abschnitt des sich streckenden Körpers zum Vorschein kamen. Die provisorischen Borstenbüschel vieler Annelidenlarven könnten zu dieser Ansicht geneigt machen, besonders da sie gewöhnlich von den definitiven Borsten verschieden sind, und darum nicht unbedingt aus späteren Stadien zurückverlegte Organe sein müssen.

Es wäre nun interessant, der Frage näher zu treten über die Verschiedenheit in der Ausbildung des Mollusken- und Annelidenkörpers aus den rotatorienartigen Vorfahren, von denen jene durch eine einfache Umbildung und Weiterentwicklung der Trochosphaeralarve, die letzteren durch die Anlage eines Keimstreifens im Rotatorienkörper zur Entwicklung gelangen; doch würde dies zu sehr abseits führen.

Warum bei der Längsstreckung und Gliederung des Körpers der Trochosphaera im Stamme der Anneliden alle oder die meisten Organe in Wiederholung auftraten, statt einfach in die Verlängerung hineinzuwachsen, ist und bleibt zunächst ein Problem. Wenn Lang darum in seinen „speciellen Gründen" meint, „bei der Annahme einer naupliusähnlichen Stammform der Crustaceen bleibt das Problem der Entstehung der typischen Krebsorganisation, die Segmentation des Körpers, des gegliederten Bauchmarks, des segmentirten Rückenherzens ganz unerklärt", so wird das durchaus nicht gebessert durch die Annahme einer annelidenartigen Stammform der Krebse: das Problem wird nur um eine Stufe zurückgeschoben zu den Anneliden, wo es bereits besteht. Wenn wir den Nauplius mit einem oder mehreren Paaren seitlicher beweglicher Anhänge als ein modificirtes Rotator betrachten, so ist es ebenso so leicht, oder ebenso schwer, aus seiner Längsstreckung, Gliederung und Wiederholung der Organe und Organentheile direct einen Urkrebs zu construiren, wie aus der Annelidentrochosphaera ein Annelid.

Es scheint mir sogar, als wenn die von Lang in dem citirten Satz angeführten Schwierigkeiten noch nicht einmal die grössten wären. Eine Segmentirung des Körperstammes, d. h. der Haut und des Hautmuskelschlauchs sammt Leibeshöhle kann ursprünglich sehr wohl bedingt sein durch rein mechanische Momente; die bebegrenzte Länge der zu Bündeln vereinigten Muskelfasern, die stärkere Verhärtung der Körpercuticula, die den Muskelgruppen zur Insertion dient, die Nothwendigkeit, die Krümmungsfähigkeit und Zusammenziehung des Körpers zu erhalten, die Suspension des langen Darmrohres in der Leibeshöhle sind solche Gesichtspuncte. Wir finden ja auch bei den langgestreckten Rotatorien selber, oder bei ihrem sog. „Fuss" ebenfalls eine ähnliche Gliederung der Cuticula und der Muskulatur.

Die Ansammlung von Ganglienzellen in den beiden Hauptlängsnerven, jedem neu entstandenen Segment entsprechend, ist wohl zweifellos bedingt durch die relative Selbständigkeit der Muskelsegmente, und kann sowohl bei Anneliden, wie bei Crustaceen unabhängig aus gleichen Gründen zur Ausbildung gelangt sein. Nicht einmal bei allen Anneliden kam es zu einer derartig scharfen Gliederung des Nervenapparates, und dass sogar hochstehende Anneliden ein unsegmentirtes Nervensystem erhalten haben konnten, sehen wir selbst noch bei dem von solchen abzuleitenden Peripatus, dessen beide Hauptnerven gleichmässig mit Ganglienzellen belegt sind, und durch zahlreiche feine Commissuren in Verbindung stehen. Es wird nicht gut angehen, dieses Verhalten als ein secundäres aufzufassen, auch die zahlreichen Commissuren der Längsnerven nicht. Diese Commissuren sind ebenso, wie die der Turbellarien, Nemertinen und Anneliden entstanden durch das Entgegenkommen peripherer Nerven, die dem Hautnervennetz dieser Thiere entsprechen. Bei einem gleichmässigen Ganglienbelag kommt es auf die Zahl dieser Commissuren nicht an; dass einzelne besonders erstarken können, sehen wir bei den mit Saugnäpfen versehenen Trematoden, der Analcommissur der Nemertinen und der hinter dem Munde liegenden der Dendrocoden. Erst bei der Concentrirung der Ganglienzellen zu Knoten wurde

die Zahl beschränkt, sei es durch Verschmelzung mehrerer, sei es durch Ausfall der einen und Erstarkung anderer. Ich glaube, dass man sich so auch das Nervensystem der Anneliden entstanden denken kann, bei denen ja auch gelegentlich zahlreichere Commissuren vorkommen. Man darf nicht vergessen, dass die Weiterentwicklung einer Thiergruppe nicht alle Organe in gleicher Richtung treffen muss, so dass wohl die meisten jetzigen Anneliden die höhere Concentration des Nervensystems erlangten, während der in anderer Hinsicht höher stehende Peripatus in seinem Vorfahrenstamm das ursprünglichere Verhalten des Nervenapparates bewahrte. Dabei braucht durchaus noch nicht angenommen zu werden, dass der Peripatusstamm selbständig bis auf die Urannеliden zurückzuleiten sei; sein Stammbaum ist vielleicht nur auf hochstehende Anneliden zurückzuführen, welche die erwähnte Eigenschaft hatten; unter ihren Nachkommen erhielt sich das ursprünglichere Nervensystem in der Peripatuslinie, während in den allenfalls von ihnen ausgehenden Anneliden die Concentration zu Ganglienknoten und Ganglienkette zur Ausbildung kam. Es scheint, als ob man nicht genug daran dächte, dass bei der dichotomischen oder mehrfachen Verzweigung eines Stammes die Abänderungen die verschiedenen Organe in den einzelnen Aesten recht ungleichmässig treffen können.

Da wir bei den Phyllopoden gleichfalls ein Strickleiternervensystem, z. Th. mit zahlreicheren Commissuren antreffen, so sehe ich keine Schwierigkeit, hier die nämliche, selbständige Entstehung annehmen zu können.

Was nun endlich das segmentirte Rückenherz der Crustaceen anlangt, so würde auch die Annahme einer Abstammung der Krebse von Anneliden keine Erklärung bringen, denn dasselbe kann auf keinen Theil des Circulationsapparates derselben zurückgeführt werden. Wir sehen dies aus der Entstehung des fast identischen Herzens von Peripatus, das eine Bildung eigener Art ist, ein mit besonderer Wand versehener, abgegrenzter Theil der Leibeshöhle. Das Blutgefässsystem der Anneliden wird hier gar nicht mit benützt, sondern ist verschwunden. Warum sollte aber dieses Neuauftreten eines pulsatorischen Apparates solcher Art nur bei Anneliden möglich gewesen sein und nicht schon bei langgestreckten rotatorienähnlichen Thieren? Keinesfalls ist hier eine Stütze zu finden für die Annahme der Annelidennatur der Krebsahnen, weshalb ein Erklärungsversuch für die Structur dieses Organs unterbleiben kann, obgleich derselbe gar nicht so sehr schwierig wäre, wenn man die Segmentirung der Muskulatur und der Leibeshöhle, deren Theil das Herz ist, in Erwägung zieht.

Viel schwieriger ist, wie mir scheint, das Verständniss für die Wiederholung der Bewegungsorgane in jedem Segment — einerlei ob Borstenbüschel, Parapodien, oder Beine — und der Nephridien. Die Längsstreckung des Körpers allein, auch die Gliederung des Körperstammes gibt uns keine Erklärung. Dass auch bei langgestrecktem, gegliedertem Körper eine geringere Zahl von Bewegungsorganen ausreichen kann, sehen wir zum Ueberfluss ja auch an der Reduction der Zahl bei einem grossen Theil der Tracheaten und den Vertebraten, ebenso bei Crustaceen, wo eine kleine

Zahl von Extremitäten zum ausgiebigen Bewegen in Wasser, Luft und auf dem Lande ausreicht. Die Nemertinen lehren uns, dass auch bei sehr langgestrecktem Körper die Excretionsorgane sich nicht zu wiederholen brauchen, ja auf einen kleinen Theil des Körpers beschränkt sein können; wenn nun, wie bei den Anneliden, noch die Ausbildung einer Leibeshöhle dazukommt, so ist erst recht nicht einzusehen, warum nicht ein einziges, allenfalls vergrössertes oder modificirtes Paar hätte ausreichen können, um die Excretionsstoffe aus der Leibeshöhle zu entfernen.

Hier also, bei den Anneliden schon liegen die grössten Schwierigkeiten, und wir müssen die Segmentirung mit Wiederholung der Organe einfach als eine aufgetretene Thatsache hinnehmen, wenn wir in der Segmentirung nicht mehr als eine Gliederung, nicht eine unvollständig gebliebene Individuenbildung sehen wollen. Anzunehmen aber, dass eine solche Gliederung nur einmal, — bei der Entstehung der Anneliden aus rotatorienartigen Thieren stattgefunden habe, und dass nun alle segmentirten Thiere von annelidenähnlichen Vorfahren abstammen müssten, nur weil sie einige ähnliche Organisationsverhältnisse aufweisen, dazu liegt keine Berechtigung vor.

Wenn in der Rotatoriengruppe, oder richtiger unter den Stammformen der jetzigen Rotatorien die Tendenz (sit venia verbo!) zur Längsstreckung und Gliederung des Körpers mit Vervielfältigung der Organe vorhanden war, so konnten verschiedene Formen dieselbe haben; nämlich solche, die schon als Rotatorien Charactere der späteren Anneliden erworben hatten (Borstenbüschel in Follikeln) und andere, welche Arthropodeneigenthümlichkeiten aufwiesen: paarige Aussackungen des Körpers, die durch Muskeln bewegt und in sich selbst gebogen oder geknickt werden konnten. Da diese letzteren bald zu guten Bewegungsorganen ausgebildet wurden, konnten die Wimperkränze rudimentär und unterdrückt werden — es bildeten sich Thiere, die man als Urnauplius bezeichnen könnte; aus deren Streckung und Segmentirung entstanden die Urkrebse, bei denen dann die in Wiederholung aufgetretenen Bewegungsorgane in mannigfacher Weise umgewandelt und verschiedenen Dienstleistungen unterstellt wurden. Dieser Urnauplius (oder vielleicht mehrere Formen?) war also ein Geschlechtsthier, von der jetzigen Naupliuslarve der Krebse aber vermuthlich ebenso verschieden, wie die heutige Trochosphaera aequatorialis von einer Polygordiustrochosphaera oder einer Mitraria.

Wir kennen unter den heutigen Rotatorien keine Form, welche dem Urnauplius gliche, ebenso wenig wie irgend ein Rotator irgend einer Annelidenlarve gleicht, die man dennoch ohne grossen Wiederspruch als Hinweis auf den Rotatorienursprung der Anneliden betrachtet. Dass aber das frühere Vorhandensein von Rotatorienformen mit den erwähnten Kennzeichen möglich ist, dass Räderthiere Charactere heranzüchten konnten, wie sie für einen Urnauplius nöthig waren, dafür sind uns Arten wie Hexarthra und Polyarthra deutlicher Hinweis. Extremitätenartige, mit Borsten oder vielmehr Cuticularhaaren besetzte Körperanhänge konnten also bei Räderthieren entstehen, warum sollte das nicht auch bei Formen vorgekommen sein, die sich später

streckten, segmentirten und diese Anhänge an den einzelnen Segmenten wiederholten, wie wir es doch in der anderen Linie für die Anneliden annehmen?

Von Lang wird noch besonders betont, dass bei den Crustaceen die Geschlechtsorgane in Körperregionen ausmünden, die beim Nauplius gar nicht vorhanden sind, und darum könne man die Krebse nicht von naupliusartigen Geschlechtsthieren ableiten. Wenn das ein Einwand wäre, so hätte er auch Geltung für die Lumbriciden, Hirudineen, ja für alle Anneliden, bei denen die Mündung der Genitalorgane nicht im Analsegment liegt. Man neigt sich aber vielfach, und auch Lang thut dies, der Anschauung zu, dass die Ausführungsgänge der Genitalorgane bei Krebsen, ebenso wie die Antennen- und Schalendrüse umgewandelte Nephridien seien.

Dann wird man auch, wie bei den genannten Anneliden, annehmen müssen, dass die innige Verbindung der Keimdrüsen mit den Ausfuhrwegen eine secundäre sei, dass die Keimproducte ursprünglich frei in der Wand der Leibeshöhle entstanden und durch mehrere, oder beliebige Segmentalorgane nach aussen befördert wurden. Erst durch die Bevorzugung einzelner Nephridien für diese Arbeit wurden dieselben zu Oviduct oder Vas deferens, und da ihr innerer Abschnitt gleichfalls ein Theil der Leibeshöhle ist, so konnte eine Verwachsung mit der allmählig zur Keimstätte umgewandelten beschränkten Abtheilung der Leibeshöhle erfolgen. Das müsste im Crustaceenstamm schon sehr frühzeitig erfolgt sein, während es in der Annelidenreihe, nur ausnahmsweise, z. B. bei Hirudineen (und Oligochaeten) zu Stande kam. Freilich ist hier diese Anschauung nirgends bewiesen, leider auch nicht durch die neueste Untersuchung von Otto Bürger[1]. Wohl aber ist der Vorgang zweifellos erfolgt bei den von Anneliden abstammenden Tracheaten; aber auch hier ist es die einzige Familie Peripatus, durch welche die genannte Auffassung zur Thatsache bewiesen ist. Bei keinem andern Tracheaten liess sich bisher die Anlage der Genitalgänge als zweifellose Nephridien nachweisen, nicht einmal bei den Ephemeriden, wo dieselben bis zur Ausmündung doppelt sind. Bei den Arthropoden werden unverkennbare Nephridien, unverfälschte Segmentalorgane eben nicht mehr angelegt, und das kann auch für die Crustaceen Geltung haben, die auch in ihren heutigen niedersten Formen nicht mehr den Urtypus zeigen, sondern bereits recht weite selbstständige Wege der Organbildung und -Umwandlung zurückgelegt haben. Von den ursprünglich gleichartig angelegten segmental wiederholten Organen wurden nur diejenigen beibehalten, welche Verwendung und Bedeutung behielten, und von diesen wurden diejenigen, welche mit ihrer Function auch ihre Structur wesentlich änderten, allmählich schon in ihrer frühesten Anlage der späteren Ausbildung entsprechend umgewandelt, z. Th. bis zur Unkenntlichkeit beeinflusst, was ja auch die Antennen- und Schalendrüse zeigen, falls dieselben morphologisch Segmentalorganen entsprechen.

Sollte nachgewiesen werden können, dass wir in dem ausführenden Genitalapparat der Crustaceen Nephridien sehen müssen, so würde man annehmen dürfen,

---

1) Otto Bürger, Beiträge zur Entwicklungsgeschichte der Hirudineen. Zool. Jahrb. Bd. IV.

dass der Urnauplius und seine ersten segmentirten Abkömmlinge die Excretionsorgane als Ausfuhrwege für die frei im Mesoderm, resp. in der Leibeshöhlenwand entstehenden Fortpflanzungsproducte verwendeten, wie das ja wohl auch für die Trochosphaera-ahnen der Anneliden angenommen werden darf. Die gleiche Lage der Geschlechtsöffnungen der jetzigen Krebse kann dann als guter Beweis für die Einheitlichkeit des Stammes, für continuirliche Verwandtschaftsreihen verwendet werden; Ausnahmen wären darauf anzusehen, ob sie sich nicht auch in andern Organisationsverhältnissen als besonders frühzeitig abgezweigte, selbständig entwickelte Aeste erweisen. Denn eine Verlagerung der Genitalöffnungen bei scharf segmentirten Thieren, bei denen erst die Keimdrüsen in feste Verbindung mit den Leitungswegen getreten sind, aus einem Segment in ein entferntes, ist fast unmöglich.

Immerhin ist die Möglichkeit offen zu halten, dass die Genitalgänge der Crustaceen keine modificirten Nephridien seien, sondern aus schon vorhandenen Ausführungsgängen der Vorfahren herzuleiten sind. Bei den Rotatorien münden dieselben in die Cloake, und wenn das bei dem Urnauplius ebenso war, ist allerdings nicht zu verstehen, wie die Verlagerung in die neugebildete Körperregion zwischen Mund- und Analtheil des Körpers zu Stand gekommen sein soll. Aber diese Verbindung mit dem Enddarm kann sehr wohl erst in der Gruppe der Rotatorien entstanden sein, und die Urrotatorien konnten anders gelagerte Oeffnungen haben. Bei Dinophilus entstehen Entleerungsöffnungen für die Geschlechtsproducte ventral vor dem After. Bei der Annahme, dass der Urnauplius, wie seine Gattungsgenossen die Ausfuhrgänge der Geschlechtsorgane vor der Analöffnung besass, so konnten dieselben beim Längenwachsthum und der Gliederung sehr wohl in die Wachsthumszone hineingezogen und so gegen die Mitte, oder selbst vor die Mitte des späteren segmentirten Körpers zu liegen kommen. Unmöglich, oder vielleicht auch unerklärlich wäre darum die Lage der Geschlechtsöffnungen bei den Crustaceen auch nicht bei der Annahme eines Naupliusahnen, dessen Excretionsorgane an der Entleerung der Genitalproducte unbetheiligt waren. Wahrscheinlicher dürfte allerdings die andere Anschauung sein.

Nach den in Vorstehendem entwickelten Auffassungen bin ich also der Meinung, dass der Stamm der Crustaceen oder Branchiaten direct zurückzuführen sei auf rotatorienartige, ungegliederte Vorfahren, die als Ersatz für die allmählich verschwindenden Wimperkränze paarige, seitliche Ausstülpungen des Körpers zur Ausbildung brachten, die mit Cuticularhaaren besetzt, wohl von vorn herein zweiästig, durch Muskeln bewegt, zunächst als Locomotionsapparate dienten. Die Cuticula des Körpers war ziemlich stark und schied sich, um Contractionen noch zu ermöglichen, in einen festeren Rückenpanzer und weichere Bauchseite. Bei dem erfolgenden Längenwachsthum trat auch eine quere Gliederung der Haut und

der Muskulatur, sowie eine Wiederholung der Bewegungsorgane, ferner auch eine innere Gliederung und Vervielfältigung einzelner Organe auf. Die Bewegungsorgane wurden theilweise anderen Dienstleistungen angepasst. Eine secundär in mancher Weise abgeänderte Andeutung dieser Urahnen ist die heutige Naupliuslarve der Crustaceen.

Die Crustaceen und die Anneliden wären demnach zwei in divergenter Richtung auseinander gehende gleichwerthige Aeste von gleichem Ursprung.

Wie man sieht, nähert sich die hier vorgetragene Anschauung der neuerdings von Plate[1]) discutirten, welcher ebenfalls die Crustaceen durch die Naupliuslarve mit den Rotatorien, und zwar durch Vermittelung der Hexarthra polyptera Schm. in genetische Verbindung bringt. Dort sind auch andere hierhergehörige Ansichten besprochen und in geschickter Weise critisirt, so dass ich mich mit Plate's Darstellung allein beschäftigen kann.

Meine Ansicht unterscheidet sich von der Plate's in einer Weise, dass dadurch Schwierigkeiten, die sich dem genannten Forscher gegenüberstellen, wegfallen, oder doch viel geringer werden.

Plate spricht auch von rotatorienartigen Vorfahren, meint aber damit, wie es scheint, Thiere, die im Allgemeinen bereits alle Charactere der Rotatorien zeigten, abgesehen von der Kaueinrichtung des Magens, vielleicht auch von dem Tentakelapparat; auch das Gehirn der Rotatorien könnte nach ihm eine selbstständige Bildung darstellen. Ich muss das schliessen aus seinem Stammbaum, wo er Trochophora = Rotatoria setzt, und Hexarthra als Durchgangsphase der Crustacea zeichnet, und aus dem Satz pag. 31: „Besondere Schwierigkeiten bei der Zurückführung der Trochophoralarven auf Rotatorien bereiten das Nervensystem und die damit zusammenhängenden Sinnesorgane“.

Ich stelle mir die „rotatorienartigen“ Vorfahren der Rotatorien selbst, ferner der Bryozoen, Mollusken, Anneliden und Branchiaten, die „Urtrochosphaera“ viel einfacher und undifferenzirter vor, einfacher selbst als die Larve von Polygordius, und nehme an, dass sich dieselbe in verschiedener Weise weiter entwickelte, zunächst so, dass wir in den Larven der genannten Thiere die verschiedenen z. Th. divergenten Entwicklungsphasen noch erkennen können. Es mag das auf pag. 9 und 10 Gesagte hier noch weiter ausgeführt werden.

Ich bin geneigt, anzunehmen, dass es freischwimmende Geschlechtsthiere gegeben hat, deren Ectoderm gleichmässig bewimpert war, die einen Mund und blindgeschlossenen Darmsack hatten, deren Mesoderm ein lockeres, mit Flüssigkeitsräumen durchsetztes Bindegewebe war, das auch von einzelnen Muskelfasern und -Bündeln

1) Ludwig H. Plate, Ueber die Rotatorienfauna des bottnischen Meerbusens, nebst Beiträgen zur Kenntniss der Anatomie der Philodiniden und der systematischen Stellung der Räderthiere, mit 1 Tafel. Z. w. Z. Bd. 49.

durchzogen sein mochte. Ein Nervensystem war noch nicht localisirt, sondern lag zerstreut im Ectoderm. Fxcretionsorgane waren noch nicht ausgebildet, traten aber später als feine Canäle im Mesoderm, mit Secretionszellen verschlossen, auf. Bei solchen Gastrulathieren differenzirte sich das Wimperkleid zur Erhöhung der Bewegungsfähigkeit in der Art, dass ein praeoraler Wimperkranz erstarkte. Aus den nervösen Elementen des Ectoderms differenzirte sich ein Centralorgan heraus, das bei verschiedenen Formen an ganz verschiedener Stelle liegen mochte, nämlich da, wo im Ectoderm Sinnesorgane einfachster Art Tasthaare, Pigmentflecke etc. entstanden; die Stelle wird gewöhnlich diejenige gewesen sein, die der Bewegungsrichtung der Thiere und ihrer Orientirung im Raum gemäss die tauglichste und bevorzugteste war: die praeorale Hälfte.

Aus solchen Gastrulathieren entstanden durch Weiterentwicklung die Turbellarien (von denen dann die übrigen Plathelminthen abzuleiten sind), und die Nemertinen. Denn das Pilidium ist nichts anderes, als eine derartige Gastrula mit Wimperkranz, deren postorale Hälfte abgeflacht, eingesunken ist, und die am oralen Pol ein Nervencentrum (Scheitelplatte) besitzt. Ob auch die Echinodermen von solchen Thieren herzuleiten sind, möchte ich hier nicht discutiren.

Eine andere Gruppe der geschilderten Gastrulathiere aber erlangte als solche eine weitere Ausbildung: Der Wimperkranz differenzirte sich schärfer, bei vielen kam noch ein postoraler hinzu, das übrige Wimperkleid verschwand mehr und mehr, die Muskulatur im Mesoderm erlangte höhere Mächtigkeit, die Excretionsorgane bildeten sich paarig definitiv aus, und es kam eine zweite Darmöffnung, der After hinzu. Diese Thiere sind meine Urtrochosphaeren. Das Nervensystem, zunächst hauptsächlich ein Sinnescentrum, konnte auch hier an verschiedenen Stellen zur Ausbildung gekommen sein — als Scheitelplatte am Pol innerhalb des praeoralen Wimperkranzes oder unmittelbar über dem Mund, zwischen den beiden Kränzen, resp. unter dem praeoralen Kranz. Die Structur der Geschlechtsorgane dieser Urtrochosphaera konnte in den einzelnen Gruppen ebenfalls differiren.

Lassen wir aus solchen Thieren als gemeinschaftlichem Stamm durch verschiedenartige Weiterentwicklung die Rotatorien, die Bryozoen, die Mollusken, die Anneliden, die Crustaceen herauswachsen, so bieten die verschiedenen Lagerungsbeziehungen der Organe z. B. des „Gehirns“ und die mannigfaltigen in jedem Stamm selbstständig erworbenen Eigenthümlichkeiten keine Schwierigkeiten. Thiere, wie Hexarthra zeigen uns nur, dass die Ausbildung der verschiedenartigen Körperformen und Bewegungsorgane bei solchen Thieren möglich war; denn wenn im Kreise typischer Rotatorien paarige Extremitäten auftreten konnten, so haben wir keinen Grund, die Möglichkeit zurückzuweisen, dass dies noch leichter und in mannigfaltigerer Weise bei weniger differenzirten, gewissermaassen noch umbildungsfähigeren Thieren geschehen konnte. Da die heutigen Rotatorien doch niedriger stehende Vorfahren gehabt haben müssen, so sehe ich nichts Abenteuerliches in dem Gedanken, dass eben diese Vorfahren auch anderen Thiergruppen als Ursprung dienten, welche die Rotatorien

in Complication der Organisation weit, aber in verschiedenartiger Weise überholten. Nicht die Rotatorien, sondern ihre Vorfahren, die Urtrochosphaerathiere sind auch die Ahnen der Anneliden einerseits, der Crustaceen andrerseits — ebenso wie der Bryozoen und Mollusken. Dass bei dieser Ansicht in den verschiedenen Gruppen nur diejenigen Organe homologisirt werden können, die bei den Ahnen schon vorhanden waren und nur weiter um- und ausgebildet wurden, ist klar, ebenso, dass dies nur die allgemeinsten Anlagen sein können.

So wie ich in Bezug auf die Herkunft der Crustaceen im Princip mit Plate einverstanden bin und nur im Speciellen etwas abweiche, so stimme ich ihm bei, wenn er die Tracheaten von den Anneliden ableitet, also für beide Gruppen „ganz gesonderte Entwicklungsbahnen annimmt". Da diese Anschauung von der Annelidenverwandtschaft der Tracheaten eine weit verbreitete zu sein scheint, bedürfte es kaum einer ausführlicheren Begründung derselben, besonders da wir an Peripatus klar sehen, wie aus hochstehenden Anneliden tracheate Arthropoden entstehen können. Weil jedoch die Uebereinstimmung in der Organisation der Tracheaten und Crustaceen in vielen Puncten eine so grosse zu sein scheint, dass man nur schwer sich von dem Gedanken freimacht, diese beiden Gruppen müssten nothwendig nahe genetische Beziehungen haben, so müssen wir einen Blick auf diese Verhältnisse werfen und untersuchen, ob diese Uebereinstimmungen in der That so gross sind, dass sie auf gleichen oder nahen Ursprung hinweisen müssen.

An der Einheit des Tracheatenstammes scheint wohl nicht gezweifelt zu werden, denn die Bestrebungen, die Insecten und Arachnoideen auf Myriapoden zurückzuführen, sind in der Tagesliteratur reichlich vertreten. Trotz vielfacher Verschiedenheiten sprechen für die enge Zusammengehörigkeit die Einheit der Organisation, die sich in der Bildung des Kopfes, der Structur und Gliederung des Chitinskelets, der Einfachheit der Extremitäten, der Umbildung einer bestimmten Zahl derselben zu Kopf- und Mundgliedmaassen, bei den höheren Gruppen in der Dreizahl der Thoraxsegmente, in den Athmungsorganen und den Malpighi'schen Gefässen documentirt. Die beiden letzten Organe allein sind schon beweisend genug. Denn wenn wir von zweifellos degenerirten, in ihrer Organisation wesentlich vereinfachten Formen absehen, so geht bei den Tracheaten das Vorhandensein der Tracheen und der Malpighi'schen Gefässe so gleichmässig parallel, dass man nur zu dem Schluss gelangen kann, dies müssen Erbstücke gemeinsamer Vorfahren sein. Wir finden bei Crustaceen nichts ähnliches (die Darmdivertikel bei Amphipoden und Brachyuren gehören gewiss nicht hierher [1]), so dass wir die Tracheaten nicht von Crustaceen ableiten können. (Auf die Bemühungen einiger Forscher, die Arachnoideen mit den Krebsen in Beziehung zu bringen, gehe ich nicht ein, da ich später zeigen werde, dass die Arachnoideen mit anderen Tracheaten gleichen Ursprungs sind.)

1) cf. Plate l. c. und Frank E. Beddard: On the possible Origin of the Malpighian Tubules in the Arthropoda. Ann. and Mag. Nat. Hist. Bd. IV, ser. 6. — Ferner: Spencer: The Urinary Organs of the Amphipoda. Quart Jour. Micr. Sc. XXV.

Die übrigen Aehnlichkeiten aber sind Dinge, wie sie überhaupt mit der Segmentation eines Thierkörpers zusammenhängen, und die jedesmal besonders entstanden sein können. Grosses Gewicht könnte man legen auf die Gliederung des Chitinskelets, die Bildung einheitlicher Körperabschnitte durch Verschmelzung mehrerer Segmente, die Gliederung der Extremitäten, ihre Umbildung zu Tast- und Fresswerkzeugen. Ich habe schon oben gesagt, dass die äussere Gliederung des Körpers aus mechanischen Ursachen erklärt werden kann, besonders wenn die Cuticula des Körpers allseitig ausgebildet und relativ fest wird, also auch in verschiedenen Stämmen des Thierreichs unabhängig zum Ausdruck kommen kann. Dasselbe gilt für extremitätenartige Anhänge des Körpers. Diese äussere Gliederung hat nicht immer streng mit der Segmentirung des Körpers zu thun, sondern wird ausgebildet je nach Bedarf unter Anpassung an verschiedene Verhältnisse und unter Benützung der Structur und Leistung der Extremitäten. Wir sehen dies in der Verschiedenartigkeit des Kopfes, Thorax, Abdomens, des Cephalothorax etc.; an der Unabhängigkeit der Gliederung der Rücken- und Bauchseite bei vielen Tracheaten, an dem Zerspalten der Chitinringe eines Segments in mehrere Schienen, an der Gliederung der Juliden, wo bei den zahlreichen ungemein kurzen Segmenten, immer zwei und zwei fest verbunden sind. Wir haben ferner Beispiele für die rein mechanische Gliederung des Chitinskelets in der enorm wechselnden Zahl der Ringe, welche die Antennen und Beine der verschiedensten Arthropoden zusammensetzen. Man kann weiterhin die Gliederung der Haut bei den gepanzerten Vertebraten, von den Fischen und Reptilien an bis zu den Gürtelthieren heranziehen, und zeigen, dass wie bei den Vertebraten, so auch bei den Echinodermen eine Gliederung der inneren Stützapparate unabhängig erfolgte, — überall da, wo es sich bei der Ausbildung äusserer oder innerer Hartgebilde um ein Erhalten der Beweglichkeit handelte. Das also ist eine Eigenthümlichkeit, die sehr gut öfter als einmal in verschiedenen Stämmen unabhängig entstehen konnte. Dass beim Körperstamm im Allgemeinen der inneren Segmentbildung gefolgt wurde, liegt in der Natur der Sache.

Ebenso gibt es genug Beispiele in verschiedenen Thierklassen, die nichts mit einander zu thun haben, dafür, dass äussere Körperanhänge in der Nähe des Mundes in den Dienst der Nahrungsaufnahme gestellt werden, und dementsprechende Umwandlungen erfahren; ich nenne nur die Tentakel der Holothurien, der sedentären Anneliden und die Arme der Cephalopoden. Dass sowohl bei Krebsen wie bei Tracheaten gerade drei Paare der zur Ausbildung gekommenen Extremitäten diese Arbeit übernahmen, kann nicht ohne Weiteres für genetischen Zusammenhang sprechen.

Die Verschiedenheiten in diesen Hinsichten bei beiden Thiergruppen fallen wohl viel schwerer ins Gewicht. Bei Crustaceen sind zwei Paar praeorale Gliedmaassen vorhanden, bei Tracheaten durchweg ein Paar, das nach Jaworowski [1]) auch bei Arachnoideen

1) A. Jaworowski, Ueber die Extremitäten bei den Embryonen der Arachniden und Insecten. Zool. Anz. Nr. 364. XIV. Jahrg. 1891.

angelegt wird, aber nicht zur Ausbildung kommt; bei den Crustaceen sind die Gliedmaassen typisch zweiästig, bei den Tracheaten einfach mit Endklauen, die bei Krebsen nicht vorkommen. Nach Jaworowski (l. c.) werden zwar auch bei Spinnen (Trochosa singoriensis) wenigstens die vorderen Extremitätenpaare deutlich zweiästig angelegt, und er bezeichnet die Aeste als Exopodit und Endopodit. Ich glaube aber nicht, dass diese Spaltung identisch ist mit der des Krebsfusses, sondern möchte in dem „Endopodit" nichts anderes sehen, als die Anlage einer Kaulade, einer Ausstülpung des Basalsegments der Extremität, die bei den Spinnenvorfahren vorhanden war; der Exopodit würde dann dem Taster der Insectenmundtheile entsprechen. (Darauf komme ich noch später zu sprechen.) Auf die vielfache Umbildung der Extremitäten lege ich kein Gewicht, da dieselbe in beiden Gruppen grosse Mannichfaltigkeit zeigt; wohl aber kann auf die Verwendung der Extremitäten, oder der Anhänge derselben als Kiemen bei Branchiaten hingewiesen werden, während bei Tracheaten, weder solchen die im Wasser leben, noch bei den Embryonen der ganzen Klasse auch nicht die geringsten Andeutungen vorkommen, dass hier jemals solche Verhältnisse durchlaufen worden seien. Wo hier kiemenartige Gebilde vorhanden sind, treten sie als Ausstülpungen der Haut, aber nie in Verbindung mit den Extremitäten auf, und sind sicher secundäre Erscheinungen, immer sog. Tracheenkiemen.

So wie nach der Zahl der Extremitäten der Crustaceenkopf, wo er als besonderer Abschnitt differenzirt ist, aus fünf, der Tracheatenkopf aus vier Segmenten zusammengesetzt ist, so zeigt auch der Thorax ganz verschiedene, in beiden Gruppen aber recht constante Verhältnisse. Ueberall, wo bei Tracheaten ein Thoracalabschnitt sich aus der gleichmässigen Segmentirung des Rumpfes differenzirt hat, besteht derselbe aus drei Segmenten; bei den höheren Crustaceen sehen wir hier acht, bei niederen eine wechselnde Zahl, weniger als fünf wohl nur bei reducirten Formen. Nichts berechtigt uns zu der Annahme, dass die drei Thoracalsegmente der Tracheaten aus den drei ersten Thoraxringen der Crustaceen entstanden seien, besonders da die Extremitäten der letzteren schon sehr frühzeitig in der Phylogenie zu Organen der Nahrungsaufnahme umgewandelt wurden.

Ganz ähnliches lässt sich über die Verhältnisse des Abdomens und Postabdomens sagen, und dass die Aehnlichkeiten in Muskulatur, Nervensystem, Herz etc. keine Beweise für Stammesverwandtschaft beider Gruppen zu sein brauchen, zum Theil nicht sein können, wurde schon weiter oben auseinandergesetzt; alle diese Aehnlichkeiten sind durch Convergenz der Ausbildung erreicht.

Ein einziges Organ macht es schwer, diese Anschauung anzunehmen: das facettirte Auge der Krebse und der Insecten. Sollten Sehorgane von so identischem Bau, und so abweichend von allen übrigen Augen zweimal in verschiedenen Thierstämmen zur Ausbildung gekommen sein? Ich glaube, es wird nichts anderes übrig bleiben, als diese Frage zu bejahen, denn

1) sind zusammengesetzte Augen im Stamm der Krebse entstanden, wie die einfacheren Augen der Phyllopoden beweisen; 2) besitzen unter den Tracheaten nur

die Insecten ächte zusammengesetzte Augen, und diese direct von höheren Krebsen abzuleiten, dürfte doch wohl seine Schwierigkeiten haben; 3) finden wir wiederum bei den Myriapoden Andeutungen für Entstehung zusammengesetzter Augen, und Scutigera besitzt solche von einfachem Bau, offenbar selbständig zur Ausbildung gebracht; 4) gibt es in allen Gruppen der Tracheaten einfache Follikelaugen, Stemmata, für die wir bei den Krebsen keine Homologa finden, die aber wohl geeignet sind, wie die der Spinnen und Scorpioniden, zu Facettenaugen zu werden, wie ich [1]) seinerzeit andeutete und wie auch Patten meint, dem ich übrigens im Einzelnen nicht beistimmen kann.

Uebrigens sind diese Augen gar nicht so identisch in ihrem Bau, wie es auf den ersten Blick scheinen könnte, und auch in der embryonalen Entwicklung sind beträchtliche Unterschiede bemerkbar, von denen ich nur hervorheben will, dass das Krebsauge durch eine Einstülpung einen Theil seiner Anlage gewinnt, während das Insectenauge einfach modificirtes Epithel ist, ohne Einsenkung und Abschnürung. Dass in zwei Thierstämmen selbständig solche sonderbaren und complicirten Sehorgane zur Ausbildung kommen konnten, ist für mich nur ein Beweis dafür, dass sie doch nicht so ganz schlecht functioniren möchten, wie eine Anzahl von Forschern auf Grund von theilweise wunderlich angestellten Experimenten glauben machen will.

Von grösster Wichtigkeit sind für die Tracheaten die Malpighi'schen Gefässe und die Tracheen; beide Organe zusammen, ja jedes für sich allein würde genügen, ein Thier den Tracheaten ein- oder anzureihen, da in keiner anderen Gruppe derartiges vorkommt. Fast alle Tracheaten besitzen beide Organe zusammen, und nur sehr wenige Formen sind bekannt, die nur das eine oder das andere aufweisen; Tracheen, und zwar einfachster Art, aber keine Malpighischen Gefässe besitzt allein Peripatus, Japyx und die Collembola; tracheenlos, aber im Besitz Malpighi'scher Gefässe sind eine Anzahl sehr kleiner Arthropoden, die man meist als regressiv metamorphosirte Thiere ansieht: viele Milben, die Pauropoden (?) und Tardigraden. Letztere sind gelegentlich als sehr ursprüngliche Arthropoden direct mit dem Nauplius in Beziehung gebracht worden (Bütschli), oder als Zwischenstufe zwischen Anneliden und Tracheata eingeschaltet worden (Plate l. c.). Dass sie nur in Verbindung mit Tracheaten genannt werden dürfen, führt Plate genügend überzeugend aus. Ich kann ihm aber nicht beistimmen, wenn er sie als die ursprünglichsten Tracheaten auffasst, die wir kennen. Ein ganzes Bärthierchen müsste ja dem Kopf der übrigen Tracheaten entsprechen, da es nur die vier Extremitätenpaare besitzt, welche die übrigen am Kopfe tragen; von diesen liegen aber die Antennen praeoral, wo die Tardigraden keine Spur von Anhängen besitzen.

Die Duplicität der Geschlechtsorgane, die sich bei allen gut ausgebildeten Tracheaten documentirt, wäre aus dem unpaaren dorsal in den Enddarm mündenden

1) Sitzungsberichte der Naturforscher-Gesellschaft, Dorpat, Bd. VIII. 1888.

Genitalapparat der Tardigraden nicht abzuleiten. Sehr wohl aber sind die Tardigraden als degenerirte Tracheaten zu verstehen, und zwar in Verbindung mit Insecten zu bringen. Wenn wir uns die mannichfaltigen Larvenformen der Insecten vergegenwärtigen, so finden wir nicht wenige, die mit den genannten Thierchen manche Aehnlichkeiten aufweisen, z. B. unter den madenförmigen Jugendzuständen der Dipteren. Die äussere Gliederung des Körpers ist in Zusammenhang mit der dünnen Cuticula nicht ausgebildet, der Kopf des späteren Thieres fehlt — (er kommt erst später in der Schlundeinstülpung zur Anlage) — stummelförmige Füsse mit Chitinhaken sind nicht selten, besonders bei den mehr freilebenden Formen, das Tracheensystem ist stark vereinfacht, im Schlunde sind Chitinstücke als innere Kauwerkzeuge zur Ausbildung gekommen, welche mit denen der Tardigraden die grösste Aehnlichkeit haben; das Nervensystem ist zusammengesetzt aus oberem Schlundganglion und Bauchganglienkette — nur die Zahl der Segmente ist verschieden. Aber eine Reduction der Segmentzahl sehen wir doch überall bei den Tracheaten. Manche solcher Larven werden geschlechtsreif und pflanzen sich paedogenetisch fort. Ich meine der Gedanke liegt nahe, in den Tardigraden Abkömmlinge solcher pädogenetischer Insectenlarven zu sehen, bei denen die Weiterentwicklung zur Imago vollkommen unterdrückt wurde.

Bei der sehr geringen Grösse dieser Thiere, der Weichheit der Haut, ihrer Anpassung an sehr eigenthümliche Existenzbedingungen ist das völlige Verschwinden der Tracheen begreiflich. Ihre Geschlechtsorgane sind direct auf die Larvengeschlechtsorgane der Insecten zu beziehen; sie sind vielleicht verschmolzen aus den beiden Keimdrüsen und haben einen besonderen Ausführungsgang erhalten in den Enddarm; dafür spricht die dorsale Lage dieser Gebilde, welche mit derjenigen bei Insectenlarven übereinstimmt. Alle übrigen Verhältnisse, so auch die Anordnung der Muskulatur, das Vorhandensein von Speicheldrüsen und vielleicht auch Beindrüsen lassen für diese Auffassung kaum zu wünschen übrig [1]).

So bleibt uns also noch Peripatus übrig, dessen Beziehungen zu Anneliden einerseits und Tracheaten andrerseits nicht geleugnet werden können. Wir haben in ihm ein Thier von ziemlich homonomer Segmentirung, die aber in der Cuticula nicht ausgesprochen ist; diese ist zwar resistent, aber weich und biegsam; sie ist über und über bedeckt mit feinen spitzen Papillen, die ebenso, wie die identischen Borsten und Haare der Tracheaten sehr gut geeignet sind, das Thier nicht nass werden zu lassen. Es besitzt die typischen praeoralen Antennen in einem Paar, von den Fussstummeln sind einige bereits der Nahrungsaufnahme dienstbar gemacht: die Kiefer und die Schleimpapillen, deren Nephridien zu Speicheldrüsen geworden sind; die Fussstummel zeigen die Anfänge von Gliederung und tragen Klauen; die so vielfach neuerdings besprochenen „Coxaldrüsen" sind in vollkommenster Form vorhanden;

1) Vgl. hierüber meinen unterdessen erschienenen Aufsatz über „die Verwandtschaftsverhältnisse der Tardigraden", Sitzungsber. der Dorpater Naturforscher-Gesellschaft Bd. 9. 1891.

die Geschlechtsorgane, embryologisch nachweisbar auf Annelidenverhältnisse zurückzuführen, zeigen reine Tracheateneigenthümlichkeiten; ein segmentirtes Rückenherz ist vorhanden, ebenso Tracheen, von so einfacher Structur, dass kein Zweifel obwalten kann, dieselben seien in dieser Thiergruppe eben erst als solche entstanden.

Auch in der Entwicklung der interessanten Thiere finden wir recht beherzigenswerthe Erscheinungen, wie Embryonalhüllen und, von Allem anderen abgesehen, die für Tracheaten so characteristischen ventralen Einstülpungen der Ectoderms der „Kopflappen", die sich mit dem „Gehirn" vereinigen.

Aber — Peripatus besitzt keine Malpighi'schen Gefässe, sondern Anneliden-segmentalorgane. Diesen Mangel können wir nicht durch Degeneration erklären, denn Peripatus ist in jeder Beziehung ein in aufsteigender Entwicklung begriffenes Thier. Wenn nun hier in keiner anderen Hinsicht der Ableitung der Tracheaten von Peripatusartigen Thieren ein Hinderniss im Wege steht, so muss die Frage aufgeworfen werden, woher kommen die Malpighi'schen Gefässe der Tracheaten, sind sie Neubildungen oder stammen sie von Organen des Peripatus, resp. der Anneliden ab? Für erstere Annahme haben wir keine Anhaltspuncte, denn wir finden diese Organe, abgesehen von der wechselnden Anzahl, überall in ganz gleichförmiger Ausbildung, nirgends eine niedrigere Stufe der Entwicklung; es ist also wahrscheinlich, dass sie schon in der Wurzel des ganzen Tracheatenstammes in derselben Form vorhanden waren. Wenn man also die bekannten Peripatusarten als Ahnen der Tracheaten betrachten wollte, so müsste man annehmen, dass zwischen ihnen und den ihnen am nächsten stehenden Tracheaten eine grosse Zahl von Uebergängen fehlen.

Bei diesen fehlenden Formen müssten wir die Entstehung der Malpighi'schen Gefässe finden. Doch auch ohne dies ist es theoretisch möglich die Malpighi'schen Gefässe abzuleiten und zwar von den Segmentalorganen ihrer Annelidenvorfahren, wenn wir uns vor Augen halten, welcher Umwandlungen und Verlagerungen diese Organe bei Peripatus fähig sind. Die genannten Organe sind schlauchförmige Anhänge des vom Ectoderm des Embryos stammenden Enddarms, was schon bewiesen würde durch ihre Insertion bei denjenigen Insectenlarven, deren Rectum nicht mit dem Mitteldarm in Verbindung steht, z. B. den Bienen.

Bei Peripatus ist das Proctodaeum ungemein kurz, der Bezirk des eingestülpten Ectoderms ganz klein, nur ein Stückchen der Ventralfläche eines Segments. Wenn bei den Nachkommen Peripatus-ähnlicher Thiere, die sich zu Tracheaten umbildeten, der Enddarm länger wurde, was bei diesen Thieren thatsächlich der Fall ist, so musste zwar nicht, es konnte aber ein grösserer Ectodermbezirk eingestülpt werden, — so gross, dass damit ein Paar Nephridialeinstülpungen mit in die Tiefe gezogen wurden; ja es konnten — vorausgesetzt dass nicht gerade die Segmentalorgane des vorletzten Körpersegments zu Genitalorganen wurden — sogar ein oder mehrere ganze Segmente mit all ihren Anlagen nach innen eingestülpt werden. (Uebrigens genügt ein einziges, und ich denke hier mehr an eine vielleicht mögliche Erklärung der Rectalpapillen.)

Dass ein solches Einbeziehen von Nephridien in den Darmtractus vorkommen kann, sehen wir an den Speicheldrüsen des Peripatus, welche die Segmentalorgane des 2. Extremitätenpaares, der Schleimpapillen sind. Nehmen wir an, dass ein Paar Nephridien mit dem Enddarm in die Tiefe gezogen wurden, so sind zweierlei Schwierigkeiten weiterhin zu überwinden: 1) der Mangel von Trichtern, die sich in die Leibeshöhle öffnen, und 2) die bei den meisten Tracheaten grössere Zahl von Malpighi'schen Gefässen. (Den Mangel der Cilien im Innern derselben erachte ich für nebensächlich; die Cilienbekleidung des Körpers und des Darmepithels ist bei Anneliden bereits ganz oder grossentheils verschwunden, sie ist auch nicht erhalten in den Speicheldrüsen und den „Analdrüsen" des Peripatus. ebensowenig in den Genitalorganen desselben.)

Was den ersten Punct betrifft, so sind bei den Anneliden die Hirudineen Beispiele dafür, dass die innere Oeffnung der Nephridien verschwinden kann. Vielleicht hängt das mit dem im Lauf der Zeit veränderten Circulationssystem zusammen. Bei dem geschlossenen Blutgefässapparat der typischen Anneliden findet sich in der Leibeshöhle eine andere Flüssigkeit, als bei offenem Kreislauf. Dort gelangen die Excretionsstoffe aus dem Blut in die Leibeshöhlenflüssigkeit, und können direct durch die Nephridialtrichter aufgesammelt werden. Hier werden die Excretionsorgane direct von Blut umspült. Die Diffusion, die dort vom Blut zur Leibeshöhlenflüssigkeit stattfindet, kann hier bei geschlossenen Nephridien direct von Blut in diese vor sich gehen. Wenn dies auch keine Erklärung ist, so kann es die Umänderung doch begreiflich erscheinen lassen. Bei Peripatus verlieren auch die Nephridien des letzten Segments (beim Weibchen verkümmern sie) im männlichen Geschlecht ihre innere Oeffnung, was bei den Speicheldrüsen ja ohne weiteres verständlich ist [1]).

Die zum Theil sehr grosse Anzahl der Malpighi'schen Gefässe macht es freilich ungleich schwerer, an eine Ableitung aus einem Paar Nephridien zu glauben. Aber es gibt unter den Thieren mit typischen Segmentalorganen doch auch eine grosse Zahl von Formen, bei denen eine Vermehrung und Zerspaltung der inneren Enden dieser Gebilde vorkommt; hierher gehören viele Anneliden [2]) und die grösste Mehrzahl der Vertebraten. Die Oberflächenvergrösserung eines Organs, besonders eines solchen, das an eine kleine Stelle localisirt wird, zum Zweck ungehinderter, oder selbst vermehrter Function ist eine auf Schritt und Tritt begegnende Thatsache. Wenn bei den Vorfahren der Tracheaten zwei Segmentalorgane mit dem Enddarm nach Innen gerückt zu Malpighi'schen Gefässen wurden, so konnten dieselben — in

1) Vielleicht ist hier auch in Betracht zu ziehen, dass schon bei Peripatus die ectodermale Einstülpung einen grösseren Antheil am Aufbau der Excretionsorgane nimmt, als bei Anneliden (cf. meine Entwicklungsgeschichte des Peripatus), und der mesodermale Theil sich auf die Bildung des Trichters beschränkt. Bei weiterer Ausschaltung des Mesoderms und besserer Ausbildung des ectodermalen Abschnittes konnte die Trichterbildung ganz unterbleiben, und die rein ectodermalen Nephridien waren gegen die Leibeshöhle abgeschlossen.

2) Der Anschauung Beddard's (l. c.), dass die Vielzahl der Nephridien in einem Segment bei Anneliden das primäre sei, kann ich mich nicht anschliessen.

dem Maasse, wie der Rest der normalen Nephridien allmählig seine Thätigkeit einstellte, — um nun die Function allein zu übernehmen, einmal bedeutend in die Länge wachsen, dann aber auch Seitenzweige aussenden und so zu ganzen Büscheln werden. Lag die Zerspaltung nahe am Ursprung aus dem Enddarm, so war nur eine geringe Verkürzung des gemeinsamen Stieles nöthig, um die Zweige einzeln in den Darm münden zu lassen. Verschiebungen, Verlagerungen, Verschmelzungen und Reductionen war hier weiter Spielraum gelassen. Dafür spricht die grosse Verschiedenheit und Zahl in den einzelnen Tracheatengruppen, sowie die Unterschiede bei Larven und ausgebildeten Thieren.

Bisher hat diese Anschauung keine Stütze in der Embryologie der Tracheaten gefunden; selbst in dem Falle, dass man irgendwo den sicheren Nachweis führen wird, dass die Malpighi'schen Gefässe beim Embryo aus Hauteinstülpungen an der Körperoberfläche entstehen und mit dem Enddarm in die Tiefe mitgenommen werden, liesse sich immer noch darüber streiten, ob es umgewandelte Nephridien sind. Denn es gibt keine typisch angelegten Segmentalorgane mehr in dieser Thiergruppe, dafür aber so zahlreiche Hauteinstülpungen, die sich im Anfang gleichen, später aber zu den verschiedensten Gebilden — Coxaldrüsen, Gift-, Stink-, Wehrdrüsen und Tracheen werden, dass es kaum möglich sein wird, sichere Anhaltspuncte zu finden.

Der Gedanke, dass Annelidennephridien bei der Bildung von Arthropodenorganen eine Rolle spielen, ist aber so allgemein verbreitet, dass schon fast alle paarig und segmental angelegten, durch Follikelbildung entstehenden Organe der Tracheaten in Verdacht gerathen sind, so die sog. Coxaldrüsen und die Tracheen. Gerade diese haben indessen mit Segmentalorganen nichts zu thun. Will man die Beziehungen zwischen Malpighi'schen Gefässen und Segmentalorganen zugestehen, so ist Peripatus ja ein Repräsentant einer Thiergruppe, welche unabhängig von Nephridien noch Drüsen an der Basis der Fussstummel und Tracheen besitzt. Die ersteren auf die Borstensäcke der Anneliden zurückzuführen, wie das Lang z. B. thut, ist eine recht glückliche Idee; allein diese Gebilde interessiren uns hier viel weniger als die Tracheen, die für die Tracheaten so characteristisch sind, während Hautdrüsen bei fast allen Thiergruppen vorkommen, bei segmentirten auch segmental angeordnete.

Ich habe früher schon [1]) die Ansicht ausgesprochen, dass die Peripatustracheen hervorgegangen seien aus einzelligen Hautdrüsen der Annelidenvorfahren, da man z. B. bei Landblutegeln solche Drüsen findet, die mit enorm langen, zu Bündeln vereinigten Ausführungsgängen versehen sind, und diese Ausfuhrröhrchen leicht chitinisirt erscheinen. Durch fortgesetzt auf diesen Punct gerichtete Beobachtungen hat sich diese Anschauung nur gefestigt. Die ungemein dünnen unverzweigten Tracheen münden bei Peripatus bündelweise zerstreut auf die Körperoberfläche, auf Rücken und Bauch im Grunde enger und nicht tiefer Follikel, die mit der Körpercuticula ausgekleidet sind. Trifft man einen solchen Follikel auf einem feinen Schnitt in

1) Kennel, Ueber einige Landblutegel des tropischen America. Zool. Jahrb. Bd. II.

seiner ganzen Länge (Fig. 1), so sieht man in seinem Grunde die zahlreichen Tracheen entspringen und es macht den Eindruck, als ob dort eine Anzahl derjenigen Zellen fehlten, die den Abschluss des Follikels zu besorgen hatten. So weit man nun auch die Tracheenröhrchen verfolgt — nirgends bemerkt man einen Zellenüberzug, nirgends einen anliegenden Kern, nicht einmal eine feine Protoplasmaumhüllung, sondern nur das scharf conturirte Canälchen. Die Röhrchen können also nur dadurch entstanden sein, dass sich für jedes eine Zelle im Grunde des Follikels aus dem Verband freimachte, in die Tiefe rückte, dahin oder dorthin wanderte, aber durch einen sehr feinen Hals mit dem Epithel in Verbindung blieb. Dieser Zellenhals, ursprünglich wohl mit Schleim gefüllt, wurde hohl und in ihn drang Luft ein, während die ungemein dünne Protoplasmahülle vertrocknete und nun die Wand der Trachee darstellt. Aechtes Chitin scheint die Wand nicht zu sein, da sie sich auch in kalter Kalilauge rasch auflöst. Nur die gemeinsamen Follikel sind mit Chitin ausgekleidet, so dass man die Zahl derselben an einem Stück Peripatushaut, das man in Kalilauge kochte, genau feststellen kann. Ob am Ende jedes Tracheenröhrchens sich noch die Zelle findet, kann ich nicht sagen, halte es aber für sehr wahscheinlich.

Da man auf diese Tracheen diejenigen der ächten tracheaten Arthropoden zurückführen kann, so ist jedem Versuch, die Nephridien der Anneliden hier in Betracht zu ziehen, die Spitze abgebrochen. Bei dieser Zurückführung ist zweierlei zu berücksichtigen: 1) die Structur der Arthropodentracheen, und 2) die Zahl und Lage der Stigmata. Um den ersten Punct für sich besprechen zu können, nehmen wir einstweilen an, worauf ich nachher zu sprechen komme, dass bei den Peripatus-artigen Stammeltern der Tracheaten in jedem Segment nur ein Paar von den ebenbeschriebenen Tracheenbündeln vorhanden gewesen, resp. übrig geblieben sei.

Dann finden wir bei den Tracheaten fast alle wünschenswerthen Uebergänge bis zu den complicirtesten Tracheenbildungen, zum Theil in Thiergruppen, die in der Phylogenie hinter einander zu stellen sind, zum Theil auch innerhalb einer Thiergruppe oder im Individuum nebeneinander. Dabei sind die Structuren der Tracheen, wie sich zeigen wird, noch in anderer Weise interessant und von grosser Bedeutung.

Man kann bekanntlich dreierlei Hauptformen von Tracheen unterscheiden: 1) unverästelte feine Tracheen, die in grosser Zahl von einem Stigma, oder einem kurzen Tubus entspringen, ohne Spiralfaden, 2) stark baumförmig verzweigte, zum Theil anastomosirende Tracheen mit Spiralfaden, und 3. Fächertracheen.

Am nächsten steht offenbar die erste Sorte den Peripatustracheen. Wir finden sie bei den Diplopoden und vielen Arachniden; entweder sind sie allein vorhanden oder neben einer der anderen Sorten. Auf den ersten Blick könnte man sie für identisch halten in der Structur mit den Athmungsorganen des Peripatus, allein ihr feiner Bau ist dennoch verschieden. So fein das einzelne Röhrchen auch ist, nimmt es seinen Ursprung doch nicht aus einer Zelle, sondern ist in der ganzen Länge von einem feinen Protoplasmaüberzug umhüllt, in dem schmale Kerne in grösserer Zahl eingebettet sind; ferner ist das Röhrchen von ächtem Chitin ausgekleidet, was

beim Kochen in Kalilauge sofort entgegentritt. Doch erhält man bei dieser Procedur die Chitinröhrchen kaum in der ganzen Länge der wirklichen Tracheen und ich bin daher geneigt anzunehmen, dass sich ein beträchtlich langes Endstück genau so verhält, wie die Tracheen des Peripatus in der ganzen Länge; das ist natürlich bei dem Eindringen der Röhrchen in die verschiedensten Gewebe ungemein schwer nachzuweisen. Nur dieses Endstück wäre dann einer Peripatustrachee gleichwerthig, und das Tracheenröhrchen eines Julus oder einer Spinne etwa so zu verstehen, wie die Bildung eines Borstenfollikels bei Anneliden oder im Mantelsaum der Brachiopoden. Die eine, ursprünglich secretorische, später in ihrem Hals lufthaltige Zelle zog bei ihrem Einwuchern in die Tiefe Nachbarzellen mit, welche nun den Ausführungsgang umkleideten. Da in unserm Falle diese Zellen als gewöhnliche Elemente der Epidermis, resp. des gemeinsamen Follikels, Cuticula bilden konnten, so thaten sie dies auch in Zukunft und lieferten das feine Cuticularröhrchen, an dessen Ende sich erst die ursprüngliche, aus einer Zelle hervorgegangene Trachee ansetzt. Die Verschiedenheit von einem feinen Borstenfollikel ist nur die, dass hier die Zelle im Grund ihre secretorische Thätigkeit behielt und ein erstarrendes Secret liefert, das die Borste bildet, während sie dort aufhörte, zu secerniren und der Ausführungsgang lufthaltig wurde.

Nun blieb es aber nicht bei dieser Verbesserung der Athmungsorgane, sondern auch der gemeinsame Follikel, in den alle diese feinen Röhrchen mündeten, nahm Theil an der Vergrösserung der athmenden Oberfläche: er drang auch mehr in die Tiefe, seine Cuticula wurde feiner, und nun kam die Differenzirung seiner Cuticula in den bekannten Spiralfaden zur Ausbildung. Auf seiner inneren Spitze trug dieser Follikel zunächst sämmtliche Tracheen. Diese Spitze jedoch gabelte und spaltete sich mehrfach, der Wachsthumsrichtung der einzelnen Tracheenbündel entsprechend, so dass jede weiter in die Tiefe vordringende Spitze bald mehr, bald weniger primäre Tracheen trug und vor sich her schob. Aus diesem sich mehr und mehr zerspaltenden Follikel wurde das, was jetzt bei vielen Tracheaten die Spiraltracheen sind. Sie tragen an ihren feinsten Zweigen die einfachen Tracheen ohne Spiralfaden, und diese gehen über in das Endstück, das einer Peripatustrachee, dem Derivat einer einzigen Zelle entspricht. Es ist selbstverständlich, dass mit der Ausbildung dieser complicirteren Tracheen, und mit der Uebernahme der Hauptarbeit ihrerseits, die primären und secundären Theile sich bedeutend verkürzen konnten, und jetzt nur noch als allerletzte Endstückchen vertreten sind. Dass die Anastomosen der einzelnen Tracheenstämme, Bildungen späterer Zeit, secundäre Erscheinungen sind, geht schon aus der getrennten Anlage der Tracheen beim Embryo hervor.

Es kann nicht meine Aufgabe sein, alle verschiedenen Vorkommnisse im Bau der Tracheen einzeln zu besprechen, die sich überdiess ohne Weiteres ergeben, nur möchte ich erwähnen, dass man bei den Tracheen von Julus und der verwandten Formen, den Uebergang, wie ich ihn schilderte, deutlich wahrnehmen kann. Vom Stigma aus zieht der „Tracheenvorhof“ nach innen, der sich dann spaltet in mehrere Aeste; einer oder mehrere, die kurz bleiben, tragen unverästelte, feine Tracheen

ohne Spiralfaden in grosser Zahl, andere sind länger, verzweigt, besitzen Spiralfaden und tragen an ihren Enden die feinen, aber jetzt kurzen einfachen Tracheen. Anastomosen finden hier nicht statt. Man kann also unterscheiden: 1) primäre Tracheen (Peripatus); 2) secundäre (die unverästelten Röhrchen der Juliden und Spinnen); 3) tertiäre, die mit Spiralfaden.

Sehen wir zunächst ab von der Tracheeneinrichtung der Scutigera, so bleiben noch die Fächertracheen oder Tracheenlungen der Spinnen übrig. Ich möchte diese Gebilde nicht von metamorphosirten „Tracheen", d. h. durch Umbildung vorhandener, wohlentwickelter tertiärer Tracheen herleiten, sondern von einem gemeinsamen Vorhof secundärer Tracheen. Wenn wir uns vorstellen, dass dieser Vorhof, wie es z. B. bei den Spinnen, die noch unverästelte Tracheenbündel an Stelle der zweiten Fächertracheen haben, der Fall ist (Argyroneta u. A.), ein weiter, rundlicher Raum war, auf dessen innerer Wölbung die Röhrchen in grosser Zahl aufsassen, so konnte sich derselbe ebenfalls auf seiner Oberfläche zerspalten. Das geschah aber der ganzen Anlage entsprechend nicht in spitze Hörner und Zipfel, sondern in parallele Falten, deren jede eine Reihe von Tracheen trug. Zwischen den nach aussen vom Lumen, d. h. gegen das Körpergewebe zu vorspringenden Falten lag natürlich Bindegewebe, eventuell auch Muskulatur, und durch ebensolches waren die Falten an ihren Kanten verknüpft. Spiralfäden kamen nicht zur Ausbildung, hätten auch bei der flachen Gestalt der Falten keinen Sinn; wohl aber konnte durch die Contractionen des zwischen den hohlen Blättern ausgespannten Gewebes eine localisirte Athembewegung zur Ausbildung kommen, indem die Taschen erweitert und verengt wurden, was von besonderem Vortheil werden musste bei den Formen, die entweder fest gepanzert wurden, oder deren Abdomen die Segmentirung einbüsste. Bei den Thieren mit stark verästelten, den ganzen Körper durchziehenden tertiären Tracheen spielt das Blut bei der Athmung keine, oder nur eine sehr untergeordnete Rolle; jedem Organ, jedem Gewebe wird die Luft direct zugänglich gemacht. Hier, bei dieser Einrichtung dagegen konnte es wieder zu seinem Recht als Sauerstoffträger gelangen. Die Athmung wurde wieder aus einer allgemeinen inneren, zu einer localen inneren, wie andererseits bei der Kiemenbildung aus einer allgemeinen äusseren, zu einer localen äusseren, denn der Wechsel der sauerstoffreichen und -armen Luft, war an dieser bevorzugten Stelle ganz besonders rege. In demselben Maasse aber, wie das zur Ausbildung kam, degenerirten die feinen secundären, vielleicht erst primären Tracheenröhrchen, und der gefaltete Vorhoffollikel blieb als alleiniges Athmungsorgan übrig. Dass auch bei Arachnoideen die Entwicklung der Tracheen einen anderen Verlauf nehmen konnte, dass sich aus dem „Vorhof" statt eines Fächers Röhrentracheen mit Spiralfäden ausbilden mochten, wie sie bei Juliden angefangen, bei Scolopendra und den Insecten zur höchsten Ausbildung gebracht sind, das zeigen ja manche Gruppen der hierher gehörigen Thiere, Solpugiden, Phalangiden, Cyphopthalmiden etc. „Baumtracheen" und Fächertracheen haben meiner Meinung nach gleichen Ursprung und verschiedenen Entwicklungsgang, aber die letzteren können nicht

von ersteren abgeleitet werden; sie stammen in divergenter Richtung von dem Follikel her, welcher an seinem Grund die Tracheen erster, resp. zweiter Ordnung trug.

Die mehr durch ihre auffallende Lage, als durch ihre Structur abweichenden Tracheen von Scutigera scheinen in ähnlicher Weise abzuleiten zu sein, wie die Fächertracheen. Auch hier sind es die „Vorhöfe", welche sich in Zipfel ausgezogen haben, aber diesmal ähnlich wie bei den „Baumtracheen" in zahlreiche spitze Ausläufer, die sich mehrfach verästeln. Ob die secundären Tracheen (Röhrentracheen) hier erhalten sind in den letzten unverzweigten Endröhren, oder ob diese nur die letzten Zipfel des „Vorhofs" sind, kann am ausgebildeten Thier kaum festgestellt werden, da hier ebensowenig wie bei den Fächertracheen Spiralfäden vorhanden sind. Dass bei Scutigera je ein Paar Vorhöfe mit einander verschmolzen sind und sich durch ein gemeinsames Stigma öffnen, liegt ebenso auf der Hand, wie bei den Tracheen mancher Spinnen; nur liegen sie hier auf der Ventralseite, dort in der Mittellinie des Rückens.

Was nun den zweiten Punct, die Zahl und Lage der Stigmata bei den Tracheaten anlangt, so halte ich alle hier vorkommenden Verhältnisse für secundäre, sowohl die Höchstzahl von einem Paar in einem Segment, wie auch dessen Lage — in der Regel an den Seiten des Körpers, dorsal von den Extremitäten. In letzterer Hinsicht traten mancherlei Verschiebungen ein: an Körpertheilen, die später der Extremitäten entbehrten, konnten die Stigmata mehr nach der geschützteren Bauchseite rücken, und sie sind am Abdomen der Arachnoideen zum Theil in deren Medianlinie mit einander verschmolzen; bei Scutigera dagegen verschoben sie sich aus unbekannten Gründen nach dem Rücken.

Dass die Vorfahren der Tracheaten an jedem Körpersegment, wo es die innere Organisation gestattete, Stigmata trugen, geht aus der Mannichfaltigkeit der Lage dieser Gebilde bei den heutigen Vertretern der Gruppe hervor; besitzt doch Scolopendrella Stigmata am Kopf! Die Reduction der Athemöffnungen auf geringere Zahl und ihre Beschränkung auf einzelne Segmente bildete sich erst später heraus, theils in Anpassung an eigenartige Lebensverhältnisse, — was uns besonders die Insectenlarven lehren, theils wohl auch — ich möchte sagen mechanisch, — in Folge der Hindernisse, welche andere zur Ausbildung oder mächtigen Entwicklung kommende Organe in den Weg legten. Hierher dürften vielleicht zu rechnen sein die starke Cuticularisirung der Körperbedeckung, die innige Vereinigung mehrerer Segmente zu grösseren Körpertheilen, die Anordnung und starke Entwicklung der Muskulatur in Kopf und Thorax u. dgl. Ich vermuthe, dass es auch ähnliche Verhältnisse waren, welche aus der Vielzahl der Stigmata der Peripatusartigen Thiere die Zweizahl an jedem Segment ursprünglich bedingten. Freilich kann man ja auch den Gedanken hegen, dass bei denjenigen „peripatiformen" Thieren, welche die Stammeltern der Tracheaten wurden, überhaupt nur ein Paar Bündel von Drüsenschläuchen in jedem Segment lufthaltig wurden, wodurch die Anordnung der Stigmata der Tracheaten gegeben wäre. Dann erforderte aber dieses Verhältniss wieder eine Erklärung, wenn

man nicht die weitere Annahme machen will, dass schon bei den Annelidenvorfahren dieser die langen Hautdrüsen nur in je einem Follikelpaar segmentweise ausmündeten. Analoges Verhalteu könnten wir finden in den zerstreuten Borstenfollikeln der Perichaeten und den zusammengehäuften der Lumbriciden.

Indessen scheint es mir, als ob die Ableitung der paarigen Tracheen von zerstreuten Bündeln, wie wir sie einmal bei Peripatus kennen, auch nicht unüberwindliche Schwierigkeiten fände. Bei manchen Peripatusarten sollen ja die Tracheenbüschel in je einem Gürtel in einem Segment vertheilt sein. Bei einer solchen Anordnung ist es nicht unbegreiflich, dass mit der fester werdenden Cuticula des Körpers dasjenige Paar, welches in der Nähe der Füsschen lag, seine Function am besten ausüben konnte, da bei der Bewegung der Extremitäten die dazu nöthige Muskulatur auch die Tracheen selbst oder doch den gemeinsamen Follikel durch Hin- und Herbiegen, Comprimiren, Expandiren etc. in der Richtung beeinflussen konnte, dass dort ein öfterer Luftwechsel stattfand, als anderswo. Dieser Follikel, zunächst an einer weich bleibenden Hautstelle liegend, hatte auch am ersten die Fähigkeit, sich weiter zu entwickeln, durch Anstülpungen, seiner erhöhten Thätigkeit entsprechend, secundäre Tracheenäste zu bilden. Die übrigen an ungünstigeren Stellen liegenden degenerirten. Zudem kamen in anderen Körperregionen Organe zur Ausbildung, die allen Platz beanspruchten: dorsal das Herz und die Genitalorgane, in den Seitentheilen des Rückens und Bauches die Hauptstammesmuskulatur, in der ventralen Mittellinie die Ganglienkette; in den Seitentheilen dagegen war Raum zur höheren Entfaltung neuer Organe, besonders da dort die verschwindenden Excretionsorgane Platz machten. Man braucht auf diese Gesichtspuncte kein grosses Gewicht zu legen und kann doch die Anschauung acceptiren, dass je ein Paar der Tracheenbündel des Peripatus in jedem Segment das Uebergewicht über die übrigen gewann, und allein zur weiteren Ausbildung kam. Ein Zusammenrücken sämmtlicher Tracheenbüschel eines Segments zu je einem Paar erscheint mir dagegen höchst unwahrscheinlich.

Wenn man sich der Meinung anschliesst, dass auf diese Weise die Malpighischen Gefässe und die Tracheen der Tracheaten auf Organe peripatusartiger Thiere zurückgeführt werden können, so steht auch der Annahme nichts mehr im Wege, dass überhaupt erstere von letzteren abstammen. Ich sage absichtlich „peripatusartiger Thiere“, denn die bekannten Arten der Gattung Peripatus können diese Voreltern nicht sein, sie sind ein dem Urzustand ähnlicher, aber doch in einzelnen Beziehungen selbständig etwas weiter entwickelter Seitenzweig. Die Ahnen der Tracheaten s. str. müssen eine Stufe niedriger gesucht werden. Ja, ich gehe weiter, und behaupte, die heutigen Tracheaten sind auch kein einheitlicher Thierstamm, sondern stellen die Seiten- und Endzweige zweier Aeste dar, die von gemeinsamen Ahnen, die ich als „Peripatiformes“ bezeichnen will, entspringen. Eine ähnliche Anschauung drückt sich auch in der neueren Eintheilung der Tracheaten in Antennata und Chelicerota aus, wonach die beiden Aeste einerseits die Myriapoden und Insecten, andrerseits die Arachnoideen

umfassten. Ich kann dieser Theilung nicht beistimmen; denn wenn sich nachweisen lässt, was nach Jaworowski's Mittheilung der Fall zu sein scheint, dass bei den Embryonen der Spinnen Antennen angelegt werden, so stammen sie ja doch von Antennaten ab, sind also nur hinter, nicht aber als gleichwerthig neben diese zu setzen. Zweitens aber scheint mir auf ein Organsystem bisher nicht die nöthige Aufmerksamkeit verwendet worden zu sein, das wenigstens überall mit wenigen Worten abgethan wird, und das dennoch von grösster Bedeutung ist: das Genitalsystem.

Nehmen wir einmal alle Tracheaten zusammen, so finden wir, dass bei einigen Gruppen die Geschlechtsorgane an hinteren Körperende, genauer im vorletzten Körpersegment ausmünden; nämlich bei allen Insecten und bei den Chilopoden unter den „Myriapoden"; in den anderen Gruppen aber viel weiter vorn am Körper: nämlich bei den Arachnoideen am Anfang des Abdomens, bei den Diplopoden zwischen 2. und 3. Beinpaar, bei Symphylen am 4. Segment, bei Pauropoden am 2. Beinpaar. Da die Keimdrüsen aller (nicht total degenerirter) Tracheaten mit den Leitungswegen vollkommen fest verwachsen sind, so ist an eine Verschiebung der Geschlechtsöffnung, zumal bei dem segmentirten Körper der Tracheaten, in solcher Ausdehnung nicht zu denken, — ein Satz, den ich weiter oben schon einmal ausgesprochen habe. Wir müssen in dieser weit verschiedenen Lage der Geschlechtsöffnungen vielmehr von ursprünglichen Vorfahren überkommene Verhältnisse sehen, und darum die Tracheaten in zwei Stämme theilen: 1) in solche mit Geschlechtsöffnung am Hinterende (vorletztes Körpersegment) und 2) in solche mit Geschlechtsöffnung im vorderen Theil des Körpers. Damit ist gesagt, dass schon die Myriapoden keine einheitliche Tracheatengruppe sind, sondern in zwei Abtheilungen zerfallen, von denen die Chilopoden nähere Beziehungen zu den Insecten haben, die Diplopoden, Symphylen und Pauropoden mit den Arachnoideen enger verwandt sind. Diese Anschauung ist vielleicht auf den ersten Blick etwas befremdend, weil man bisher sich gewöhnt hatte, die Myriapoden auf Grund äusserer Verhältnisse, besonders wegen der grösseren Extremitätenzahl, als eine in sich geschlossene Thiergruppe zu betrachten. Ihre Trennung muss sich in ähnlicher Weise vollziehen, wie die der Linnéischen „Amphibia", bei denen es sich bald herausstellte, dass unter ihnen Thiere vereinigt waren, von denen die einen, die Reptilien viel nähere Beziehungen zu den Vögeln als zu den Amphibien im heutigen Sinne haben, während diese letzteren in enge Beziehung zu den Fischen gebracht werden müssen.

Wenn man, wie das fast allgemein geschieht, der Anschauung huldigt, dass die Tracheaten von Anneliden abstammen, dass die ältesten Tracheaten der Segmentirung der Vorfahren und deren Parapodialanhängen entsprechend, eine grosse Zahl von Extremitäten gehabt, und dieselben erst allmählig, von hinten nach vorn fortschreitend eingebüsst haben, wenn man ferner die Arachnoideen von den Insecten trennt, so liegt es doch nahe, zu untersuchen, ob bei den vielfüssigen Tracheaten die Wurzel der beiden höheren Tracheatengruppen zu finden sei; und wenn man nun bei diesen bereits Organisationsverhältnisse auffindet, die, auf verschiedene Ab-

theilungen vertheilt, theils nach der einen, theils nach der anderen Seite hinweisen, so wird man genöthigt sein zu fragen: 1) sind diese Verschiedenheiten so bedeutend und von solchem Gewicht, dass man von ihnen die bei den höheren Tracheaten vorhandenen Unterschiede ableiten und erklären kann, und 2) wie sind die Differenzpuncte bei den Myriapoden selbst zu erklären und bedingen sie die Trennung dieser Thiergruppe in zwei gesonderte?

Auf der beigegebenen Tafel habe ich die wichtigsten Gruppen der Tracheaten in schematischer Weise derart skizzirt, dass die Segmente durch querverlaufende Linien in gleicher Breite angegeben sind; nur bei Julus sind dadurch auch die Doppelsegmente von einander abgegrenzt. Eine besondere Verzerrung der Gestalt ist dabei nur in der Kopfregion bedingt. Als Kopfsegmente sind der Höchstzahl bei Insecten entsprechend 4 mit rother Farbe ausgezeichnet, die drei folgenden als Thoraxsegmente sind grün gehalten. Ein Irrthum kann hier nur bei den Diplopoden und Scolopendrella unterlaufen, weil bei diesen die Zahl der Kopfsegmente aus den Kauwerkzeugen nicht sicher erkennbar ist, und ausserdem bei den ersten Rumpfsegmenten möglicherweise Verschmelzungen und Ausfall vorliegen kann.

Wo die Zahl der Körpersegmente 20 übersteigt, ist nach diesem Segment eine Lücke gelassen, und die letzten von hinten nach vorn mit x, x—1, x—2 etc. bezeichnet. Auf die Einzelnheiten der Darstellung auf der Tafel muss ich verschiedentlich im Text noch zu sprechen kommen. Peripatus und die links von ihm stehenden Scolopendra und Insecten haben die Geschlechtsöffnung am Hinterende des Körpers, die rechts von Peripatus stehenden Gruppen dagegen in vorderen Körperregionen. Von einzelnen Organen sind schematisch, aber der wirklichen Structur entsprechend, eingezeichnet die Geschlechtsorgane — in der ersten Gruppe roth, in der zweiten blau; ferner sind die Stigmata angedeutet und bei Peripatus die Nephridien.

Ein Blick auf die nebeneinander stehenden Figuren wird sofort erkennen lassen, dass die Genitalorgane einer Scolopendra nicht auf die eines Julus oder einer Scolopendrella bezogen werden können, soweit es die Ausführungsgänge anlangt — ebensowenig umgekehrt. Es ist dabei gänzlich abzusehen von der Duplicität der Oeffnungen bei Julus, oder der Oviducte bei Scolopendrella, denn diese Verhältnisse lassen sich sehr einfach durch mangelnde oder durchgeführte Einstülpung zur Bildung einer Vulva oder allgemeiner gesprochen, eines Genitalatriums erklären, wie ja auch bei Peripatus der unpaare Endkanal durch secundäre Einstülpung des die beiden getrennten „Genitalnephridien" tragenden Hautabschnittes zu stande kommt. Ebenso wenig Gewicht ist zu legen auf die Einheit oder Duplicicät der Keimdrüsen, da als ausgemacht angesehen werden muss, dass die keimbereitenden Organe bei allen Tracheaten ursprünglich paarig angelegt werden. Das geht schon daraus hervor, dass die Hoden bei Scolopendra paarig sind, während das Ovarium einfach ist. Alle diese Verhältnisse sind besondere Erwerbungen in den einzelnen Zweigen der Tracheaten.

Hauptsächlich zu berücksichtigen ist die Lage der Geschlechtsöffnung. Wenn man die grosse Zahl der Körpersegmente in beiden Thiergruppen in Betracht zieht,

ferner die streng durchgeführte Homonomie derselben in Haut, Extremitäten, Muskulatur, Nervensystem und Gefässapparat, so wird man gewiss nicht begreifen können, wie sich diese Oeffnung in so ausgiebiger Weise hätte verschieben können. Anders könnte es sein bei Unterdrückung der Segmentirung, z. B. bei Spinnen. Wenn da sehr frühzeitig im Embryo die Segmentirung des Abdomens verschwindet, so mag die Geschlechtsöffnung liegen wo sie will, sie könnte durch bevorzugtes Wachsthum des vor oder hinter ihr liegenden Körpertheils gewaltig veschoben werden. Nicht so bei streng durchgeführter Segmentirung: hier behält — wenigstens auf der Oberfläche — jedes Segment das, was es hat, und gibt es nicht an ein anderes ab. Nur im Inneren des Körpers, wo in der Leibeshöhle die Gliederung verloren ist, treten solche Verschiebungen, besonders auch Verlagerungen der Keimdrüsen ein — hier gibt es eben keine separaten Segmente mehr, der Raum ist hier das Massgebende.

Wenn man aber die Myriapoden als einheitliche Thiergruppe aufrecht erhalten will, muss man entweder eine solche, meiner Meinung nach unmögliche, Verschiebung der Genitalöffnung annehmen, oder zu dem noch unwahrscheinlicheren Ausweg schreiten, die eine Oeffnung als Neubildung unter allmählicher Unterdrückung der früheren aufzufassen! Man darf aber dabei nicht vergessen, dass die primär vorhandene doch bis zur vollen Functionsfähigkeit der neuen in unverminderter Thätigkeit geblieben sein musste, also nicht die geringste Veranlassung zur Neubildung an ganz anderer Stelle vorlag. Anhänger einer Verschiebungstheorie könnten darauf hinweisen, dass bei den ebenfalls segmentirten Fischen eine sehr weitgehende Verschiebung der hinteren Extremitäten stattfinden konnte und stattgefunden hat. Aber dieses Beispiel kann nicht ziehen. Denn hier handelt es sich um Organe, die ihre Thätigkeit nach Aussen entfalteten zur Beförderung des ganzen Körpers, Organe, die in weicher Grundlage eingebettet rein von der Muskulatur abhängen und von dem Nutzen, den gerade ihre Lage hat; diese Muskulatur aber setzte sich an innere Stützpuncte der losen Extremitäten an. Die Configuration des inneren Skelets wird aber ganz und gar bedingt durch die Wirkung der Muskulatur in Bezug auf innere Organe oder auf die Aussenwelt. Eine solche Wirkung kann jedoch bei den Genitalorganen der Myriapoden nicht in Betracht kommen, da die Körpermuskulatur nichts mit denselben zu thun hat, und doch vor allem das äussere Chitinskelet beeinflusst werden müsste. Ausserdem finden wir in der Embryologie keinerlei Anhalt für eine Verschiebung oder Neubildung der Geschlechtsöffnung, was sehr merkwürdig wäre, wenn diese Umänderung erst im Stamm der Myriapoden stattgefunden hätte.

Bei einigen Milben (Tyroglyphen) verschiebt sich allerdings bei der letzten Häutung die Genitalöffnung, die bis dahin zwischen dem letzten Fusspaar lag, nach vorn, so dass sie nun beim zweiten Beinpaar zu finden ist; ebenso ist sie bei anderen Milben noch weiter nach vorn verlagert. Allein hier handelt es sich offenbar um degenerirte Thiere, oder richtiger um Thiere, deren ganzer Stamm in regressiver Metamorphose begriffen ist, bei denen ausserdem die Segmentirung des Körpers vollkommen unterdrückt ist. Dass bei solchen Thieren Verschiebungen vorkommen kön-

nen, habe ich bereits zugegeben, und ich kann daher in diesen Thatsachen keinen besonders werthvollen Gegenbeweis erblicken. In der Gruppe der Acarinen findet man überhaupt sehr eigenthümliche Verhältnisse, die eines genaueren Studiums wohl werth wären. Diese Absonderlichkeiten und die merkwürdige Metamorphose, mit z. Th. ruhendem Puppenstadium, lassen überhaupt noch die Frage zu, ob die Acarinen bei den Arachnoideen an ihrem richtigen Platze stehen, oder ob sie nicht einen selbständigen Zweig der Tracheaten, etwa den übrigen Arachnoideen gleichwerthig repräsentiren.

Sehr wohl denkbar und verständlich ist dagegen eine derartig verschiedene Anlage bei segmentirten Thieren, deren Keimdrüsen noch nicht mit den Ausfuhrwegen verwachsen waren, bei denen die Keimproducte in die Leibeshöhle fielen und, wie bei Anneliden, durch Nephridien nach Aussen befördert wurden. Das waren aber noch keine Myriapoden, sondern höchstens Peripatusähnliche Thiere. Dafür finden wir auch bei den heutigen Peripatusarten noch Anhaltspuncte.

Wir wissen sicher, dass bei Peripatus die Segmentalorgane des vorletzten Körpersegments mit demjenigen Theil der Leibeshöhle verwachsen, in dem die Keimproducte entstehen. Dadurch werden sie zu den definitiven Vasa deferentia und Oviducten und Uterus. Bei den Stammeltern der Peripatusgruppe war das offenbar nicht der Fall; hier fielen, wie bei allen Anneliden, die nicht in einseitiger Weise abgeändert sind, die Genitalproducte in die Leibeshöhle, wurden von den Trichtern einzelner besonders hiezu modificirter Nephridien aufgefangen und abgeleitet. In dieser Function wurde in der Peripatusgruppe das Nephridienpaar des vorletzten Segments bevorzugt. Wahrscheinlich waren aber bei den Ahnen des Peripatus noch andere Nephridien an diesem Geschäft betheiligt, wenn auch später in geringerem Maasse, nämlich die des 7. und 8. Segments, an denen jetzt das 4. und 5. Beinpaar sich findet. Diese Nephridien sind bei den bekannten Peripatusarten durch besondere Grösse, Länge der Canalschlinge und stärkere Innervirung ausgezeichnet. Da die vor ihnen liegenden relativ sehr klein, alle dahinter folgenden normal sind, in den betreffenden Segmenten keinerlei besondere Organisationsverhältnisse vorliegen, die die Stärke der Nephridien erklären könnten, so bleibt kaum eine andere Annahme übrig, als dass sie früher, als noch kein Segmentalorgan mit dem Keimlager verwachsen war, dieses letztere auch wohl noch eine grössere Ausdehnung in der Länge des Körpers hatte, Theil nahmen an der Ausfuhr der Spermatozoen und Eier. Es darf dabei berücksichtigt werden, dass bei den Peripatusarten mit geringer Segmentzahl, wie P. capensis, Novaezealandiae etc., nur eine geringe Zahl von Segmenten zwischen den vorderen und hinteren Genitalnephridien liegt.

Bei der Annahme, dass diese Nephridien ursprünglich gleichmässig functionirten, steht nichts der Anschauung im Wege, dass bei der Weiterentwicklung und Umbildung solcher Thiere in der einen Gruppe das Paar am Hinterende, in einer anderen eines der beiden vorderen Paare bevorzugt wurden. Aus der Fortentwicklung der ersten Gruppe gingen hervor die heutigen Peripatus, die Chilopoden und Insecten,

aus der anderen unbekannte (vielleicht ausgestorbene) peripatiforme Thiere, Diplopoden, Symphylen, Pauropoden und Arachnoideen.

Mit dieser Auffassung stimmt die Lage der Geschlechtsöffnungen der genannten Thiere vollkommen überein, soweit sich dies bei dem fast gänzlichen Mangel embryologischer Thatsachen aus der Anatomie der fertigen Thiere ergeben kann. In Bezug auf die erste Gruppe kann kein Zweifel herrschen, sie schliessen sich in Hinsicht auf ihren Genitalapparat an Peripatus direct an. Die beiden Ovarien des Peripatus sind zwar durch eine Bindegewebsumhüllung vereinigt, aber innerlich durch eine Scheidewand getrennt. Bei Scolopendra ist diese Scheidewand verschwunden, der Eierstock einheitlich geworden; im männlichen Geschlecht dagegen ist die Trennung ebenso durchgeführt, wie bei den Insecten in beiden Geschlechtern. Die Oviducte des Peripatus sind sehr lang geworden, und finden Verwendung als Uteri, bei den Insecten sind sie meist als einfache Eileiter erhalten, bei Scolopendra aber bis zum Verschwinden verkürzt, oder in das Ovarium aufgegangen. Bei den Insecten ist ferner eine secundäre Zerspaltung der Keimdrüsen hinzugekommen, in vier bis zahlreiche Ovarial- oder Hodenschläuche. Dass dies in der That eine spätere Umbildung ist, folgere ich aus der ungemein wechselnden Zahl dieser Ovarialzipfel bei Insecten; analoge Beispiele haben wir in der Klasse der Plathelminthen übergenug. Wie die verschiedenen Anhangsdrüsen bei Chilopoden und Insecten zu deuten sind, ist bei dem Mangel darauf gerichteter entwicklungsgeschichtlicher Untersuchungen nicht leicht zu sagen. Wir haben wiederum bei Plathelminthen und Schnecken Beispiele, dass die mannigfachsten Anhangsdrüsen und andere Gebilde, wie Receptacula seminis, Bursa copulatrix aus Ausstülpungen der Leitungswege entstanden sind. Da aber die Vagina der genannten Tracheaten, wie bei Peripatus, als ectodermale Einstülpung zur Anlage kommt, und bei Peripatus, und auch noch bei den anderen höheren Gruppen Hautdrüsen (Coxaldrüsen) vorhanden sind, so halte ich es für sehr wahrscheinlich, dass die fraglichen Gebilde mit hineingezogene und umgewandelte Hautdrüsen des betreffenden Segments sind, wie man in ähnlicher Weise die Malpighischen Gefässe als hineingezogene Segmentalorgane erklären kann. Dafür kann der Umstand geltend gemacht werden, dass schon bei Peripatus, wenigstens im männlichen Geschlecht, die Coxaldrüse des Genitalsegments stark umgewandelt und zu besonderer Leistung herangebildet ist. Die grössere Zahl dieser Drüsenschläuche, 2—3 Paar, bietet keine Schwierigkeit, da bei vielen Peripatusarten an jedem Segment mehr als ein Paar Hautdrüsen ventral und median von den Beinchen vorhanden sind.

Die Verschiedenheiten in der Bildung der Geschlechtsorgane bei Peripatus, Chilopoden und Insecten zeigen dagegen andrerseits, dass keine dieser Thiergruppen ein Durchgangsstadium für die folgenden sein kann, sondern dass jede das gegenwärtige Ende eines in selbständiger Richtung weiterentwickelten Seitensprosses des einheitlichen Astes darstellt. Man kann z. B. nicht von dem einheitlichen weiblichen Genitalapparat der Chilopoden den paarigen der Insecten ableiten, sondern dieser steht dem des Peripatus näher.

Etwas grössere Schwierigkeiten bieten uns die Vertreter der anderen Gruppe, wo auch nur sorgfältige embryologische Untersuchungen endgültige Aufklärung verschaffen können. Am einfachsten liegt noch die Sache bei den vollkommen gegliederten Arachnoideen; hier finden wir die Genitalöffnung im ersten extremitätenlosen Körpersegment, und wir werden annehmen dürfen, dass das für alle Spinnen Geltung hat, auch da, wo später jede Segmentirung des Abdomens verschwindet. Setzen wir die Cheliceren gleich den Mandibeln der übrigen Tracheaten, und gleich den Kiefern des Peripatus, so zeigt ein Blick auf die Tafel, dass die Geschlechtsöffnung in dem Segment liegt, in dem bei Peripatus das zweite Paar der grossen Nephridien mündet.

Bei den Diplopoden, Symphylen und Pauropoden ist dies darum nicht so zweifellos, weil man hier über die Zahl der Kopfsegmente noch nicht im klaren ist, und ausserdem gelegentlich auf den Kopf rudimentäre Körperringe ohne Extremitäten folgen. Bei Julus liegen die beiden getrennten Geschlechtsöffnungen auf der Grenze zwischen dem zweiten und dritten beintragenden Segment. Diese Segmente, ebenso wie die vorhergehenden, sind einfach. Ein vorhergehendes Segment, nach der geläufigsten Annahme das erste auf der Kopf folgende, ist extremitätenlos. Aus wie viel Segmenten besteht aber der Kopf? Wenn das Gnathochilarium den vereinigten Anhängen von zwei Segmenten entspricht, so ist er wie derjenige der Insecten aus 4 Segmenten zusammengesetzt, andernfalls vielleicht nur aus dreien. Immerhin könnte im Kopf auch noch ein viertes anhangloses Segment versteckt sein, da ja auch das erste Rumpfsegment seine Anhänge eingebüsst hat.

Auf meiner Tafel habe ich die Vierzahl der Kopfsegmente angenommen; dann liegen die Geschlechtsöffnungen zwischen den beiden Segmenten, in denen bei Peripatus die grossen Nephridien münden, können also jedem der beiden Paare entsprechen. Da aber die Geschlechtsorgane von hinten her nach aussen führen, bei Scolopendrella und Pauropus, — unter der gleichen Voraussetzung der Vierzahl der Kopfsegmente, die Geschlechtsöffnung dem zweiten Paar der grossen Segmentalorgane entspricht, und dies für die Arachnoideen in gleicher Weise stimmt, so ist anzunehmen, dass auch bei den Diplopoden das zweite Paar der grossen Nephridien zu Ausfuhrwegen der Genitalproducte geworden ist. Da die Keimdrüsen im hinteren Abschnitt des Körpers sich localisirten, ist es ausserdem das wahrscheinlichste, dass das benachbarteste Nephridienpaar mit ihnen in Verbindung trat. Sollte es sich jedoch herausstellen, dass der Kopf der Juliden nur aus drei Segmenten besteht, so würden ihre Oviducte und Vasa deferentia dem ersten Paar der grossen Peripatusnephridien entsprechen. Das gleiche gilt für Symphylen und Pauropoden, bei denen die Mundwerkzeuge freilich in anderer Weise unklar sind; hier ist ausser einem Paar Mandibeln ein zweifelloses Maxillenpaar vorhanden; die zweiten Maxillen jedoch scheinen zu fehlen. Sind sie secundär durch Degeneration verschwunden, so besteht dennoch der Kopf aus 4 Segmenten, und Alles ist in Ordnung. Fehlen sie aber primär, so bleibt die Frage offen, ob der Kopf aus drei oder dennoch vier Segmenten besteht.

Im erstern Falle müssten in der Tafel die grünen und weissen Segmente um eines hinaufgeschoben werden, und die Genitalöffnung entspräche dann dem 7. Segment des Peripatus.

Bei all diesen Schwierigkeiten, die vergleichend anatomisch kaum zu lösen sind, handelt es sich, wie leicht zu sehen, doch nur um die Entscheidung, ob das eine oder das andere der grossen Nephridien des Peripatus hier in Frage kommt; um eines derselben handelt es sich immer. An der Nephridiennatur der Ausführungsgänge kann wohl kaum gezweifelt werden, denn sie sind in den vielfüssigen Formen noch doppelt. Indessen zeigen auch hier die Verschiedenheiten, dass es sich nicht um eine aufsteigende Reihe, sondern um Seitenzweige handelt, die bald in der einen, bald in der andern Weise eigenartig umgebildet wurden. Gehen wir von Peripatusähnlichen Thieren aus, so zeigen die Geschlechtsorgane der Diplopoden — wenigstens im weiblichen Geschlecht — in Bezug auf die Keimdrüse eine weitergehende Umbildung durch gänzliche Verschmelzung der paarigen Anlage; die Ausfuhrwege aber sind auf niedriger Stufe stehen geblieben — eine gemeinsame Vagina hat sich nicht eingestülpt. Scolopendrella ist in dieser Beziehung weiter gediehen, durch Bildung eines gemeinsamen Genitalatriums, und würde, falls die Trennung der Ovarien beibehalten worden wäre, dem Stadium der Peripatusarten entsprechen, nur dass hier die Oviducte nicht als Uteri benutzt werden, und darum kurz bleiben.

Bei den Spinnen dagegen finden wir bald Trennung der Keimdrüsen, bald Vereinigungen, die übrigens secundär zu sein scheinen, bald Verkürzung der Oviducte bis zum Verschwinden, (Araneideen), bald Erhaltung derselben in kurzer Ausdehnung, immer aber eine einheitliche Vagina. Dieses Verhalten ist kaum auf das bei den Diplopoden und Scolopendrella vorhandene zurückzuführen, denn bei diesen scheint die Verschmelzung der Ovarien, bei den Spinnen die ursprüngliche Trennung das primäre zu sein.

Es fragt sich nun, gibt es in den beiden so getrennten Stämmen der Tracheaten noch andere Eigenthümlichkeiten, welche diese Trennung unterstützen, andrerseits aber die engere Zusammengehörigkeit jeder dieser Gruppen wahrscheinlich machen? Denn auf die Geschlechtsorgane allein dürfen wir uns nicht verlassen, obwohl sie äusserst wichtig, ja wie ich nach dem Mitgetheilten glaube behaupten zu können, das einzig wirklich entscheidende sind. Jede Thiergruppe hat so gewissermaassen ihr systematisches Organensystem, das für die Erkenntniss der Verwandtschaftsbeziehungen in erster Linie in Betracht kommt; wenn dieses aufgefunden ist, und seine Deutung erfahren hat, müssen sich die übrigen Verhältnisse um dasselbe gruppiren. Wie wechselnd und mannichfach umgebildet alle anderen Organensysteme bei den Tracheaten aber sein können, dafür geben uns Gruppen, über deren verwandtschaftlichen Zusammenhang kein Zweifel obwalten kann, überreiche Beweise: die Umbildung der Fresswerkzeuge, der Extremitäten, der Verdauungsorgane, des Tracheensystems, des Circulationsapparates u. s. w., Beispiele von extremer Entwicklung nach einer Seite, und gänzlichem Verschwinden nach der anderen. Wenn wir die riesigen Ver-

schiedenheiten, wie sie Larven und Imagines in diesen Hinsichten oft genug zeigen, berücksichtigen, werden wir zugeben müssen, dass hier die Anpassung an Existenzbedingen das Möglichste leistet. Trotzdem lassen sich, wie ich glaube, einige Organisationsverhältnisse um jene Eigenthümlichkeiten des Genitalapparates gruppiren, die als Unterstützung der vorgetragenen Anschauung, wenn auch nur in zweiter Linie, in Betracht gezogen werden können.

Wenn wir zunächst die Tracheen berücksichtigen, so machen wir die nicht uninteressante Beobachtung, dass unverzweigte Röhrentracheen nur in der Tracheatengruppe mit vorn liegender Genitalöffnung vorkommen, und zwar durch alle Untergruppen derselben, den Diplopoden, Symphylen und Arachnoideen — oder als deren Ersatz Fächertracheen; in der anderen Abtheilung dagegen gibt es nur Baumtracheen mit Spiralfaden, abgesehen von Scutigera, worüber ich bereits gesprochen habe. Zwar haben sich auch bei Diplopoden und manchen Arachnoideen Baumtracheen ausgebildet, aber meist erst in untergeordneter Weise. Man kann demnach auch in Bezug auf dieses Organsystem eine frühzeitige Spaltung in zwei Entwicklungsrichtungen erkennen, nur ist hier die Trennung nicht so scharf durchgeführt, denn es liegt in den primitiven Peripatustracheen die Möglichkeit der mannichfachsten Fortbildung, die sich aber der Hauptsache nach in beiden Gruppen verschieden realisirt hat.

Unter den Gliedmaassen interessiren uns vielleicht besonders die Oberkiefer, die man wohl durchweg als homologe Gebilde gleichwerthig den Kiefern der Peripatusarten betrachten darf. Trotz aller Umformungen, welche die zur Nahrungsaufnahme dienenden Gliedmaassen des späteren Kopfes und des Cephalothorax erfahren haben, sind die Mandibeln bei Chilopoden und Insecten immer ungegliedert, und schliessen sich so in ihrer Structur den Peripatuskiefern eng an; während alle übrigen Extremitäten dieses Thieres, die Schleimpapillen nicht ausgeschlossen, in ihren ringförmigen Hautfalten die Anlage einer Gliederung enthalten, ist dies bei den Kiefern nicht der Fall. Die Cheliceren der Spinnenthiere dagegen bestehen aus mehreren Gliedern. Wenn ich nun, gegenüber Lang (Lehrb. p. 533) durchaus nicht die Möglichkeit leugnen möchte, dass eine spätere Gliederung auftreten kann, (die enorme Verschiedenheit in der Zahl der Antennenglieder bei Insecten lässt sich schwer anders erklären, wie ferner auch die Gelenkbildung in der „Maske“ der Libellenlarve eine neue Acquisition ist) [1]) — so ist doch auf die Gliederung der Arachnoideenmandibeln Gewicht zu legen. Diese Gliederung scheint nun aber durch die ganze Gruppe zu gehen, wenigstens finde ich die Mandibeln bei Juliden ebenfalls aus mehreren gelenkartig verbundenen, wenn auch nur schwach beweglichen Ringen zusam-

1) Hier kann man noch anführen die reiche Gliederung des Schmetterlingrüssels, die Gelenkbildung in den hinteren Flügeln der Käfer, Wanzen etc., die Gliederung vieler Abdominalanhänge bei den Insecten, — Verhältnisse, welche zeigen, dass die verschiedensten äusseren Anhänge eine secundäre Ringelung erfahren können, die recht ausgiebig werden kann.

mengesetzt. Fig. IV der Tafel zeigt das Chitinskelet des Kopfes eines Juliden aus Trinidad von der Unterseite, alles in normaler Lage, nur der eine Oberkiefer seitwärts herausgezogen. Hier sieht man die Kaulade (*k*) einem deutlichen Chitinring (*a*) aufsitzen, der wiederum dem langen Basalstück (*b*) gelenkig verbunden ist. Wir hätten also hier die drei Glieder der Cheliceren der Scorpioniden, Solpugiden etc. Ob es sich bei Symphylen und Pauropoden ähnlich verhält, kann ich aus eigner Erfahrung nicht angeben. Sollte es nicht der Fall sein, so kann man eine secundäre Vereinfachung annehmen, wie ja auch die Cheliceren der Araneiden aus nur zwei Gliedern bestehen. Sollte sich die Gliederung in der ganzen Gruppe jedoch als durchgehend (wenn auch nur in der Anlage) erweisen, so wäre dies ein Grund mehr, in der Genealogie auf eine u n t e r Peripatus stehende Thierform zurückzugreifen, bei der das zweite Extremitätenpaar eine andere Entwicklungsrichtung eingeschlagen hat, und wir kämen auf diesem Wege zu dem nämlichen Resultat, zu dem uns die Untersuchung des Genitalapparates geführt hat. Was die übrigen Mundtheile der Tracheaten anlangt, so bin ich wohl der Ueberzeugung, dass sie einander homolog sind, und den Schleimpapillen und dem ersten Füsschenpaar des Peripatus entsprechen. Aber hier sind die Umwandlungen viel mannichfaltiger. Besonders macht das Gnathochilarium der Diplopoden bislang unüberwindliche Schwierigkeiten und wir müssen von ihm absehen, bis gründliches ontogenetisches Material gesammelt ist. Im Uebrigen i s t ü b e r a l l d e r „T a s t e r" d i e E x t r e m i t ä t, und die Kaulade, mag sie umgewandelt sein wie sie will, ist nichts anderes, als ein dem Munde zugewendeter seitlicher Auswuchs des Basalgliedes, der wohl selbst wieder in geringfügiger Weise oder, wie im Schmetterlingsrüssel, sehr reichlich gegliedert sein kann, und ursprünglich am Kaugeschäft theilnahm. Daraus ergeben sich mit Leichtigkeit alle vorhandenen Modificationen. Bei starker Inanspruchnahme und Ausbildung der Lade wird das Bein zu einem reinen Tastwerkzeug, vielleicht auch zum Träger des Geschmacksinnes, wie es bei den Insecten der Fall ist; unter Reduction der Lade kann das Bein selbst zum Fang und zur Nahrungsaufnahme beigezogen werden, wie im zweiten Maxillenpaar der Chilopoden; genügen bei veränderter Nahrungsweise, und damit parallel gehender Umwandlung einzelner Mundtheile nur wenige zur Bewältigung der Nahrung, so kann das Bein wieder seiner früheren Bestimmung zurückgegeben werden, wie das bei allen Spinnen mit der zweiten Maxille, und bei manchen selbst mit der ersten geschieht (Mygale u. A.). Dass solche Beine auch noch unter Beibehaltung der Kaulade als Fangapparate ausgebildet werden können, sehen wir bei Scorpionen, ebenso, dass auch noch weiter rückwärts liegende Extremitäten derartige Umwandlung erfahren können bei Chilopoden, den Raubheuschrecken (Mantis), bei Nepa etc. Andrerseits kann das Bein bis auf das zur Kaulade umgewandelte Basalglied verkümmern: erste Maxille der Chilopoden. Von dieser Anschauung aus allein aber sind alle diese Modificationen einfach verständlich, und sie können sich in den einzelnen Tracheatenzweigen selbständig ausgebildet haben. Die Richtigkeit dieser Auffassung wird gestützt durch die Thatsache, dass beispielsweise bei den Phrynusarten

der Taster der zweiten Maxille, der bei allen übrigen Arachnoideen als ächtes Bein functionirt, reines Tastorgan geworden resp. geblieben ist, und zu bedeutender Mächtigkeit entwickelt wurde und für den Umfang der Umbildungsfähigkeit sind die Unterschiede zwischen Larven und Imagines hinlänglicher Beweis (Raupen und Schmetterlinge).

Ich bin überzeugt, dass man bei einer genauen Untersuchung der Tracheaten, die in Rücksicht auf die dargelegten Gesichtspuncte vergleichend durchgeführt werden müsste, noch eine grosse Zahl von Verhältnissen finden würde, die sich zu Gunsten einer Zweitheilung aus weit zurückliegender Wurzel benutzen liessen; so z. B. in Bezug auf die Gliederung der Extremitäten, die Krallenbildung, den Besitz oder Mangel einer besonderen Leber, die bei Arachnoideen so mächtig entwickelt ist, die höheren Sinnesorgane, von denen die Facettenaugen, die chordotonalen und tympanalen Organe nur in dem einen Stamme zur Anlage und Ausbildung kamen, wie auch besonders die Anhangsorgane und Hilfsapparate des Geschlechts- und Begattungsapparates noch manches Beachtenswerthe liefern können. Von der Geschlechtsöffnung entfernte, zu Begattungswerkzeugen umgewandelte Extremitäten finden sich z. B. weder bei Chilopoden noch Insecten, wohl aber bei Diplopöden und Araneiden, ebensowenig von der Vulva getrennte und unabhängige Bursae copulatrices. Eine Besprechung dieses zum grossen Theil noch wenig beachteten Materials würde mich jedoch zu weit führen, und ich glaube, dass die auseinandergesetzten Gründe einstweilen genügen dürften.

Lässt man sich durch dieselben zu der Anschauung bestimmen, dass die Tracheaten mindestens zwei Stämme repräsentiren, deren Wurzel sehr weit zurückliegt, und die beide je einen Theil der „Myriapoden“ in sich begreifen, so tritt die weitere Frage heran, wo ist dieser gemeinsame Ausgangspunct zu suchen?

Peripatus der heutigen Formen kann der Ausgangspunct nicht sein, denn er gehört der Lage seiner Genitalöffnung und der Structur seiner Geschlechtsorgane gemäss bereits zu der einen. Aber auch für die Tracheaten mit hinten liegender Geschlechtsöffnung ist er kein Ahne, wie er überhaupt keine Durchgangsform ist, sondern ein selbständig und eigenartig weiter entwickelter Seitenzweig. In Bezug auf seinen Genitalapparat könnte er wohl eine Vorstufe der Chilopoden und Insecten sein. Aber andere Verhältnisse sprechen dagegen, von denen ich nur die wichtigsten hervorheben will. Das zweite Anhangspaar des Körpers, zu Kiefern umgebildet, ist bei Peripatus in eine tertiär gebildete Mundhöhle hineingezogen, während es bei allen anderen Tracheaten am Rand der Mundöffnung als äussere Mandibel liegen bleibt. Da wir nirgends bei Tracheaten die geringste Andeutung finden, dass das jemals anders gewesen sei, so muss man annehmen, dass bei den Vorfahren derselben das betreffende Extremitätenpaar zur Nahrungsaufnahme verwendet wurde, ohne in die Mundhöhle hineinzurücken, und das Verhalten bei Peripatus ist ein eigenartiges.

Ferner dürften wohl die grossen Schleimdrüsen der Peripatusarten am folgenden Extremitätenpaar Gebilde sein, die sich nur in dieser Gruppe entwickelt haben

und kein directes Homologon bei den Tracheaten im engeren Sinne haben. Wir finden wenigstens bei den Myriapoden beider Gruppen, und auch bei den Insecten ohne Metamorphose, die doch theilweise als die primären aufgefasst werden müssen, nichts artiges. Man könnte zwar versucht sein, die Sericterien vieler Insectenlarven von diesen Organen abzuleiten; aber hier muss daran erinnert werden, dass sich bei den Larven der Insecten, die an besondere Lebensverhältnisse angepasste secundäre Jugendformen sind, aus geringfügigen Anlagen mächtige Drüsen an den verschiedensten Körperstellen unabhängig entwickelt haben, dass man auch bei Insectenlarven, z. B. einigen Pilzmücken, Spinndrüsen am Hinterende findet und dass auch bei ausgebildeten Insecten, z. B. den Weibchen der Schmetterlingsgattung Euplocamus daselbst Spinndrüsen vorkommen. Alle diese Organe können gewiss mit vieler Wahrscheinlichkeit von Hautdrüsen der Peripatusähnlichen Vorfahren abgeleitet werden, sind aber jedesmal selbständig zu höherer Ausbildung gebracht. Wenn die Sericterien die von Peripatus direct herübergenommenen Schleimdrüsen wären, müssten wir sie doch zuerst bei den Chilopoden und ametabolischen Insecten erwarten dürfen. Die Vorfahren hatten demnach dort wohl Hautdrüsen, wie an anderen Körperstellen auch, aber ohne besondere Entfaltung.

Auch das gesammte Bauchnervensystem ist wohl bei den Peripatusarten in eigenartiger Weise weiterentwickelt worden zu mächtigen Längsstämmen mit gleichmässigem Ganglienbelag und zahlreichen Commissuren — von einer Anlage aus, die schon bei den peripatiformen Ahnen der Tracheaten zur Bildung einer Ganglienkette in höherem Grade hinstrebte. Man kann sich zwar recht gut denken, dass auch aus einem Nervensystem, wie es bei Peripatus vorhanden ist, in Folge ausgeprägterer Segmentirung der Muskulatur und grösserer Entfaltung der Extremitäten eine Ganglienkette sich noch habe differenziren können. Da aber auch bei den niedersten Tracheaten des Chilopoden-Insectenstammes eine typische Ganglienkette vorhanden ist, ausserdem ontogenetisch die beiden Hälften derselben so dicht bei einander und einheitlich angelegt werden, so darf man wohl schliessen, dass schon bei den peripatiformen Ahnen dieses Verhalten zum Ausdruck gekommen war. Ueberhaupt waren wohl diese Ahnen deutlicher segmentirt, als Peripatus, und hier ging die Gliederung des Körpers secundär mehr und mehr verloren, während die Tracheaten die deutlichere äussere Segmentirung in ihrem Stamm gerettet haben.

Vielleicht sind auch die vom Körperepithel abgeschnürten geschlossenen Augenfollikel der Peripatusarten erst in dieser Gruppe zu solcher Ausbildung gelangt, während die mit den Tracheaten gemeinsamen Vorfahren offene Augenfollikel mit Cuticularlinse besassen, wie sie unter den Anneliden noch bei Onuphis und Diopatra vorkommen. Wenigstens können, wie ein Blick auf die Fig. 3 zeigt, welche einen Medianschnitt durch ein Diopatraauge darstellt, von solchen Augen direct die einfachen Augen der Tracheaten abgeleitet werden, während die Umwandlung eines geschlossenen Augenfollikels in einen offenen als Hemmungsbildung aufgefasst werden müsste. Möglicherweise besassen jene Ahnen, wenigstens die der Tracheaten eine grössere Zahl solcher

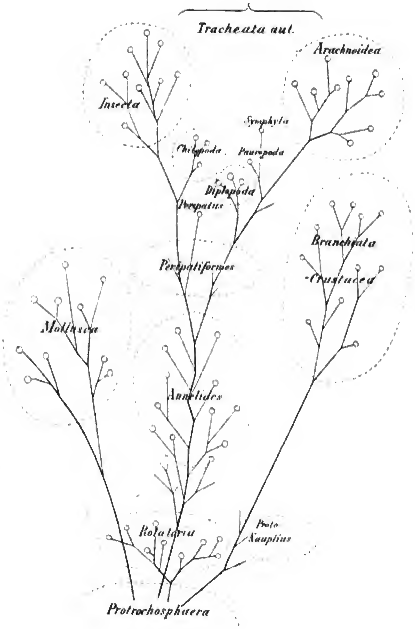
Augen, so dass die Vielzahl bei Arthropoden nicht allein durch eine Neubildung in dieser Gruppe erklärt werden müsste.

Wenn wir so die Gattung Peripatus als einen besonderen Seitenzweig ansehen, der sich in einzelnen Hinsichten eigenartig weiterentwickelt hat, so können wir uns die früheren peripatiformen Ahnen vorstellen als ziemlich homonom segmentirte Anneliden, deren Gliederung äusserlich verschieden deutlich ausgesprochen war. Sie besassen ein Paar praeorale Anhänge, und an jedem folgenden Segment ein Paar Parapodien, deren Borstensäcke jedoch allmählich kein erstarrendes Secret mehr lieferten; dafür wurde die Spitze der Fussstummel stärker cuticularisirt zu hakenförmigen kleinen Klauen, das vorderste Paar, später auch die nächst folgenden wurden Hülfsapparate zur Nahrungsaufnahme. Sie besassen, wie jetzt noch viele Hirudineen, zahlreiche sehr lange einzellige Hautdrüsen, deren feine Ausführungsgänge bündelweise zusammengelagert an verschiedenen Stellen der Körperoberfläche mündeten. Sie besassen ächte Annelidensegmentalorgane, von denen mehrere Paare im vorderen und hinteren Körpertheil als Abfuhrapparate für die frei in die Leibeshöhle fallenden Geschlechtsproducte dienten. Ihr Nervensystem stand, was den allgemeinen Habitus anlangt, auf einer scheinbar niedrigen Stufe, es war vorhanden ein oberes Schlundganglion und ein Paar mit Ganglienzellen fast gleichmässig belegte Längsnerven, die durch lange Commissuren mit einander in Verbindung standen.

Mit der Anpassung an das Landleben wurde die Körpercuticula fester, feinhöckerig und trocken, die Schleimdrüsen der Haut verloren ihre Bedeutung; sie wurden aber erhalten und, indem sich ihre langen Ausführungsgänge mit Luft füllten, zu primitiven Tracheenröhrchen umgewandelt (wahrscheinlich jedoch bei den meisten Formen nicht alle, sondern nur in jedem Segment ein Paar Hauptbündel). Die Keimdrüsen vereinigten sich mit den inneren Enden von Genitalnephridien und hier beginnt die Spaltung in zwei Hauptstämme: Je nach der Lagerung der Keimdrüsen, vielleicht auch im Anschluss an die stärkere Ausbildung des einen oder anderen Paares der betreffenden Segmentalorgane, wurde in der einen Gruppe dasjenige des vorletzten Segments, in der anderen das des achten (oder siebenten?) Segments zu definitiven Oviducten oder Vasa deferentia. Parallel mit dieser Verschiedenheit ging die Umwandlung des ersten Füsschenpaares zu Kiefern vor sich: in der einen Gruppe blieb es ungegliedert, in der anderen gliederte es sich wie alle nachfolgenden Extremitäten. In beiden Gruppen aber entwickelte sich das Nervensystem zu einer ächten Ganglienkette, mit einziger Ausnahme von Peripatus, der den früheren Zustand in anderer Richtung zu höherer Ausbildung brachte.

Die in Vorstehendem entwickelten Anschauungen finden ihren Ausdruck in dem folgenden Stammbaum, zu dem ich nur bemerken will, dass die gezeichnete Spaltung der Zweige innerhalb des eine Thiergruppe umschliessenden Kreises eine ganz willkührliche ist, und nur die Mannichfaltigkeit der Familien und Gattungen andeuten soll.

Aus der Protrochosphaeragruppe entspringen 4 Thierstämme: 1) die Rotatorien, die eine nur geringfügige Weiterbildung erlangten, aber


Tracheata aut.
Arachnoidea
Insecta
Symphyla
Chilopoda
Pauropoda
Diplopoda
Peripatus
Branchiata
Crustacea
Peripatiformes
Mollusca
Annelides
Rotatoria
Proto
Nauplius
Protrochosphaera

eine grosse Mannichfaltigkeit von Formen erzielten; 2) die Mollusken, welche ungegliedert blieben, aber dennoch eine starke Umbildung des Körpers und hohe Enfaltung der Organe gewannen; 3) und 4) die Stämme der Anneliden und der Crustaceen, welche das Gemeinsame haben, dass die Trochosphaeraartigen Stammformen bald eine Gliederung durch Segmentation erfuhren. Diese war im Annelidenstamm in viel vollkommenerer Weise homonom, als bei den Nachkommen des Protonauplius (=Trochosphaera). So wiederholten sich bei letzteren z. B. die Excretionsorgane nicht in allen Segmenten, und es kam frühzeitig zu einer innigeren Vereinigung einer grösseren Segmentzahl am Vorderende des Körpers durch Ausbildung von deckenden Hautfalten, Rückenschild, Cephalothorax.

Erst von hochstehenden Anneliden stammen wiederum die kurz vorher skizzirten Peripatiformes, die sich bald in die zwei Aeste mit verschiedener Lagerung der Genitalöffnung spalteten; vom einen entstammen: Peripatus, Chilopoden und Insecten, vom andern Diplopoden, Pauropoden, Symphylen und Arachnoideen. Dabei zeigen alle diese genannten Gruppen, soweit wir sie jetzt kennen, immer wieder einzelne in besonderer Richtung ausgebildete Organisationsverhältnisse, wodurch sich alle als Endzweige erweisen, und nicht Durchgangsphasen für höher stehende Gruppen darstellen.

Die Insecten sind wohl eine einheitliche Thiergruppe, die, wenn auch nach verschiedenen Richtungen divergirend, dennoch von einer einzigen noch ziemlich nahe liegenden Wurzel myriapodenähnlicher Thiere abstammen. Dafür spricht die trotz aller äusseren Verschiedenheiten recht gleichmässige Organisation. Nicht so einheitlich sind die Verhältnisse bei den Arachnoideen, und man kann den Gedanken nicht so einfach abweisen, dass die Differenzirung in die einzelnen Gruppen bereits viel früher, schon bei den peripatiformen Vorfahren dieses Stammes, noch vor der Abzweigung der Diplopoden etc. stattgefunden habe. Die Verschiedenheiten in Kopf- und Thoraxbildung einerseits, mit wohl ausgeprägter Segmentirung des letzteren, der Cephalothoraxbildung andrerseits, die Mannichfaltigkeit in der Structur der Athmungsorgane, ferner der Geschlechtsorgane und der Hilfsapparate für die Begattung sprechen vielleicht für diese Anschauung. Dann braucht z. B. der Cephalothorax einiger Arachnoideengruppen nicht aus der Verschmelzung eines praeformirten Kopfs und eines Thorax anderer hervorgegangen zu sein, sondern es konnte schon bei den noch gleichmässig segmentirten Vorfahren eine grössere Zahl vorderer Segmente auf einmal zum späteren Cephalothorax verschmolzen sein, wie auch bei den Diplopoden wahrscheinlich von vorn herein je zwei Segmente im grössten Theil des Körpers sich zu einem Ring vereinigt haben.

Dass die sechsfüssigen Tracheaten, zu denen man kurzweg auch die Spinnen rechnen kann, da das erste oder die beiden ersten „Beine" den Unterkiefern der Insecten entsprechen, von vielfüssigen Vorfahren abstammen, wird allgemein angenommen, und als beweiskräftige Thatsache für diese Ansicht werden besonders die in neuester Zeit vielbesprochenen embryonalen Anhänge an den Abdominalsegmenten an-

gesehen. Es wird sich hiegegen, wie mir scheint, wenig einwenden lassen, sofern es sich um solche Anhänge bei Tracheaten handelt, die entweder keine, oder nur eine unvollkommene oder allmählige Metamorphose durchmachen, denn nur hier können auch die Jugendformen in ihren äusseren Gestaltverhältnissen auf die Vorfahren direct bezogen werden. Anders liegt die Sache bei den Insecten mit vollkommener Metamorphose. Hier haben die Jugendformen durch besondere weitgehende Anpassungen häufig genug so bedeutende Umwandlungen erfahren, dass von den Aeusserlichkeiten der Vorfahren fast nichts erhalten blieb, (Maden, extremitätenlose Mückenlarven etc.). Larven mit einer grösseren Zahl von Beinstummeln, sog. Bauchfüssen, kommen nur bei Schmetterlingen, Blattwespen und Dipteren vor. Diese Gruppen sind aber gerade diejenigen, die als ausgebildete Thiere am weitesten differenzirt und von den Stammformen entfernt sind. Es ist darum recht zweifelhaft, ob die Bauchfüsse der Larven den Extremitätenstummeln der Vorfahren homolog sind, oder ob es nicht Neubildungen sind, erst von den Larven dieser Gruppen erworben. Das Vorkommen solcher Bauchfüsse in recht unvollkommenem Zustande in ganz vereinzelten und entfernt stehenden Gruppen der Dipteren, z. B. Eristalis, Pilzmücken, spricht vielleicht für die letztere Ansicht, ebenso die wechselnde Zahl und Anordnung der fraglichen Gebilde. Sollte das wirklich der Fall sein, so liegt weiterhin die Möglichkeit vor, dass auch viele jetzt fusslose oder sechsfüssige Insectenlarven sich durch besondere Anpassungen secundär aus solchen entwickelt haben, die derartige Bauchfüsse besassen, und dann muss man sich die Frage vorlegen: „Sind die beim Embryo auftretenden paarigen abdominalen Stummel nicht vielleicht rudimentäre Anlagen solcher secundärer Bauchfüsse?“ Vielleicht ist dies nicht sehr wahrscheinlich. ich glaube aber, dass man bei der Beurtheilung solcher Gebilde in Bezug auf ihren morphologischen Werth diese Frage nicht ganz unberücksichtigt lassen darf. Bei den Tracheaten ohne Metamorphose dagegen wird man die Abdominalstummel, falls sie wirklich Beinanlagen sind, sicherlich den Beinen vielfüssiger Ahnen homolog setzen dürfen, vorausgesetzt, dass der Mangel der Metamorphose nicht secundär erworben ist (Aptera).

Wenn man sich nun eine Anschauung bilden will, auf welche Weise aus vielfüssigen Gliederthieren die mit 3 Beinpaaren versehenen geworden sind, so kann man vielleicht zwei Möglichkeiten vor Allem in's Auge fassen. Entweder kann man annehmen, dass die Extremitäten allmählich von hinten nach vorn bis auf 3 Paare degenerirt sind, etwa in Folge davon, dass sie nicht mehr zur Bewegung benutzt wurden; man kann sich z. B. denken, dass Myriapodenartige Thiere die hinteren Körpersegmente vom Boden erhoben — wie Staphilinen ihr ganzes Abdomen z. Th. in die Höhe schlagen oder wie die Afterraupen vieler Blattwespen und manche Schmetterlingsraupen thun, und dass dieses Freitragen des Hinterleibs unter Erstarkung und Verlängerung der vorderen Körperstützen von hinten nach vorne fortschritt, bis der Körper nur noch auf drei Beinpaaren ruhte. Dabei mochten die entlasteten Extremitäten in der gleichen Reihenfolge degeneriren und verschwinden, wie das auch mit den „Nachschiebern“ der Raupen vieler Schmetterlinge geschehen ist: Drepanuliden,

Harpyien, Hybocampa, Uropus, Stauropus. Für diese Anschauung kann der Umstand ins Feld geführt werden, dass die embryonalen Fussstummel von vorn nach hinten kleiner werden, und in manchen Fällen überhaupt nur noch an den ersten Abdominalsegmenten auftreten — abgesehen von Anhängen ganz am Hinterende, die, wenn sie überhaupt Extremitäten entsprechen, schon frühzeitig zu anderen Functionen verwendet wurden: Hilfsapparate der Fortpflanzungsorgane, Spinngriffel etc.

Gegen die genannte Anschauung könnten aber auch einige Argumente, von freilich nicht grosser Bedeutung, aufgeführt werden. Einmal kennen wir kein myriapodenartiges Thier, welches am Hinterende eine grössere Zahl extremitätenloser Segmente besitzt, sondern die Beine sind gleichmässig bis ans Ende vertheilt; Uebergänge fehlen. Und dennoch ist nicht einzusehen, warum sich nicht auch Formen mit 4 oder 5 Beinpaaren hätten erhalten sollen, und Thiere mit mehr als drei Thoracalsegmenten sich ausbilden konnten. Dann aber beweist gerade die durchgreifende Dreizahl der Thoraxsegmente mit ihren allein den Körper tragenden Extremitäten, dass diese Eigenthümlichkeit sich schon sehr früh ausgebildet haben muss, und macht es wahrscheinlich, dass die Uebertragung der gesammten Körperlast auf drei Beinpaare nicht allmählich, sondern ziemlich unvermittelt stattgefunden habe und zwar in den zwei Hauptstämmen unabhängig, da diese, wie wir gesehen haben, schon sehr frühe von einander abgezweigt wurden.

Man kann darum noch eine andere Anschauung hegen, welche diese Schwierigkeiten bis zu gewissem Grade vermeidet. Wir kennen in beiden Gruppen der Myriapoden Thiere, die mit einer geringen Beinzahl, gleichsam in unreifem, aber doch frei lebensfähigem Zustand, geboren werden, resp. das Ei verlassen, und erst im postembryonalen Leben ihre volle Segment- und Beinzahl bekommen. Alle diese Jugendformen haben, mögen sie nun 3 oder 6 bis 7 Beinpaare besitzen, noch eine Anzahl extremitätenloser Hinterleibssegmente und erinnern dadurch in ihrer Gestalt an die höheren Tracheaten. Ueber die Ursache, warum diese Larven gerade mit 3 oder 6 Beinpaaren in existenzfähigem Zustand ein freies Leben beginnen, wissen wir freilich nichts, aber die Thatsache, dass dies der Fall ist, scheint von Wichtigkeit. Es ist nicht unwahrscheinlich, dass die Erscheinung bei noch mehr „Myriapodenformen" vorkommt, und dass sie auch bei ausgestorbenen Gruppen, vielleicht schon bei solchen, die noch tiefer als die heutigen Myriapoden standen, vorgekommen sein mag. Nun finden wir gerade bei den Tracheaten nicht selten Fälle von Paedogenesis, wo Thiere vor Absolvirung ihrer vollen Körperausbildung sich fortpflanzen, z. Th. parthenogenetisch, z. Th. aber auch nach Befruchtung, und dass solche Formen ihre völlige Ausbildung nicht erreichen. Daher gehört nicht nur die Fortpflanzung von Fliegenlarven, sondern auch die der flügellosen Aphiden und Orthopteren, mancher Wanzen, der weiblichen Strepsipteren, die ebensogut als Larvenformen aufgefasst werden können, wie z. B. der Axolotl. Könnte derartiges nicht auch bei sechsfüssigen Myriapodenlarven vorgekommen sein, und könnte man die höheren Tracheaten nicht als Abkömmlinge solcher paedogenetischer Myriapodenlarven auffassen? Dadurch würde

die Dreizahl der Extremitätenpaare und die Bildung eines Thorax aus drei Segmenten, resp. die z. Th. ursprüngliche eines Cephalothorax verständlicher, da die einzigen drei Segmente, welche überhaupt Beine erhielten, sehr bald erstarken mussten, um den Körper zu tragen. Wenn man dagegen eine allmählige Degeneration leistungsfähiger Extremitäten von hinten nach vorn annimmt, ist nicht einzusehen, warum nicht auch gelegentlich ein 4. oder 5. Beinpaar sammt dem zugehörigen Segment sich stärker ausgebildet haben sollte. Weder bei lebenden noch bei fossilen Tracheaten haben wir aber dafür Andeutungen, die bei der anderen Anschauung auch nicht erwartet werden können. Es braucht nicht einmal angenommen zu werden, dass an den Abdominalsegmenten gar keine Extremitäten mehr angelegt wurden, aber sie blieben von vorn herein rudimentär, da die fraglichen Larven in Anpassung an bestimmte Verhältnisse sich mit den drei primär vorhandenen Paaren ganz gut behelfen mochten. Dadurch kommen auch die jetzigen embryonalen Stummel zu ihrem Recht.

Die Anschauung wäre demnach kurz folgende: Sechsbeinige Larven myriapodenartiger Thiere blieben unter gewissen Umständen längere Zeit auf diesem Stadium stehen; sie wuchsen, segmentirten sich etwas weiter, die neu gebildeten Segmente mochten auch von vorn nach hinten Extremitätenanlagen zur Ausbildung bringen. Die Entwicklung der Körperform ging also in Anpassung an bestimmte Lebensverhältnisse sehr langsam vor sich, während die Entwicklung der Fortpflanzungsorgane nicht gehemmt wurde, und auch eine beträchtliche Grösse erreicht werden konnte. Sie pflanzten sich fort, bevor sie sich zu wirklichen Myriapoden ausgebildet hatten. Das wurde bei verschiedenen Gruppen constant, und diese sind die Stammeltern der höheren Tracheaten. Die erreichte Segmentzahl konnte verschieden gross sein, wie besonders die verschiedenen Familien der Arachnoideen documentiren.

Nachschrift statt Vorwort.

Ich habe in vorstehender Abhandlung absichtlich vermieden, auf die verschiedenen Ansichten, über die Verwandtschaftsbeziehungen der Arthropoden, die in einzelnen Publicationen niedergelegt sind, einzugehen, einmal um meine Anschauung im Zusammenhang als geschlossenes Ganzes darzustellen, andrerseits um nicht durch Polemik den Aufsatz zu umfangreich und unübersichtlich zu machen. Es fällt mir nicht ein, übereinstimmende Ansichten anderer Forscher zu usurpiren; der Leser wird aus eigener Kenntniss der Literatur leicht unterscheiden können, was mein Eigentum ist und wo ich auf dem Boden früherer Autoren stehe. Vor allem hielt ich es für unnöthig, allgemein bekannte, in verschiedenen Lehrbüchern niedergelegte und zusammengefasste Anschauungen auf ihre Quellen zu citiren. Die Abweichungen der dargelegten Ansichten von denen Anderer möge der Leser selbst auf ihren Werth prü-

fen. Eine reiche Literaturzusammenstellung findet man bei H. T. Fernald, The Relationships of Arthropods, in Stud. from the Biological Laboratory, John Hopkins University, Baltimore vol. IV Nr. 7. In wie weit ich auch von diesem Forscher abweiche, ergibt sich auf den ersten Blick aus dem Vergleiche der Stammbäume. Damit ist nicht gesagt, dass ich nicht mit vielen seiner Auseinandersetzungen, wie auch Ansichten Anderer einverstanden wäre.

December 1891.

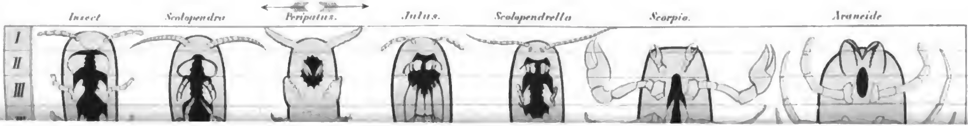
Tafelerklärung.

Fig. I. Schematische Darstellung der Hauptorganisation, der Segmentirung, Extremitätenumbildung und der Genitalorgane der Tracheaten. Vgl. den Text.

Fig. II. Stückchen eines Querschnittes durch die Haut von Peripatus Edwardsii Grube, mit einem Tracheenfollikel. *cut* = Cuticula, *e* = Epidermis, *c* = Cutis, *m* = Muskulatur, *tr* = einfachste Tracheenröhrchen, in den Grund des Follikels mündend.

Fig. III. Medianschnitt durch ein Auge von Diopatra; offener Augenfollikel, ausgefüllt mit einer Cuticularverdickung.

Fig. IV. Chitinskelet des Kopfes eines Julus aus Trinidad, von unten gesehen. Der eine Oberkiefer ist seitlich herausgezogen und an ihm sieht man die Zusammensetzung aus 3 Chitinringen, *k* = Kauladen, *a* = Zwischenring, *b* = Basalstück; *gn* = Gnathochilarium (letzteres in natürlicher Lage).


Insect
Scolopendra
Peripatus.
Julus.
Scolopendrella
Scorpio.
Araneide
I
II
III

Schriften
herausgegeben von der Naturforscher-Gesellschaft
bei der Universität Jurjew (Dorpat).
VIII.

Synchronistische Tabellen
über die
Naturwissenschaftliche Journalliteratur
von 1650—1893

zusammengestellt
von

Professor Dr. Carl Schmidt.

Dorpat.
Druck von C. Mattiesen.
1895.
In Commission bei:
K. F. Koehler in Leipzig und E. J. Karow in Dorpat.

Schriften
herausgegeben von der Naturforscher-Gesellschaft
bei der Universität Jurjew (Dorpat).
VIII.

Synchronistische Tabellen

über die

Naturwissenschaftliche Journalliteratur

von 1650—1893

zusammengestellt

von

Professor Dr. Carl Schmidt.

Dorpat.

Druck von C. Mattiesen.

1895.

In Commission bei:

K. F. Koehler in Leipzig und E. J. Karow in Dorpat.

Дозволено цензурою. — Юрьевъ, 18-го апрѣля 1895 г.

Mit der Zusammenstellung der nachstehenden Tabellen hat sich Prof. C. Schmidt während der letzten Zeit seines Lebens beschäftigt. Er beabsichtigte dieselben vollständiger zu machen und namentlich auch über die medicinische Journalliteratur weiter auszudehnen. Der Tod verhinderte die Ausführung dieses Planes. Immerhin sind diese Tabellen auch in der vorliegenden unvollendeten Form für naturwissenschaftliche und medicinische Forscher, welche viel literarisch arbeiten, ein ausgezeichnetes Hilfsmittel zur Vervollständigung unvollkommener Citate. Die Naturforschende Gesellschaft erachtet es daher als eine Ehrenpflicht gegen ihren verstorbenen Präsidenten, diese Tabellen — natürlich ohne Garantie für die Richtigkeit des Inhaltes und die Zweckmässigkeit der Anordnung — durch den Druck jedermann zugängig zu machen. Eine allen Anforderungen genügende Ausarbeitung derselben kann nur von einem der Bibliothekare einer grossen Bibliothek geliefert werden. Möchten diese fragmentarischen Blätter dazu den Anstoss geben!

Im Auftrage:

R. Kobert.

Alphabetisches Register.

Die Zahlen des Registers bedeuten die Seiten. Die am untern Ende jeden Stabes der Tabellen befindlichen Zahlen führen die Zeitschriften bis 1850 in der Gründungszeit nach ungefähr fortlaufender Reihe an. Von 1850 bis 1893 ist C. Schmidt jedoch absichtlich nach einem anderen Modus der Anordnung verfahren. Die Zahlen, welche von da ab nicht aufeinander folgende, sondern kleiner als die vorhergehenden sind, bedeuten, dass unter dieser Nummer das betreffende Journal schon früher einmal vorgekommen ist.

N.

O.

P.

Q.

R.

S.

Jahreszahlen	Philosophical Transactions of the Royal Society London, gegründet 1645 in Oxford, seit 1658 in London, 1660 durch Carl II. incorporirt	Histoire et Mémoire de l'Académie Royale des Sciences Paris begründet von Richelieu 1635 und Colbert 1666, erneuert 1699 Urban. Histoire de l'Ac. R. des Sciences 10 Volumes Paris 1732, davon Tome I Histoire 1666—1686 II 1686—1699 III — X Mémoires III Zoologie IV Chimie et Botanique V Architecture, Mathématique VI Geométrie, Mécanique VII Astronom. VIII Oeuvres div. de Cassini IX de la Hire X kleinere Abhandlg. von la Hire, Cassini, Homberg	Journal des Savans klein 12mo Amsterdam bei Pierre le Grand u. Waesberg. Boom, v. Someren und Gaethals	Miscellanea curiosa. Academiae Caesareo-Leopoldinae gegründet 1652 von Dr. med. Bausch in Schweinfurt, incorporirt v. Leopold I. 1687, bestätigt von Carl VII. 1742, publicirt Ephemerides Germanicae 1670—1706, Ephemerides 1712—22, Acta physica medica 1727—54. Nova Acta 1756—92.
1650				
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
1660				
1				
2			Tome. Jahrgang.	
3				
4			J. des Sçavans	
5	1		1—1	
6			2—2	
7	2		3	
8	3		4	
9	4		5	Decas I
1670	5		6	1
1	6		7	2
2	7		8	3
3	8		3 9	4
4	9		10	5
5	10		4—11	6
6	11		12	7
7	12 Gen. Index		5—13	8
8			6—14	9
9			7—15	10
1680	13		8—16	
1			9—17	Decas II
2			10—18	11
3			11—19	12
4	14		12—20	13
5	15		13—21	14
6	16	Histoire 1666 – 1686	14—22	15
7			15—23	16
8			16—24	17
9			17—25	18
1690	17		18—26	19
1			19—27	20
2			20—28	
3			21—29	Decas III
4	18		22—30	21, 22
5			23—31	23
6	19		24—32	24
7			25—33	25
8	20		26—34	26
9	21	Table alphab.	27—35	
1700			28—36	
Laufende Nummer	1	2	3	4

Jahreszahlen.	Philosophical Transactions of the R. Society London	Mémoires de l'Académie Royale de Paris	Journal des Savans. Tome. Jahrgang.
1700	22	13	28—36
1		14	29—37
2	23	15	30—38
3		16	31—39
4	24	17	32—40
5		18	33—41
6	25	19	34—42
7		20	43
8	26	21	44
9		22	45
1710		23 Table alph.	46
1	27	24	47
2		25	48
3	28	26	49
4		27	50
5	29	28	51
6		29	52
7		30	53
8	30	31	54
9		32	55
1720	31	33 Table alph.	56
1		34	57
2	32	35	58
3		36	59
4	33	37	60
5		38	61
6	34	39	62
7	35	40	63
8		41	64
9	36	42	65
1730		43 Table alph.	66
1	37	44	67
2		45	68
3	38	46	69
4		47	70
5	39	48	71
6		49	72
7	40	50	73
8		51	74
9	41	52	75
1740		53 Table alph.	76
1		54	77
2	42	55	78
3		56	79
4	43	57	80
5		58	81
6	44	59	82
7		60	83
8	45	61	84
9	46	62	85
1750		63 Table alph.	86
Laufende Nummer	1	2	3

Jahreszahlen	Ephemerides Germanicae Ac. Caesareo-Leopoldinae	Miscellanea Berolinensia der Akad. d. W. zu Berlin.	Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae 1725—46	Abhandl. der K. Schwedischen Ak. d. Wissensch., deutsch von Kästner.	Göttingische Zeitungen von gelehrten Sachen 1743—52, seit 1753 Göttingische Anzeigen von gelehrten Sachen unter Aufsicht der Königl. Ges. d. Wissensch. 8°.
1700					
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
1710		Tomus 1			
1		Continuatio sive Tomus 1—2			
2	Centuria 1. 2				
3					
4					
5	3. 4				
6					
7	5. 6				
8					
9	7. 8				
1720					
1					
2	9.10				
3	Acta physico-medica				
4					
5			1		
6					
7	1	2—3	2		
8			3		
9			4		
1730	2		5		
1					
2			6		
3	3				
4		3—4	7		
5					
6			8		
7	4	4—5	9		
8			10		
9			11	1	1
1740	5	5—6	12	2	2
1				3	3
2	6		13	4	4
3		6—7		5	5
4	7	Hist. et Mém. Tome 8		6	6
5			14	7	7
6		9	Novi Commentarii	8	8
7		10		9	9
8	8	11	1	10	10
9		12	2	11	11
1750		13	3	12	12
Laufende Nummer	4	5	6	7	8

Jahreszahlen	Philosophical Transactions	Mémoires de l'Academie Royale, Paris
1750		63
1	47	64
2		65
3	48	66
4		67
5	49	68
6		69
7	50	70
8		71
9	51	72
1760		73
1	52	74
2		75
3	53	76
4	54	77
5	55	78
6	56	79
7	57	80
8	58	81
9	59	82
1770	60	83
1	61	84
2	62	85
3	63	86
4	64	87
5	65	88
6	66	89
7	67	90
8	68	91
9	69	92
1780	70	93
1	71	94
2	72	95
3	73	96
4	74	97
5	75	98
6	76	99
7	77	100
8	78	101
9	79	102
1790	80	103
1	81	
2	82	
3	83	
4	84	
5	85	
6	86	
7	87	
8	88	
9	89	
1800	90	
Laufende Nummer	1	2

Jahreszahlen	Journal des Savans	Acta physico-medica Ac. Caes. Leopoldino-Carolinae	Histoire et Mémoires de l'Ac. R. des Sciences et des belles lettres à Berlin	Novi Commentarii Ac. Sc. Imp. Petropolitanae	Abhandl. der K. Schwed. Ak. d. W., deutsch von Kästner	Göttingische Zeitungen, seit 1753 G. Anz. von gelehrten Sachen unter Aufsicht der Ges. d. W.	Transactions of the Royal Irish Academy	Transactions of the Royal Edinburgh Society
1750	86		13	3	12	12		
1	87		14		13	13		
2	88	9	15	4	14	14		
3	89		16		15	15. 16		
4	90	10	17	5	16	17. 18		
5	91		18		17	19. 20		
6	92	Nova Acta	19	6	18	21. 22		
7	93	1	20		19	23. 24		
8	94		21	7	20	25. 26		
9	95		22		21	27. 28		
1760	96		23	8	22	29. 30		
1	97	2	24		23	31. 32		
2	98		25	9	24			
3	99		26		25	33. 34		
4	100		27	10	26	35. 36		
5	101		28	11	27	37. 38		
6	102		29	12	28	39. 40		
7	103	3	30		29	41. 42		
8	104		31	13	30	43. 44		
9	105		32	14	31	45. 46		
1770	106	4	Mém. 4° 33	15	32	47. 48		
1	107		34	16	33	49 50		
2	108		35	17	34	51. 52		
3	109	5	36	18	35	53—55		
4	110		37	19	36	56—58		
5	111		38	20	37	59—61		
6	112		39	Acta Ac. Sc. Imp. Petrop.	38	62—64		
7	113		40	1. 2	39	65--68		
8	114		41	3. 4	40	69—72		
9	115		42	5. 6	41	73—76		
1780	116		43	7. 8	Regist. 1	77—80		
1	117		44	9. 10	2	81—84		
2	118		45	11. 12	3	85—88		
3	119		46	Nova Acta 1	4	89. 90		
4	120		47	2		91. 92		
5	121		48	3		93. 94		
6	122		49	4		95. 96		
7	123		50	5		97—99	1	
8	124		51	6		100—102	2	1
9	125			7		103—105	3	
1790	126		52	8		106—108	4	2
1	127	8		9		109—111		
2	128		53	10		112—114	5	
3	129			11		115—117		
4	130		54	12		118—120		3
5	131			13		121—123	6	
6	132		55			124—126		
7	133		56	14		127—129		
8	134		57			130—132	7	4
9	135		58	15		133—135		
1800	136					136—138		
Laufende Nummer	3	4	5	6	7	8	9	10

Jahreszahlen	Abhandl. d. freyen Oekonom. Gesellschaft in St. Petersburg zur Aufmunterung d. Ackerbaues und der Hauswirthschaft in Russland — aus d. Russischen übersetzt. Mitau u. Riga. Joh. Friedr. Hartknoch	Archiv für die Physiologie v. **Joh. Christ. Reil**. Halle 8°. Curt'sche Buchhandlg. Fortsetzung. **J. F. Meckel** Archiv f. d. Physiologie. Halle u. Berlin 1815—23. Archiv für Anatomie und Physiologie v. **J. F. Meckel** Leipzig L. Voss 1826—32 dessen Fortsetzung **Joh. Müller** Archiv f. Anatomie u. Physiologie. 1834—58 Leipzig Veit u. Co. u **C. B. Reichert** u. **Emil DuBois-Reymond** von 1859 ab; zuletzt **His, Braune u. DuBois-Reymond**	Journal des Mines Paris 8°. 1794—1815 38 Vol.	Arbeiten der freien Oekon. Ges. St. Petersb. (gegr. 1765) Труды вольнаго эконом. общества. Ст. Петербургъ 8°.	**Rozier**, Observations sur la physique, seit 1794 Journal de Physique, de Chimie et d'histoire naturelle par **Lamétherie**	Annales de Chimie	**Gilbert**, Annalen der Physik	**Lorenz Crell**, Chemische Annalen. Helmstädt u. **Leipzig** **J. G. Müller** Buchhandl.
1750								
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								
9								
1760								
1								
2								
3								
4								
5				1— 3				
6	1. 3			4— 6				
7	6			7—10				
8	9. 10. 11.			11—12				
9				13—14				
1770				15—16				
1				17—19				
2				20—22				
3				23—25	1. 2			
4				26—28	3. 4			
5				29—31	5. 6			
6					7. 8			
7					9. 10			
8				**Продолж.**	11. 12			
9				1	13. 14			
1780				2	15. 16			
1					17. 18			
2					19—21			
3				3	22. 23			
4				4	24. 25			1. 2
5				5	26. 27			3. 4
6				6	28. 29			5. 6
7				7	30. 31			7. 8
8				8	32. 33			9. 10
9				9	34. 35	1— 3		11. 12
1790				10	36. 37	4— 7		13. 14
1				13. 14	38. 39	8—11		15. 16
2				15. 16	40. 41	12—15		17. 18
3				17. 18	42. 43	16—18		19. 20
4			1— 2	19	44. 45	}		21
5			3— 4	**Нов.прод.** 47		}		22. 23
6		1	5— 6	48—2 [—1		} 19—24		24. 25
7		2	7— 8	49—3		}		26. 27
8			9—10	50—4		} 25—32		28. 29
9		3	11—12	51—5		}	1—3	30. 31
1800		4	13—14	52—6			4—6	32. 33
Laufende Nummer	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**

Jahres-zahlen.	Die neuesten Entdeckungen der Chemie, Leipzig Weygand	Neues Chemisches Archiv, Leipzig Weygand	Göttling, Taschenbuch für Scheidekünstler und Apotheker	Johann Bartholomä Trommsdorff, Journal der Pharmacie, Leipzig	Berlinisches Jahrbuch der Pharmacie	The Philosophical Magazine and Journal by Tilloch and Taylor London 1798 bis 1826 = 68 Bände	Memorie delle Reale Accademie delle Scienze di Torino Miscellanea philosophico-mathematica Societatis privatae Taurinensis	Commentarii Societatis Regiae Ac. Sc. Gottingensis
1750								
1								1
2								2
3								3
4								4
5								
6								
7								
8								
9							1	
1760							Mélanges de philos. et de Math	
1							2	
2								
3							3	
4								
5								
6								
7							4	Novi Commentarii
8								
9								
1770								1
1							5	2
2								3
3								4
4								5
5								6
6								7
7								8
8								Commentat. I
9							Mém. de l'Ac. Royale des Sc.	2
1780			1					3
1	1— 3		2					4
2	4— 7		3					5
3	8—11		4					6
4	Register 12	1. 2	5				6	7
5		3. 4	6				7	8
6		5. 6	7				8	
7			8					9
8		7	9					
9			10				9	10
1790			11				10	
1		8	12					11
2			13					
3			14	1				12
4			15					
5			16	2	1			
6			17	3	2		11	13
7			18	4	3			
8			19	5	4	1—2		
9			20	6	5	3—4		14
1800			21	7. 8	6	5—6		
Laufende Nummer	19	20	21	22	23	24	25	26

Jahreszahlen	Abhandlungen der Kurfürstlich Baierisch. Akademie der Wissenschaften zu München. 4°	Medicin.-chirurgische Zeitung, herausgegeben von Joh. Jacob **Hartenkeil** Salzburg 1790—1820 Innsbruck 1821—39 à 4 Bände jährlich, Ergänzungsbände zu 1790—1800 Ergänzungsb. 1—4 zu 1801—10 Ergänzungsb. 5—8 zu 1805—10 Erg. 9—12 zu 1810—20 Erg. 13—23 zu 1821—30 Erg. 24—32 Universal-Repertorium zu Jahrgang 1790—94 u. 1795—1800 u. Ergänz.-Bde 1—4	Journal der prakt. Arzeneykunde und Wundarzeneykunst von **C. W. Hufeland** Band 1—10 Jena; von 11 ab Berlin von 1809 ab z. Th. mit **K. Himly** u. **Harles** 1824—36 mit **E. Osann** von 1837 ab **E. Osann** alleiniger Redakteur 1809—14 Commission der Real-Schulbuchhandlung 1815—18 Verlag derselben 1819—39 Verlag von G. Reimer Berlin
1750			
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
1760			
1			
2			
3	1		
4	2		
5	3		
6			
7	4		
8	5		
9	6		
1770			
1			
2	7		
3	8		
4			
5	9		
6	10		
7	Neue Philos.		
8	Abhandl. 1		
9			
1780	2		
1			
2	3		
3			
4	4		
5			
6			
7			
8	5		
9	Neue histor.		
1790	Abhandlung	1a.b.c.d	
1	3	2....	
2	4	3....	
3	5	4....	
4	6	5....	
5		6....	1
6		7....	2
7		8....	3. 4. 5
8		9....	6
9		10....	7. 8
1800		11....	9. 10. 11
Laufende Nummer	**27**	**28**	**29**

Jahreszahlen	Philosophical Transactions	Journal des Savans Jahrgang	Nova Acta Phys.-med. Ac. Caes. Leopoldino-Carolinae Naturae Curiosorum	Memoiren und Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften zu Berlin
1800	90	136		
1	91	137		59
2	92	138		60 Abh.
3	93	139		61
4	94	140		62
5	95	141		
6	96	142		
7	97	143		
8	98	144		
9	99	145		
1810	100	146		
1	101	147		
2	102	148	Nova Acta Verhandlungen	63
3	103	149		
4	104	150		64
5	105	151		
6	106	152		65
7	107	153		
8	108	154	9—1	66
9	109	155		
1820	110	156	10—2	67
1	111	157		
2	112	158		68
3	113	159	11—3	
4	114	160	12	69
5	115	161		70
6	116	162	13	71
7	117	163		72
8	118	164	14 und Suppl.	73
9	119	165		74
1830	120	166	15 und Suppl.	75
1	121	167		76
2	122	168	16 und Suppl.	77
3	123	169		78
4	124	170	17 und Suppl.	79
5	125	171		80
6	126	172		81
7	127	173	18 und 2 Suppl.	82
8	128	174		83
9	129	175		84
1840	130	176	19 und 2 Suppl.	85
1	131	177		86
2	132	178		87
3	133	179	20	88
4	134	180		89
5	135	181	21 und Suppl.	90
6	136	182		91
7	137	183	22 und Suppl.	92
8	138	184		93
9	139	185		94
1850	140	186		95
Laufende Nummer	**1**	**3**	**4**	**5**

Jahreszahlen	Transactions of the Royal Irish Academy	Transactions of the Royal Edinburgh Society	Archiv für Physiologie v Joh. Chr. Reil Halle, 8° Curt'sche Buchhandlung	Annales des Mines Fortsetzung v. Journal des Mines 1794—1815	Arbeiten d. fr. Oekon. Ges Petersburg Труды вольн. Экон. общ.	Annales de Chimie	Annalen der Physik v. Gilbert und Poggendorff, von 1824 an nur Poggendorff	Crell, Chemische Annalen
1800					52	33—36	4—6	32. 33
1	8				53	37—40	7—9	34. 35
2			5		54	41—44	10—12	36. 37
3	9				55	45—48	13—15	38. 39
4					56	49—52	16—18	
5	10	5	6		57	53—56	19—21	
6			**Reil & Autenrieth** 7		58	57—60	22—24	**Hänle,** dann **Geiger,** Magazin der Pharmacie, Karlsruhe 1823—31
7					59	61—64	25—27	
8	11		8		60	65—68	28—30	
9			9		61	69—72	31—33	
1810					62	73—76	34—36	
1			10		63	77—80	37—39	**Liebig,** Annalen der Pharmacie 1832—37
2		6			65	81—84	40—42	
3	12				66	85—88	43—45	
4					67	89—92	46—48	**Liebig** und **Wöhler,** Ann. der Chemie u. Pharm. 1838—74, seit 1875 Justus Liebig. Ann. d. Chem.
5		7	12 **J.F.Meckel** 1	38	68	93—96	49—51	
6			2	Ann. d. M. 1	69	Ann. Ch. et Phys. 1—3	52—54	
7	13		3	**I Série**	70	4—6	55—57	
8		8	4			7—9	58—60	
9			5			10—12	61—63	
1820			6			13—15	64—66	
1						16—18	67—69	
2	14		7			19—21	70—72	**Geiger Mag.**
3		9	8			22—24	73—75	1—4
4			Arch. für Anatomie u. Physiol. Leipzig 1			25—27	Pogg. Ann. 76—1.2	5—8
5						28—30	3—5	9—12
6		10				31—33	6—8	13—16
7	15		2	**II Série** 1. 2		34—36	9—11	17—20
8				3. 4		37—39	12—14	21—24
9	16			5. 6		40—42	15—17	25—28
1830				7. 8		43—45	18—20	29—32
1		11		9. 10		46—48	21—23	33—36
2			6	**III Série** 1. 2		49—51	24—26	**Liebig** 1—4
3			**Joh. Müller** 99 u. 150]	3. 4		52—54	27—29	**Ann.** 5—8
4	17	12	1	5. 6		55—57	30 Ergänz. 31—33	9—12
5			2	7. 8		58—60	34—36	13—16
6		13	3	9. 10		61—63	37—39	17—20
7			4	11. 12		64—66	40—42	21—24
8	18		5	13. 14		67—69	43—45	25—28
9			6	15. 16		70—72	46—48	29—32
1840		14	7	17. 18		73—75	49—51	33—36
1	19		8	19. 20		**III Série** 1—3	**Ergz. I** 52—54	37—40
2			9	**IV Série** 1. 2		4—6	55—57	41—44
3			10	3. 4		7—9	58—60	45—48
4	20	15	11	5. 6		10—12	61—63	49—52
5		16. 17	12	7. 8		13—15	64—66	53—56
6			13	9. 10		16—18	67—69	57—60
7	21		14	11. 12		19—21	70—72	61—64
8		18	15	13. 14		22—24	**Erg. II** 73—75	65—68
9	22	19	16	15. 16		25—27	76—78	69—72
1850			17	17. 18		28—30	79—81	73—76
Laufende Nummer	**9**	**10**	**12**	**13**	**14**	**16**	**17**	**18**

Jahreszahlen	Göttling, Taschenb. für Scheidekünstler und Apotheker	J. B. Trommsdorff, Journal der Pharmacie	Berliner Jahrbuch der Pharmacie	Philosophical Magazine	Mém. de l'Ac. Impér. d. sc., litt. et beaux arts. de Turin Sc. phys.-math. vol. 12—16, Litt. et beaux arts. 17—21, Mem. d. R. Ac. Sc. di Torino 22—49.	Commentationes Soc. R. Sc. Gottingensis	Göttingische gelehrte Anzeigen unter Aufsicht der K. Gesellschaft der Wiss.
1800	21	7. 8	6				136—138
1	22	9	7		12	15	139—141
2	23	10	8				142—144
3	24	11	9		13		145—147
4	25	12	10		14		148—150
5	26	13	11		15		151—153
6	27	14	12		16	16	154—156
7	28	15 Reg. 16	13		17		157—159
8	29	17	14			Comment.	160—162
9	30	18			18	recentiores	163—165
1810	31	19				1	166—168
1	32	20	15		20		169—171
2	33	21				2	172—174
3	34	22			Mem. d. R. Ac.		175—177
4	35	23			22		178—180
5	36	24	16			3	181—183
6	37	25	17				184—186
7	38	Neues J. d. Ph. 1	18		23	4	187—189
8	39		19				190—192
9	40		20		24		193—195
1820	41		21		25		196—198
1	42				26	5	199—201
2	43				27		202—204
3	44						205—207
4	45				28		208—210
5	46				29	6	211—213
6	47			New Series	30		214—216
7	48			1. 2	31		217—219
8	49			3. 4	32	7	220—222
9	50			5. 6	33		223—225
1830				7. 8	34		226—228
1				9. 10	35		229—231
2				The London and Edinb. Phil. Magaz. 1			232—234
3				2. 3	36		235—237
4		27		4. 5	37		238—240
5				6. 7	38		241—243
6				8. 9	39		244—246
7				10. 11			247—249
8				12. 13	40	Abhandlungen	250—252
9				14. 15	II Série 1		253—255
1840				16. 17	2	1	256—258
1				18. 19	3		259—261
2				20. 21	4		262—264
3				22. 23	5	2	265—267
4				24. 25	6		268—270
5				26. 27	7		271—273
6				28. 29	8	3	274—276
7				30. 31			277—279
8				32. 33	9		280—282
9				34. 35	10	4	283—285
1850				36. 37			286—288
Laufende Nummer	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26a**	**26b**

Jahres-zahlen	Medicinisch-chirurgische Zeitung Salzburg 1790—1820 Innsbruck 1820—1839	Ergänz. - Band	C. W. Hufeland Journal für prakt. Arzneykunde Berlin	Mémoires de l'Académie d. Sc. de Paris	Comptes rend. de l'Ac. d. Sc. de Paris	Monats-berichte der Ak. d. Wiss. zu Berlin.	St. Petersburg. Ak. d. W. Mémoires (ohne weiteren Zusatz)	St. Petersburg. Ak. d. W. Mémoires présentés par divers Savans à l'Ac. Imp. des Sc. de St. Pétersbourg
1800	11a.b.c.d.		9—11					
1	12....		12. 13					
2	13....		14. 15					
3	14....		16. 17					
4	15....		18—20				1	
5	16....	5—12	21. 22					
6	17....		23—25					
7	18....		26				2	
8	19....		27					
9	20....		28. 29				3	
1810	21....		30. 31					
1	22....		32. 33				4	
2	23....		34. 35				5	
3	24....		36. 37				6	
4	25....		38. 39					
5	26....	13—23	40. 41				7	
6	27....		42. 43	1				
7	28....		44. 45	2			8	
8	29....		46. 47	3				
9	30....		48. 49	4			9	
1820	31....		50. 51					
1	Inns-bruck 32....		52. 53	5			10	
2	33....		54. 55					
3	34....		56. 57	6				
4	35....		mit E. Osann 58. 59	7				
5	36....	24—32	60. 61	8				
6	37....		Reg. u. Suppl. 62. 63	9				
7	38....		Suppl. 64. 65					
8	39....		„ 66. 67				11	
9	40....		„ 68. 69				Mém. post. d. Euler	
1830	41....	33	70. 71					
1	42....		Suppl. 72. 73	10			VI Série	1
2	43....		74. 75	11				
3	44....		76. 77	12				
4	45....	38	78. 79					2
5	46....	39	80. 81	13	1			
6	47....	40	Reg. 82. 83		2. 3	1		
7	48....		E. Osann allein 84. 85		4. 5	2		3
8	49....		Red. 86. 87	14—16	6. 7	3		
9	50....		88. 89		8. 9	4		
1840				17	10. 11	5		
1					12. 13	6		
2				18	14. 15	7		
3					16. 17	8		
4					18. 19	9		
5				19	20. 21	10		4
6					22. 23	11		5
7				21	24. 25	12		
8					26. 27	13		
9				20	28. 29	14		
1850				22	30. 31	15		
Laufende Nummer	28		29	30	31	32	33	34

Jahreszahlen	St. Petersb. Ak. d. W., Bulletin scientifique et phys.-math.	Archiv f. physiologische Heilkunde v. **W. Roser** und **C. A. Wunderlich**, seit 1860 Archiv der Heilkunde v. **E. Wagner**, Leipzig Wiegand.	Zeitschrift der K. K. Gesellsch. der Aerzte zu Wien, Red. **Hebra**, Wien 1845–57 8°, 1858—60 4°, von 1861 an 8° Wochenblatt und Medicin. Jahrbücher, seit 1871 Red. **S. Stricker** (jetzt eingegangen).	**Canstatt** und **Eisenmanns** Jahresbericht 1843—65 Würzburg Fortsetzung, von 1866 ab: Jahresbericht über d. Leist. u. Fortschritte in der ges. Medicin von **Virchow** und **Hirsch**, von 1893 ab **Virchow**, **Gurlt** und **Posner**.	**Carl Christ. Schmidt**, Jahrbücher d. ges. in- u. ausländ. Medicin von **Winter**, **Möbius** und **Dippe**. Leipzig, Wiegand	**Hertha**, 1825—29 Stuttgart Cotta, Forts. **Berghaus**, Annalen der Erd-, Völker- und Staatenkunde. Berlin, Reimer	**F. v. Zach**, Allgem. geogr. Ephemeriden. Weimar 1798 — 1. 2 1799 — 3. 4	The Journal of the Royal Geographical Society of London. London, John Murray
1800							5. 6	
1							7. 8	
2							9. 10	
3							11. 12	
4							13—15	
5							16—18	
6							19—21	
7							22—24	
8							25—27	
9							28—30	
1810							31—33	
1							34—36	
2							37—39	
3							40—42	
4							43—45	
5							46—48	
6							49—51	
7							Neue G. E. 1. 2	
8							3. 4	
9							5. 6	
1820							7. 8	
1							9	
2							10. 11	
3							12	
4						**Hertha**	13. 14	
5						1—4	15—17	
6						5—8	18—20	
7						9. 10	21—23	
8						11. 12	24—27	
9						13. 14 **Bergh. 1**		
1830						2		
1						3. 4		1
2						5. 6		2
3						7. 8		3
4					1—4	9. 10		4
5	a) Bull. scient.				5—8	11. 12		5
6	1				9—12	**III. Reihe** 1. 2		6
7	2				13—16	3. 4		7
8	3. 4				17—20	5. 6		8
9	5. 6				21—24	7. 8		9
1840	7				25—28	9. 10		10
1	8. 9				29—32	11. 12		11
2	10	1			33—36	**IV. Reihe** 1. 2		12
3	b) ph.-math. 1	2		1. 2	37—40	3. 4		13
4	2	3		3. 4	41—44			14
5	3	4	1	5. 6	45—48			15
6	4	5	2	7. 8	49—52			16
7	5	6	3	9. 10	53—56			17
8	6	7	4	11. 12	57—60			18
9	7	8	5	13. 14	61—64			19
1850	8	9	6	15. 16	65—68			20
Laufende Nummer	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**	**41**	**42**

Jahres-zahlen	Bulletin de la Société de Géographie Paris	Eduard **Widenmann** u. Wilh. **Hauff**, Reisen- und Länder-beschreibungen der ältern und neuesten Zeit. Stuttgart und Tübingen, Cotta.	Ausland	Journal f. reine u. angewandte Mathematik A. L. **Crelle**, 4°, seit 1857 von **C.W. Borchardt** u. Mitwirk. v. **Steiner, Schellbach, Kummer, Kronecker, Weierstrass**, seit 1863 ohne Steiner, seit 1881 nur Kronecker u. Weierstrass	Journal de mathémat. pures et appliq. **J. Liouville** 4°. Fortsetzung v. Annales de mathématiq. pures et appl. par **J. D. Gergonne** à Nismes 4°.	Archiv für Naturgeschichte, **Wiegmann, Troschel**, Berlin	Flora Regensburg	**Erman**, Archiv f. wissensch. Kunde v. Russland
1800								
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								
9								
1810					1			
1					2			
2					3			
3					4			
4					5			
5								
6					6			
7					7			
8					8		1	
9					9		2	
1820					10		3	
1					11. 12		4	
2	1				13		5	
3					14		6	
4	2						7	
5	3. 4				15		8	
6	5. 6			1	16		9	
7	7. 8			2	17		10	
8	9. 10		1	3	18		11	
9			2	4	19		12	
1830			3	5. 6	20		13	
1			4	7	21		14	
2			5	8. 9			15	
3			6	10			16	
4			7	11. 12			17	
5		1	8	13. 14. 15	**Liouv. Journal**	1	18	
6		2	9		1	2	19	
7		3	10	16. 17	2	3	20	
8		4	11	18	3	4	21	
9		5	12	19. 20	4	5	22	
1840			13	21	5	6	23	
1			14	22	6	7	24	1
2		6	15	23. 24	7	8	25 Neue	2
3	**III Série**	7	16	25. 26	8	9	26—1 Reihe	3
4	1		17	27. 28	9	10	27— 2	
5	2. 3	8	18	29	10	11	28— 3	4
6	4. 5		19	30. 31. 32	11	12	29— 4	5
7	6. 7	9	20	33. 34. 35	12	13	30— 5	
8	8. 9		21	36. 37	13	14	31— 6	6
9	10. 11		22	38	14	15	32— 7	7. 8
1850	**IV Série**	10	23	39. 40	15	16	33— 8	9
Laufende Nummer	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**	**49**	**50**

Jahreszahlen	Das Inland Dorpat, Laakmann, begründet von **F. G. v. Bunge** Dorpat, **C. E. Napiersky** Riga u. **C. J. A. Paucker** Reval, Dorpat, C. F. Kluge 4°	Gazette médicale de Strasbourg 4°	Union médicale réd. par **A. Latour** Paris Fondateurs Mrs. Richelot et Aubert Roche Imp. 8 Redacteur en chef **Améd. Latour**	Allgem. medicin. Ann., Med. Nationalzeitung 1798—1 1799—2 Allg. med. Ann.	The Dublin quarterly Journal of medical science	American Journal of medical sciences **J. Hays** Philadelphia Henry C. Lea	Annuaire de l'Académie R. des sciences et lettres et des beaux arts de Belgiq. Bruxelles 8°	Annuaire de l'université catholique de Louvain 8°
1800				1				
1				2				
2				3				
3				4				
4				5				
5				6				
6				7				
7				8				
8				9				
9				10				
1810				11				
1				12				
2				13				
3				14				
4				15				
5				16				
6				17				
7				18				
8				19				
9				20				
1820				21				
1				22				
2				23				
3				24				
4				25				
5				26				
6				27				
7				28				
8				29				
9				30				
1830				31				
1				32				
2				33				
3				34				
4				35				
5				36			1	
6	1			37			2	
7	2						3	1
8	3						4	2
9	4						5	3
1840	5						6	4
1	6	1				**New Series** 1. 2	7	5
2	7	2				3. 4	8	6
3	8	3				5. 6	9	7
4	9	4				7. 8	10	8
5	10	5				9. 10	11	9
6	11	6			1. 2	11. 12	12	10
7	12	7	1		3. 4	13. 14	13	11
8	13	8	2		5. 6	15. 16	14	12
9	14	9	3		7. 8	17. 18	15	13
1850	15	10	4		9. 10	19. 20	16	14
Laufende Nummer	**51**	**52**	**53**	**54**	**55**	**56**	**57**	**58**

Jahreszahlen	Annual Report of the Board of Regents of the Smithsonian Institution	Berg-Journal Russlands Горный журналъ С.-Петербургъ jeder Jahrg. à 12 Hefte		Technol. Journal, herausg. v. d. K. Ak. der Wiss. zu St. Petersburg. Технол. журналъ, изд. Имп. Акад. Наукъ С.-Петерб.	Journal der Manufakturen u. des Handels Russlands Журналъ Мануфактуръ и Торговли С.-Петерб. 12 Hefte jährlich = 4 Bde., jedes Heft besonders für sich paginirt. 8°	Annual Report of the Registrar-General of Births, Deaths and Marriages in England presented to both Houses of Parliament by Command of Her Majesty London	Tijdschrift voor Nederlandsch Indië uitgegeven door Dr. W. R. van Hoëvell	Journal of the Asiatic Society of Bengal, edit. by the Secretaries Calcutta printed by C. B. Lewis 8° jährl. 1 Band	Journal de l'école polytechn. Cahier 1796 — 1 1797 2—4 1799 5—6
1800									Cahier 7—8
1									
2									
3									9. 10
4				1					
5				2					11. 12
6				3					13
7				Beilage 4					
8				5					14 u. Suppl.
9				6					15
1810				7					
		Jahrgang	Taf. und Karten						
1				8					
2				9					
3				10					16
4				11					
5				12					17
6				Fortsetz. 1					
7				2					
8				3					
9				4					
1820				5					18
1				6					
2				7					
3				8					19
4				9					
5		1	7	10	1—4				
6		2	29	11	5—8				
7		3	34		9—12				
8		4	21		13—16				
9		5			17—20				
1830		6			21—24				
1		7	46		25—28				20
2		8	14		29—32			1	21
3		9	34		33—36			2	22
4		10	35		37—40			3	23
5		11	34		41—44			4	24
6		12 Reg.	47		45—48			5	
7		13	35		49—52			6	25
8		14	30		53—56	1		7	26
9		15	63		57—60	2	1	8	27
1840		16	40		61—64	3	2	9	
1		17	36		65—68	4	3	10	
2		18	39		69—72	5	4	11	
3		19	47		73—76	6	5	12	
4		20	43		77—80	7	6	13	
5		21	39		81—84	8	7	14	
6	1	22	38		85—88	9	8	15	
7	2	23	30		89—92	10	9	16	31
8	3	24			93—96	11	10	17	32
9	4	25	52		97—100	12	11	18	
1850	5	26	56		101—104	13	12	19	
Laufende Nummer	59	60		61	62	63	64	65	66

Jahreszahlen	Journal Asiatique publié par la Société Asiatique, Paris 8°	The Asiatic Journal and monthly Register for British India and its Dependencies. London, printed for Black Parbury and Allen, booksellers to the Honour. East India Company 8°	The Cambridge and Dublin Mathematical journal edited by William Thomson, Fortsetzung von Cambridge Math. Journal, von 1853 ab by **W. Thomson** and **N. M. Ferrers**		Oekonomisches Repertorium für Liefland 8° Riga Livl. ökon. Societät	Annali di Matematica pura ed applicata **Tortolini** Roma, 4° Fortsetzung v. **F. Brioschi** u. **L. Cremona**	Kriegs-medicin. Journal Военно-мед. журналъ	American Journal of Pharmacy published by authority of the Philadelphia College of Pharmacy Editor **John M. Maisch**	Correspondance astronomique, géographique, hydrographiq. et statistique du Baron **de Zach** à Gènes 8°
1800									
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8					1. 2				
9					3. 4				
1810					5. 6				
1					7. 8				
2					Neueres 1				
3									
4					2				
5					3				
6		1. 2			4				
7		3. 4			5				
8		5. 6			6				1
9		7. 8			7				2. 3
1820		9. 10							4
1		11. 12			8				5
2	1	13. 14			9 u.Ergänz.-h				6. 7
3	2. 3	15. 16							8. 9
4	4. 5	17. 18			Livl. Jhrb. d.				10. 11
5	6. 7	19. 20			Landw. 1				12. 13
6	8. 9	21. 22			2				14
7	10. 11	23. 24			3				
8	Tabl.alph. 1.2	25. 26			4				
9	Nouv.J.A. 3.4	27. 28							
1830	5. 6	NewSer. 1. 2			5				
1	7. 8	3. 4			6				
2	9. 10	5. 6			7				
3	11. 12	7. 8			8				
4	13. 14	9. 10			9				
5	15. 16	11. 12							
6	III Sér. 1. 2	13. 14			10				
7	3. 4	15. 16			Neue R. 1				
8	5. 6	17. 18			2				
9	7. 8	19. 20			3				
1840	9. 10	21. 22							
1	11. 12	23. 24	Cambridge and Dublin	Cambr.	4				
2	13. 14	25. 26		1	5				
3	IV Sér. 1. 2			2	6				
4	3. 4			3	7				
5	5. 6			4	8				
6	7. 8		1	5	9				
7	9. 10		2	6					
8	11. 12		3	7	10				
9	13. 14		4	8					
1850	15. 16		5	9	11				
Laufende Nummer	67	68	69		70	71	72	73	74

Jahreszahlen	Записки военно-топографическ. Депо. С.-Петерб. gr. 4°	Revue des deux Mondes, Paris, 8°	The Lancet, a Journal of British and Foreign Medicine, Physiology, Surgery, Chemistry, Criticism, Literature and News 2 vols annually Imp. London, ed. **James G. Wakley**, Proprieter Thomas H. Wakley	Gazette médicale de Paris, gr. 4°, dirigée par **Jules Guérin** Paris, Fortsetzung v. Gazette de santé, Paris, 4° 1773—1829	Lancette française Gazette des hôpitaux Civils et Militairs, gr. folio 1828—71, gr. 4° 1872—	Transactions of the Geological Society London, 4°, established November 13. 1807 Somerset House	Al. Nic. **Scherer**, Allg. Journal der Chemie 1798 — 1 1799 — 2. 3	**Berzelius's** Jahresbericht
1800							4	
1							5—7	
2							8. 9	
3							10	
4							Neues A. J. d.Ch. 2	
5							5	
6								
7								
8								
9								
1810								
1						1		
2								
3								
4						2		
5								
6						3		
7							Nord. Blätter f. Chemie	
8								
9							Allg.nord. 1.2	
1820							Ann.d.Ch. 3-5	
1								
2								1
3			1. 2			**II Series**		2
4			3. 4			1		3
5			5. 6					4
6			7. 8			2		5
7			9. 10					6
8			11. 12		1			7
9			13. 14		2	3		8
1830			15. 16		3			9
1			17. 18		4			10
2			19. 20	**II Série**	5			11
3			21. 22	1	6			12
4			23. 24	2	7			13
5			25. 26	3	8			14
6			27. 28	4	9	4		15
7	1		29. 30	5	10	5		16
8	2. 3		31. 32	6	11			17
9			33. 34	7	12			18
1840	4. 5		35. 36	8	13			19
1	6	1— 4	37. 38	9	14	6		20
2	7	5— 8	39. 40	10	15			21
3	8	9—12	41. 42	11	16			22
4	9	13—16	43. 44	12	17			23
5		17—20	45. 46	13	18	7		24
6		21—24	47. 48	**III Série** 1	19			25
7	10	25—28	49. 50	2	20			26
8	11	29—32	51. 52	3	21			27
9	12	33—36	53. 54	4	22			28
1850		37—40	55. 56	5	23			29
Laufende Nummer	**75**	**76**	**77**	**78**	**79**	**80**	**81**	**82**

Jahres-zahlen	Abhandl. der Kön. Böhmischen G. d. Wiss. Prag, 8°	Bulletin de l'Acad. Royale des Sciences, des lettres et des beaux arts de Belgique	Accad. Lincei Atti	**Leonhard,** Taschenbuch für Mineralogie	Chemisches Centralblatt 1856—94, Fortsetzung von: Pharmaceut. Centralblatt 1830—49, **A. Weinlig** 1840—44, **R. Buchheim** 1845—47, **W. Knop** 1848—49, dann: Chemisch-Pharmaceut. Centralbl. **W. Knop** 1850—55, und Chem. Centr. 1856—61, **Rud. Arendt** 1862—94, Leipzig, 8°, L. Voss	**Dingler,** Polytechnisch. Journal	Institut	Société géologique de France Mémoires 4°
1800								
1								
2								
3	1							
4								
5								
6								
7	2			1				
8				2				
9				3				
1810				4				
1	3			5				
2	4			6				
3				7				
4				8				
5	5			9				
6				10				
7				11				
8	6			12				
9				13				
1820				14		1— 3		
1	7			15		4— 6		
2	8			16		7— 9		
3				17		10— 12		
4	**Neue Folge**			18		13— 15		
5	1			19		16— 18		
6				20		19— 22		
7				21		23— 26		
8				22		27— 30		
9	2			23	Pharm. Centr.	31— 34		
1830				**Leonh.u.Bronn** 1	1	35— 38		
1	3	1. 2		2	2	39— 42		
2		3. 4		3	3	43— 46		
3		5. 6		4	4	47— 50	1	1
4	4	7. 8		5	5	51— 54	2	
5		9. 10		6	6	55— 58	3	2
6	5	11. 12		7	7	59— 62	4	
7	**V. Folge**	13. 14		8	8	63— 66	5	
8	1	15. 16		9	9	67— 70	6	3
9		17. 18		10	10	71— 74	7	
1840		19. 20		11	11	75— 78	8	4
1	2	21. 22		12	12	79— 82	9	
2		23. 24		13	13	83— 86	10	5
3	3	25. 26		14	14	87— 90	11	
4		27. 28		15	15	91— 94	12	
5	4	29. 30		16	16	95— 98	13	
6		31. 32		17	17	99—102	14	
7	5	33. 34	1	18	18	103—106	15	
8		35. 36	2	19	19	107—110	16	
9	6	37. 38	3	20	20	111—114	17	
1850		39. 40	4	21	Chem.-ph.C.21	115—118	18	
Laufende Nummer	**83**	**84**	**85**	**86**	**87**	**88**	**89**	**90**

Jahreszahlen.	Société géologique de France. Bulletin 8°	Annals of Natural History	Annales du Muséum d'histoire naturelle 4°	Annales des Sciences naturelles		Société des Naturalistes de Moscou		Liebig und Kopp, Jahresbericht der Chemie
						Mémoires 4°	Bulletin 8°	
1800								
1								
2								
3								
4								
5								
6						1		
7								
8								
9						2		
1810								
1								
2								
3						4		
4								
5								
6								
7						5		
8								
9								
1820								
1								
2								
3								
4				1— 4				
5				5. 6				
6				7— 9				
7				10—12				
8				13—15				
9				16—18		7	1	
1830	1			19—21			2	
1	2		Nouv. Sér.	22—24			3	
2	3		1	25—27			4. 5	
3	4. 5		2	28—30			6	
4	6		3	II Sér. Zool. 1. 2	1. 2 II Sér. Bot.	9	7	
5	7		4	3. 4	3. 4	10	8	
6	8		Archives du Muséum	5. 6	5. 6		9	
7	9			7. 8	7. 8	11	10	
8	10	1		9. 10	9. 10		11	
9	11	2. 3	1	11. 12	11. 12	12	12	
1840	12	4. 5		13. 14	13. 14		13	
1	13	6. 7	2	15. 16	15. 16		14	
2	14	8. 9		17. 18	17. 18	13	15	
3	II Série 1	10. 11	3	19. 20	19. 20		16	
4	2	12. 13	4	1. 2	III Sér. 1. 2		17	
5	3	14. 15		3. 4	3. 4		18	
6	4	16. 17		5. 6	5. 6	14	19	
7	5	18. 19	5	7. 8	7. 8		20	1
8	6	II Sér. 1. 2		9. 10	9. 10		21	
9	7	3. 4		11. 12	11. 12		22	2
1850	8	5. 6		13. 14	13. 14		23	3
Laufende Nummer	91	92	93	94a	94b	95	96	97

Jahreszahlen	**Silliman**, American Journal	**Ad. F. Gehlen**, Journal f. Chemie u. Physik, d. ersten 6 Bde. 1803—5 = Neues allgem. Journ. d. Chem.	Mémoires couronnées de l'Académie Royale des Sciences de Belgique	Verhandlungen der Mineralogisch. Gesellschaft zu St. Petersburg	**Karsten**, Archiv für Mineralogie, Geognosie, Bergbau und Hüttenkunde. Berlin G. Reimer	**Froriep**, Notizen auf dem Gebiet der Natur- u. Heilkunde. Weimar	Polytechnisches Centralblatt von **Huelsse, Weinlig, Boettcher**	Berg- und hüttenmännische Zeitung 4°
1800								
1								
2								
3		1. 2						
4		3. 4						
5		5. 6						
6		Neue Reihe 1. 2						
7		3. 4						
8		5. 6						
9		7. 8						
1810		9. 10						
1		**Schweigger** 1—3						
2		4—6						
3		7— 9						
4		10—12						
5		13—15						
6		16—18						
7		19—21						
8		22—24						
9		25—27						
1820		28—30						
1	1. 2	31—33						
2	3. 4	34—36				1. 2		
3	5. 6	37—39				3— 5		
4	7. 8	40—42				6— 8		
5	9. 10	43—45				9—11		
6	11 12	46—48				12—15		
7	13. 14	49—51				16—18		
8	15. 16	52—54				19—22		
9	17. 18	55—57			1	23—25		
1830	19. 20	58—60			2	26—29		
1	21. 22	61—63			3	30—32		
2	23. 24	64—66			4. 5	33—35		
3	25. 26	67—69			6	36—38		
4	27. 28	**Erdmann** 1—3			7	39—42		
5	29. 30	4—6			8	43—46	1	
6	31. 32	7— 9			9	47—50	2	
7	33. 34	10—12			10	Neue Notizen 1—4	3	
8	35. 36	13—15			11	5—8	4	
9	37. 38	16—18			12. 13	9—12	5	
1840	39. 40	19—21	1		14	13—16	6	
1	41. 42	22—24			15	17—20	7	
2	43. 44	25—27		1	16	21—24	8	1
3	45. 46	28—30		2	17	25—28	9	2
4	47. 48	31—33		3	18	29—32	10	3
5	49. 50	34—36		} 4	19	33—36	11	4
6	II Ser. 1. 2	37—39			20	37—40	12	5
7	3. 4	40—42		5	21	III. Reihe 1—4	13	6—1 Neue Folge
8	5. 6	43—45		} 6	22	5—7	14	7—2
9	7. 8	46—48	2. 3			8—11	15	8—3
1850	9. 10	49—51	4	7	23	Tagber 1— 4	16	9—4
Laufende Nummer	**98**	**99**	**100**	**101**	**102**	**103**	**104**	**105**

Jahres-zahlen.	Journal de chimie médicale 8°	**Buchner,** Repertorium für Pharmacie, angefangen von Adolph Ferdinand **Gehlen,** fortges. von Johann Andr. **Buchner,** Nürnberg Schrag klein 8°	**Joh. Müller,** Archiv für Anatomie und Physiologie, Berlin 1834—58 8°, Forts. von Reil's Arch. 1796—1815 und J. F. Meckel's Arch. 1815—32, Nachfolger **C. B. Reichert** und **Emil Dubois-Reymond** 1859—76, dann **E. Dubois-Reymond, His** und **Braune** 1877 — jetzt	Archives des Sciences physiques et naturelles. Genève 8°	Medico-Chirurgical Transactions, London 8°	Archives générales de Médecine. Paris 8°	The British and Foreign Medical Review **John Forbes** London Churchill, von 1848 ab: Brit. and Foreign Medico-Chirurgical Review Sam. Highley and John Churchill 8°	Report of the Meeting of the British Association for the Advancement of Science held at 8°
1800								
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								
9					1			
1810								
1					2			
2					3			
3					4			
4					5			
5		1			6			
6		2			7			
7		3			8			
8		4			9			
9		5— 7			10			
1820		8. 9			11			
1		10. 11						
2		12. 13			12			
3		14. 15				1— 3		
4		16—19				4— 6		
5	1	20—22				7— 9		
6	2	23. 24				10—12		
7	3	25. 26			13	13—15		
8	4	27—29			14	16—18		
9	5	30—32			15	19—21		
1830	6	33—36			16	22—24		
1	7	37—40				25—27		1 — York
2	8	41—43			17	28—30		2 — Oxford
3	9	44—46			18	II 1—3		3
4	10	47—49	1		II Ser.	Sér. 4— 6		4 — Edinburgh
5	11	II. 51—54	2		19— 1	7— 9		5 — Dublin
6	12	Reihe 55—58	3			10—12	1. 2	6 — Bristol
7	13	59—61	4		20— 2	III S. 1—3	3. 4	7 — Liverpool
8	14	62—64	5		21— 3	Nouv. 1—3	5. 6	8 — NewCastle
9	15	65—67	6		22— 4	S. 4—6	7. 8	9
1840	16	68—70	7		23— 5	7— 9	9. 10	10
1	17	71—74	8		24— 6	10—12	11. 12	11 — Plymouth
2	18	75—78	9		25— 7	13—15	13. 14	12 — Manchest.
3	19	79—82	10		26— 8	IV 1— 3	15. 16	13 — Cork
4	20 III Sér.	83—86	11		27— 9	Sér. 4— 6	17. 18	14 — York
5	21—1	87—90	12		28—10	7— 9	19. 20	15 — Cambridge
6	22—2	91—94	13	1— 3	29—11	10—12	21. 22	16—Southampt.
7	23—3	95—97	14	4— 6	30—12	13—15	23. 24	17 — Oxford
8	24—4	98—100	15	7— 9	31—13	16—18	Med. 1. 2	18 — Swansea
9	25—5	III. 101—103	16	10—12	32—14	19—21	Chir. 3. 4	19 — Birmingh.
1850	26—6	Reihe 104—106	17	13—15	33—15	22—24	5. 6	20 — Edinburgh
Laufende Nummer	**106**	**107**	**108**	**109**	**110**	**111**	**112**	**113**

Jahreszahlen	The quarterly Journal of the Geologic. Soc. 8°	K. Baierische Akademie d. Wiss. zu München		Archiv der Pharmacie Rud. Brandes 8° Lemgo 1822—37 mit H. Wackenroder 1838—50 H. Wackenroder und L. F. Bley 1851—62 L. F. Bley und H. Ludwig 1863—67 H. Ludwig 1868—72 E. Reichardt 1873—90 E. Schmidt und H. Beckurts 1891—	Verhandlungen der Russ. K. Mineralogischen Ges. zu St. Petersburg 8°	Polytechnisches Centralblatt Huelsse, Weinlig, Boettcher 8°	Annals of natural history	Bulletin de pharmacie
		Denkschriften 4°	Gelehrte Anzeigen 8°					
1800								
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8		1						
9								1
1810		2						2
1		3						3
2								4
3		4						5
4		5						6
5								II Sér.: 1
6		6						Journ. de pharm. 2
7								3
8								4
9		7						5
1820								6
1								7
2		8		1. 2				8
3		9		3— 6				9
4				7—10				10
5				11—14				11
6		Abhandl.		15—18				12
7		d.phys.-math.		19—22				13
8		Klasse		23—26				14
9				27—30				15
1830		1		31—34				16
1				35—38				17
2				39—42				18
3		2	Gelehrte	43—46				19
4			Anzeigen	47—50				20
5			1	51—54		1		21
6			2. 3	55—58		2		22
7			4. 5	59—62		3		23
8		3, a	6. 7	63—66		4	1	24
9			8. 9	67—70		5	2. 3	25
1840			10. 11	71—74		6	4. 5	26
1		3, b	12. 13	75—78		7	6. 7	27
2		3, c	14. 15	79—82	1	8	8. 9	III Sér. 1. 2
3			16. 17	83—86	2	9	10. 11	3. 4
4		a	18. 19	87—90	3	10	12. 13	5. 6
5	1	4, b	20. 21	91—94	4	11	14. 15	7. 8
6	2	c	22. 23	95—98		12	16. 17	9. 10
7	3	a	24. 25	99—102	5	13	18. 19	11. 12
8	4	5, b	26. 27	103—106	6	14	II Sér. 1. 2	13. 14
9	5	c	28. 29	107—110		15	3. 4	15. 16
1850	6	6, a	30. 31	111—114	7	16	5. 6	17. 18
Laufende Nummer	114	115	116	117	118	119	120	121

Jahreszahlen.	Verhandlungen des natur-historischen Vereins für die Rheinlande und Westphalen	Pharmaceutical Journal and Transactions edited by Jacob Bell London John Churchill	**Virchow,** Archiv f. pathologische Anatomie und Physiologie	Prager Vierteljahrsschrift für die gesammte Heilkunde	Annales d'hygiène publique et de Médicine légale par **Adelon, Andral** etc. I Série 1829—53, II Série 1854—78, III Série 1879— Paris, 8° J. B. Baillière	**Adolph Henke,** Zeitschrift für die Staatsarzneikunde. Erlangen, Enke		**F. Magendie,** Journal de physiologie expérimentale Paris
1800								
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								
9								
1810								
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								
9								
1820						Band	Ergänzungsband	
1						1. 2		1
2						3. 4		2
3						5. 6	1	3
4						7. 8	2. 3	4
5						9. 10	4	5
6						11. 12	5. 6	6
7						13. 14	7. 8	7
8						15. 16	9	8
9					1. 2	17. 18	10. 11	9
1830					3. 4	19. 20	12. 13	10
1					5. 6	21. 22	14. 15	11
2					7. 8	23. 24	16. 17	
3					9. 10	25. 26	18. 19	
4					11. 12	27. 28	20	
5					13. 14	29. 30	21	
6					15. 16	31. 32	22	
7					17. 18	33. 34	23. 24	
8					19. 20	35. 36	25	
9					21. 22	37. 38	26	Zeitschr. f.
1840					23. 24	39. 40	27. 28	rationelle Me-
1					25. 26	41. 42	29	dicin
2		1			27. 28	43. 44	30. 31	**Henle** und
3		2			29. 30	45. 46	32	**Pfeufer**
4	1	3		1— 4	31. 32	47. 48	33	1. 2
5	2	4		5— 8	33. 34	49. 50	34	3. 4
6	3	5		9—12	35. 36	51. 52	35	5
7	4	6	1	13—16	37. 38	53. 54	36	6
8	5	7		17—20	39. 40	55. 56	37	
9	6	8	2	21—24	41. 42	57. 58	38	7
1850	7	9		25—28	43. 44	59. 60	39—41	
Laufende Nummer	**122**	**123**	**124**	**125**	**126**	**a 127**	**b**	**128**

Jahreszahlen	Jahrb. d. prakt. Pharm. u. verw. Fächer, herausgeg. v. d. pharm. Ges. Rheinbayerns, red. v. **Herberger** u. **Winckler**, Kaiserlautern 8°, seit 1841 Landau, seit 1853 Ludwigshafen, seit 1854 Neues Jahrb. der Pharmacie von **Walz** und **Winckler**, seit 1862 **Vorwerck** in Speyer	Medicin. Zeitung Russlands, red. von **Heine, Krebel, Thielmann**, St. Petersburg P. J. Kurth 4°	**Thaer**, Annalen des Ackerbaues. Berlin, Realschulbuchhandl.	Annales de l'agriculture française **Tessier**	Journal of the Royal Agricultural Society	Annalen der Landwirthschaft in den Kön. Preussischen Staaten, **A. v. Sengerke** herausg. v. Präsidium des K. Pr. Landes-Oekonomie-Collegiums. Berlin	Uebersicht der Arbeiten und Verhandlungen der schlesischen Ges. f. vaterländische Cultur. Breslau, 8°	Landwirthsch. Journal der Moskow. landw. Ges. Russisch: Земледѣльческій журналъ, издаваемый Имп. Московскимъ Обществомъ Сельскаго Хозяйства. Москва, 8°
1800				9—12				
1				13—16				
2				17—20				
3				21—24				
4				25—28				
5			1. 2	29—32				
6			3. 4	33—36				
7			5. 6	37—40				
8			7. 8	41—44				
9			9. 10	45—48				
1810			11. 12	49—52				
1			Ann. d. Fortsch. 1. 2	53—56				
2			3. 4	57—60				
3			**Maeglin'sche** Annalen der Landwirthschaft. Berlin, 8°	61—64				
4				65—68				
5								
6								
7			1					
8			2					
9			3. 4 u. Suppl					
1820			5. 6					
1			7. 8					1
2			9. 10					2
3			11. 12				1	3
4			13. 14				2	4
5			15. 16				3	5
6			17. 18				4	6
7			19. 20				5	7
8			21. 22				6	8
9			23. 24				7	9
1830			25				8	10 Reg.
1			26. 27				9	11—1 II дес
2			28. 29				10	12—2
3			30				11	13—3
4			Maeglin's Jrb. d. Landw. v.				12	14—4
5							13	15—5
6			**Franz Kärte** 1				14	16—6 17—7
7			2				15	18—8 19—9
8	1		3				16	20—10 Rg
9	2 Neue		4				17	21—11 22—12
1840	3 Folge				1		18	23—13 24—14 25—15
1	4—1				2		19	26—1 III дес 27—2
2	5—2		5		3		20	28—3 29—4
3	6—3		Mitth.d.K.		4	1. 2	21	30—5
4	7—4	1	fr.Oek. 1		5	3. 4	22	31—6 32—7
5	8—5	2	Soc. 2		6	5. 6	23	33—8 34—9
6	9—6	3	Petrsb. 3		7	7. 8	24	35—10 36—11
7	10—7	4	4		8	9. 10	25	37—12 38—13
8	11—8	5	5		9	11. 12	26	39—14 40—16
9	12—9	6	6		10	13. 14	27	41—[illegible] 42—17
1850	13—10	7	7		11	15. 16	28	43—18
Laufende Nummer	**129**	**130**	**131**	**132**	**133**	**134**	**135**	**136**

Jahreszahlen	Nouvelles Annales de Mathématiques, Journal des Candidats aux Écoles polytechnique et normale par Mr. **Gerono** e **Terquem** 1842–62 **Gerono** et **Prouhet** von 1863 ab **Gerono** et **J. Bourget** Paris 8, Gauthier-Villars Successeur de Mallet-Bâchelier	Annali di chimica applicata alla medicina, cioè, alla farmacia, alla tossicologia, all' igiene, alla fisiologia, alla patologia ed alla terapeutic. **Giovanni Polli** Milano, 8°. Serie I Giornale di farmacia Serie II Bibliotheca di farmacia, chimica, fisica	Annales médico-psycologiques. Journal de l'anatomie, de la physiologie et de la pathologie du système nerveux par Drs **Baillarger, Cerise, Longet** Paris, 8° Fortin, Masson
1800			
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
1810			
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9		Serie 1	
1820			
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
1830			
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
1840			
1			
2	1		
3	2		1. 2
4	3	III Serie	3. 4
5	4	1	5. 6
6	5	2. 3	7. 8
7	6	4. 5	9. 10
8	7	6. 7	11. 12
9	8	8. 9	1 II
1850	9	10. 11	2 Serie
Laufende Nummer	**137**	**138**	**139**

Jahreszahlen	Philosophical Transactions	Journal des Savans	Nova Acta Ac. Caes. Leopoldina-Carolina 4°	Berliner Ak. der Wiss. Abhandlungen
1850	140	186		95
1	141	187	23u.Suppl.	96
2	142	188		97
3	143	189		98
4	144	190	24u.Suppl.	99
5	145	191	25u.Suppl.	100
6	146	192		101
7	147	193	26u.Suppl.	102
8	148	194		103
9	149	195		104
1860	150	196	27	105
1	151	197	28	106
2	152	198	29	107
3	153	199		108
4	154	200	30. 31	109
5	155	201	32	110
6	156	202		111
7	157	203	33	112
8	158	204	34	113
9	159	205		114
1870	160	206	35	115
1	161	207		116
2	162	208		117
3	163	209	36	118
4	164	210		119
5	165	211	37	120
6	166	212	38	121
7	167	213	39	122
8	168	214	40	123
9	169	215	41	124
1880	170	216		125
1	171	217	42	126
2	172	218	43	127
3	173	219	44	128
4	174	220	45. 46	129
5	175	221	47	130
6	176	222	48	131
7	177	223	49–51	132
8	178	224	52	133
9	179	225	53	134
1890	180	226	54	135
1	181	227	55. 56	136
2	182	228	57. 58	137
3	183	229	59. 60	138
4	184	230	61–63	139
5				
6				
7				
8				
9				
1900				
Laufende Nummer	**1**	**3**	**4**	**5**

Jahres-zahlen.	Transactions of the Royal		Annales de Chimie et Physique	Poggendorff Wiedemann, Ann. d. Physik	Liebig, Annalen der Chemie	R. Accademia delle Scienze di Torino	
	Irish Academy	Edinburgh Society				Memorie	Bolletino (Atti)
1850			III Série	Pogg.	73— 76		
1			31—33	82— 84	77— 80	11	
2	22		34—36	85— 87	81— 84	12	
3		20	37—39	Ergnz. III 88— 90	85— 88	13	
4			40—42	Ergnz. IV 91— 93	89— 92		
5			43—45	94— 96	93— 96		
6			46—48	97— 99	97—100		
7	23	21	49—51	100—102	101—104		
8			52—54	103—105	105—108	17	
9			55—57	106—108	109—112		
1860			58—60	109—111	113—116		
1		22	61—63	112—114	117—120		
2			64—66	115—117	Suppl. I 121—124		
3			67—69	118—120	125—128		
4		23	IV S. 1— 3	121—123	Suppl. II 129—132		
5	24		4— 6	124—126	Suppl. III 133—136		
6			7— 9	127—129	Suppl. IV 137—140		1
7		24	10—12	130—132	Suppl. V 141—144		2
8			13—15	133—135	Suppl. VI 145—148	24	3
9		25	16—18	136—138	149—152		4
1870			19—21	139—141	Sppl. VII 153—156		5
1			22—24	142—144	157—160	25. 26	6
2		26	25—27	Ergnz. V 145—147	Sppl. VIII 161—164		7
3	25		28—30	148—150	165—170	27	8
4			V S. 1— 3	Jubelbd. 151—153	171—174		9
5			4— 6	Ergnz. VI 154—156	175—179		10
6	26	27	7— 9	157—159	180—184	28	11
7			10—12	Erg. VII 160—1. 2	185—189		
8	27		13—15	3— 5	190—194	29. 30	14
9		28	16—18	Erg. VIII 6— 8	195—199	31	15
1880		29	19—21	9—11	200—205	32	16
1			22—24	12—14	206—210	33	17
2			25—27	15—17	211—215		18
3	28	30	28—30	18—20	216—221	34	
4			VI S. 1— 3	21—23	222—226	35	
5			4— 6	24—26	227—231	36	
6			7— 9	27—29	232—236	37	
7		32	10—12	30—32	237—242		
8		31. 33	13—15	33—35	243—250	38	
9	29	34	16—18	36—38	251—256	39	
1890		Reg. 35	19—21	39—41	257—260	40. 41	
1		36	22—24	42—44	261—268		
2	30		25—27	45—47	269—276	42	
3			28—30	48—50	277—280	43	
4			VII Série	51—53	281—284		
5							
6							
7							
8							
9							
1900							
Laufende Nummer	9	10	16	17	18	25	

Jahreszahlen	K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen		Mém. de l'Ac. des Sc. Paris	Comptes rendus de l'Ac. des Sc. Paris	Berliner Ak. der Wiss. Monatsberichte	St. Petersburger Akademie		
	Abhandlungen	Gelehrte Anz. u. Nachrichten				Mém. Sc. math. et phys.	Bulletin phys.-math.	Mélanges physiques et chim.
								bio-log.
1850		286—288		30. 31	15	6	8	
1	5	289—291		32. 33	16		9	
2		292—294		34. 35	17			1
3		295—297	23	36. 37	18	7	10. 11	
4	6	298—300	24	38. 39	19		12	
5		301—303		40. 41	20		13	
6	7	304—306	27	42. 43	21		14	2
7		307—309		44. 45	22	8 VII	15	
8	8	310—312		46. 47	23	Série	16	
9		313—315		48. 49	24 Reg.	9 1	17	3
1860	9	316—318	28. 30. 31	50. 51	25	2	Bll. de l'A. 1. 2	
1	10	319—321	33	52. 53	26	3	3	
2	11	322—324	26	54. 55	27	4	4	
3		325—327		56. 57	28	5. 6	5. 6	4
4		328—330	32. 34	58. 59	29	7. 8	7	
5	12	331—333		60. 61	30		8	5
6	13	334—336		62. 63	31	9	9. 10	
7		337—339	29	64. 65	32	10	11	6
8	14	340—342		66. 67	33	11	12	
9		343—345		68. 69	34	12. 13	13	
1870	15	346—348		70. 71	35	14. 15	14	7
1	16	349—351		72. 73	36	16	15	
2	17	352—354		74. 75	37	17. 18. 19	17	8
3	18	355—357		76. 77	38	20	18	
4	19	358—360		78. 79	39	21	19	
5	20	361—363		80. 81	40		20	9
6	21	364—366		82. 83	41		21	
7	22	367—369		84. 85	42	23. 24	22	
8	23	370—372		86. 87	43	25	24	
9	24. 25	373—375		88. 89	44	26	25	10
1880	26	376—378		90. 91	45	27	26	
1	27. 28	379—381		92. 93	46	28. 29	27	11
2	29	382—384		94. 95	47 Reg.	30		
3	30	385—387		96. 97	48	31	28	
4	31	gr. 388—390		98. 99	49		29	
5	32	8° 391—393		100. 101	50	32		
6	33	394—396		102. 103	51	33	30	12
7	34	397—399		104. 105	52		31	
8	35	400—402		106. 107	53		32	
9	36	403—405		108. 109	54		Nouv. Série	
1890		406—408		110. 111	55	37	1 (33)	
1	37	409—411		112. 113	56	39	2 (34)	13
2	38	412—414		114. 115	57	38	3 (35)	
3		415—417		116. 117	58	40. 41	4 (36)	
4	39			118. 119	59	42		
5								
6								
7								
8								
9								
1900								
Laufende Nummer	26 a	26 b	30	31	32	33	35 a	35 b

Jahres-zahlen	Acad. R. des Sc. de Belgique. Bulletin.	Reale Accademia dei Lincei: Transunti	Reale Accademia dei Lincei: Atti 4°	Jahrbuch f. Mineralogie u. Geologie. Leonh. Bronn	Chem.-pharm. Centralblatt 1850—55, Chem. Centr. 1856—94	Silliman American Journal	Berg- und hüttenmänn. Zeitung. Neue Folge.	Buchner Repertorium der Pharm.
						II Série		
1850	39. 40	Vol. Jhrg.			21	9. 10		
1	41. 42			22	22	11. 12	10— 5	107—110
2	43. 44			23	23	13. 14	11— 6	Neues 1
3	45. 46			24	24	15. 16	12— 7	Rep. 2
4	47. 48			25	25	17. 18	13— 8	3
5	49. 50			26	26	19. 20	14— 9	4
6	II Sér. 1. 2			27	1 II. Folge	21. 22	15—10	5
7	3. 4			28	2 Chem.	23. 24	16—11	6
8	5. 6			29	3 Centr.	25. 26	17—12	7
9	7. 8			30	4	27. 28	18—13	8
1860	9. 10			Reg. 31	5	29. 30	19—14	9
1	11. 12			32	6	31. 32	20—15	10
2	13. 14			33	7	33. 34	21—16	11
3	15. 16			34	8	35. 36	22—17	12
4	17. 18			35	9	37. 38	23—18	13
5	19. 20			36	10	39. 40	24—10	14
6	21. 22			37	11	41. 42	25—20	15
7	23. 24			38	12	43. 44	26—21	16
8	25. 26			39	13	45. 46	27—22	17
9	27. 28			40	14	47. 48	28—23	18
1870	29. 30		24	Reg. 41	1 III.F.	49. 50	29—24	19
1	31. 32		25	42	2	III S. 1. 2	30—25	20
2	33. 34		26	43	3	3. 4	31—26	21
3	35. 36		27	44	4	5. 6	32—27	22
4	37. 38		II Sér. 1	45	5	7. 8	33—28	23
5	39. 40		2	46	6	9. 10	34—29	24
6	41. 42		3	47	7	11. 12	35—30	25
7	43. 44	1 (274)	4. 5. 6. 7. 8	48	8	13. 14	36—31	26
8	45. 46	2 (275)	III Sér. 1. 2. 3	49	9	15. 16	37—32	27
9	47. 48	3 (276)	4	50	10	17. 18	38—33	28
1880	49. 50	4 (277)	5. 6. 7. 8	Reg. 51 a. b	11	19. 20	39—34	29
1	III Sér. 1. 2	5 (278)	9. 10. 11. 12	52 a. b—1 Beil.	12	21. 22	40—35	
2	3. 4	6 (279)	13. 14	53 a. b —	13	23. 24	41—36	
3	5. 6	7 (280)	15. 16	54..2 Beil.	14	25. 26	42—37	
4	7. 8	8 (281)	17. 18. 19	55..	15	27. 28	43—38	
5	9. 10	(282)	IV Sér. 1.2 Rendi-	Rp 56..3 Beil.	16	29. 30	44—39	
6	11. 12	(283)	3 conti	57..4 Beil.	17	31. 32	45—40	
7	13. 14	Memorie	4	58..5 Beil.	18	33. 34	46—41	
8	15. 16	(285)	5	59..	19	35. 36	47—42	
9	17. 18	(286)	6	60..6 Beil.	1 IV.F.	37. 38	48—43	
1890	19. 20	(287)	7	Rp. 61..	2	39. 40	49—44	
1	21. 22	(288)	8	62..7 Beil.	3	41. 42	50—45	
2	23. 24	(289)	V Ser. 1	63..	4	43. 44	51—46	
3	25. 26		2	64..8 Beil.	5	45. 46	52—47	
4			3		6	47. 48	53—48	
5								
6								
7								
8								
9								
1900								
Laufende Nummer	84	85		86	87	98	105	107

Jahreszahlen.	Du Bois-Reymond Archiv f. Anatomie und Physiologie	Medico-chirurgical Transactions	Archives générales de Médicine	British and Foreign Medical Review	Report of the Meeting of the Brit. Assoc. for the Advancement of Science	The quarterly Journal of the Geological Soc. of London	K. Baierische Akad. d. Wiss. München, Abhandlungen
		II Serie					
1850	17	33—15	22—24	5. 6	20 — Edinburgh	6	a
1	18	Gen. 34—16	25—27	7. 8	21 — Ipswich	7	6, b
2	19	In- 35—17	28—30	9. 10	22 — Belfast	8	c
3	20	dex 36—18	V 1. 2	11. 12	23 — Hull	9	a
4	21	37—19	Sér. 3. 4	13. 14	24 — Liverpool	10	7, b
5	22	38—20	5. 6	15. 16	25 — Glasgow	11	c
6	23	39—21	7. 8	17. 18	26 — Cheltenham	12	
7	24	40—22	9. 10	19. 20	27 — Dublin	13	a
8	25	41—23	11. 12	21. 22	28 — Leeds	14	8, b
9	26	42—24	13. 14	23. 24	29 — Aberdeen	15	
1860	27	43—25	15. 16	25. 26	30 — Oxford	16	c
1	28	44—26	17. 18	27. 28	31 — Manchester	17	9
2	29	45—27	19. 20	29. 30	32 — Cambridge	18	
3	30	46—28	VI 1. 2	31. 32	33 — New-Castle	19	
4	31	47—29	Sér. 3. 4	33. 34	34 — Bath	20	a
5	32	48—30	5. 6	35. 36	35 — Birmingham	21	
6	33	49—31	7. 8	37. 38	36 — Nottingham	22	10, b
7	34	50—32	9. 10	39. 40	37 — Dundee	23	
8	35	51—33	11. 12	41. 42	38 — Norwich	24	
9	36	52—34	13. 14	43. 44	39 — Exeter	25	c
1870	37	53—35	15. 16	45. 46	40 — Liverpool	26	
1	38	54—36	17. 18	47. 48	41 — Edinburgh	27	a
2	39	55—37	19. 20	49. 50	42 — Brighton	28	11, b
3	40	56—38	21. 22	51. 52	43 — Bradford	29	c
4	41	57—39	23. 24	53. 54	44 — Belfast	30	a
5	42	58—40	25. 26	55. 56	45 — Bristol	31	12, b
6	43	59—41	27. 28	57. 58	46 — Plymouth	32	c
7	44. 45	60—42	29. 30	59. 60	47 — Plymouth	33	a
8	46. 47	61—43	VII 1. 2	61. 62	48 — Dublin	34	
9	48. 49	62—44	Sér. 3. 4	63. 64	49 — Sheffield	35	13, b
1880	50. 51	63—45	5. 6	65. 66	50 — Swansea	36	c
1	52. 53	64—46	7. 8	67. 68	51	37	a
2	54. 55	65—47	9. 10	69. 70	52 — Southampton	38	14, b
3	56. 57	66—48	11. 12		53 — Southport	39	c
4	58. 59	67—49	13. 14		54 — Montreal	40	a
5	60. 61	68—50	15. 16		55 — Aberdeen	41	15, b
6	62. 63	69—51	17. 18		56 — Birmingham	42	c
7	64. 65	70—52	19. 20		57 — Manchester	43	a
8	66. 67	71—53	21. 22		58 — Bath	44	16, b
9	68. 69	72—54	23. 24		59 — New-Castle	45	c
1890	70. 71	73—55	25. 26		60 — Leeds	46	a 17, b
1	72. 73	74—56	27. 28		61 — Cardiff	47	
2	74.75 Suppl.	75—57	29. 30		62 — Edinburgh	48	
3	76.77 Suppl.	76—58	31. 32		63 — Nottingham	49	18, a, b
4			VIII S. 1. 2			50	
5							
6							
7							
8							
9							
1900							
Laufende Nummer	108	110	111	112	113	114	115

Jahreszahlen	K. Baierische Akad. d. Wiss. München, Sitzungsberichte	**Brandes**, Archiv d. Pharmacie, von 1851 ab hrsgn. von **L. F. Bley**	Kongl. Svenska Vetensk. Akad. Handlingar	Kongl. Svenska Vetensk. Akad. Bihang	K. K. Wiener Akad. d. W. Denkschriften	K. K. Wiener Akad. d. W. Sitzungsberichte	**Pflüger** Archiv für Physiologie	Archives de Physiologie normale et pathologique, **E. Brown-Séquard**
	a) Gelehrte Anzeigen					1848 1. 2		
						1849 2. 3		
1850	30. 31	111—114			1	4. 5		
1	32. 33	115—118			2	6. 7		
2	34. 35	119—122			3. 4	8. 9		
3	36. 37	123—126	Ny Följd		5	10. 11		
4	38. 39	127—130	4°		6. 7. 8	12. 13		
5	40. 41	131—134	1		9. 10	14—18		
6	42. 43	135—138			11. 12	19—22		
7	44. 45	139—142	2		13	23—26		Journal
8	46. 47	143—146			14. 15	27—33		1
9	48. 49	147—150	3		16. 17	34—38		2
1860	b) Sitzb. 50—1	151—154			18	39—41		3
1	2a.b	155—158	4		19	42. 43		4
2	3..	159—162			20	44—46		5
3	4..	163—166	5		21	47. 48		6
4	5..	167—170			22. 23	49. 50		
5	6..	171—174	6		24	51. 52		
6	7..	175—178			25	53. 54		
7	8..	179—182	7		26. 27	55. 56		Archives
8	9..	183—186			28	57. 58	1	1
9	10. phys.-	187—190	8		29	59. 60	2	2
1870	11. math.	191—194	9		30	61. 62	3	3
1	12. 1	195—198	10			63 64	4	4
2	13. 2	199—201	11	1	31. 32	65. 66	5. 6	
3	14. 3	202. 203	12	2		67. 68	7	5
4	15. 4	204. 205	13	3	33	69. 70	8. 9	II Sér. 6—1
5	16. 5	206. 207	14, a		34	71. 72	10. 11	7—2
6	17. 6	208. 209	14, b	4	36	73. 74	12. 13	8—3
7	18. 7	210. 211	15		37	75. 76	14. 15	9—4
8	19. 8	212. 213	16	5	35. 38	77. 78	16—18	10—5
9	20. 9	214. 215	17		39. 41	79. 80	19. 20	11—6
1880	21. 10	216. 217	18	6	40. 42	81. 82	21—23	12—7
1	22. 11	218. 219	19			83. 84	24—26	13—8
2	23. 12	220	20	7	43. 44. 45	85. 86	27—29	14—9 15—10
3	24. 13	221		8	46. 47	87. 88	30—32	III Sér. 1. 2
4	25. 14	222	21	9	48	89. 90	33. 34	3. 4
5	26. 15	223		10	49. 50	91. 92	35—37	5. 6
6	27. 16	224	22	11	51	93. 94	38. 39	7. 8
7	28. 17	225		12	52. 53	95. 96	40. 41	9. 10
8	29. 18	226		13	54	97. 98	42. 43	IV S. 1. 2
9	30. 19	227		14	55. 56	99. 100	44. 45	V S. 1
1890	31. 20	228		15	57	101. 102	46. 47	2
1	32. 21	229		16	58	103. 104	48. 49. 50	3
2	33. 22	230		17	59	105. 106	51. 52	4
3	34. 23	231		18	60	107. 108	53. 54	5
4	35. 24	232					55. 56. 57	6
5								
6								
7								
8								
9								
1900								
Laufende Nummer	116	117	140	141	142	143	144	145

Jahres-zahlen	Kön. Sächsische Gesellsch. der Wissensch. zu Leipzig		Koningl. Akad. v. Wetenschappen, Amsterdam		Chemical News	Gazzetta Chimica Italiana	Journal of the Chemical Society	Journal für praktische Chemie Erdmann Kolbe
	Abhandlungen	Berichte üb. d. Verhandl.	Verhandelingen	Verslagen				
		1846 } ...7 } 1						
		...8 } ...9 } 2					1849 1	
1850							2	49—51
1		3		Afdeeling Natuurkunde			3	52—54
2	1	4					4	55—57
3		5		1			5	58—60
4		6		2			6	61—63
5	2	7		3			7	64—66
6		8	3	4. 5			8	67—69
7	3	9	5	6			9	70—72
8		10	4. 6	7. 8			10	73—75
9	4	11	7	9			11	76—78
1860		12		10	1. 2		12	79—81
1	5	13	9	11. 12	3. 4		13	82—84
2		14	8	13. 14	5. 6		14 II Ser.	85—87
3		15		15	7. 8		16— 1	88—90
4	6	16	10	16	9. 10		17— 2	91—93
5	7	17		17	11. 12		18— 3	94—96
6		18		II 1	13. 14		19— 4	97—99
7		19		Reeks 2	15. 16		20— 5	100—102
8	8	20	11		17. 18		21— 6	103—105
9		21		3	19. 20		22— 7	106—108
1870		22		4	21. 22		23— 8	Neue Folg. 1. 2
1	9	23	12	5	23. 24	1	24— 9	3. 4
2		24		6	25. 26	2	25—10	5. 6
3		25	13	7	27. 28	3	26—11	7. 8
4	10	26	14	8	29. 30	4	27—12	9. 10
5		27	15		31. 32	5	28—13	11. 12
6		28	16	9. 10	33. 34	6	29. 30	13. 14
7		29	17	11	35. 36	7	31. 32	15. 16
8	11	30		12. 13	37. 38	8	33. 34	17. 18
9		31	18. 19	14	39. 40	9	35. 36	19. 20
1880		32	20	15	41. 42	10	37. 38	21. 22
1		33	21	16	43. 44	11	39. 40	23. 24
2		34		17	45. 46	12	41. 42	25. 26
3	12	35	22. 23	18	47. 48	13	43. 44	27. 28
4		36		19. 20	49. 50	14	45. 46	29. 30
5		37		III 1	51. 52	15	47. 48	31. 32
6		38	24	Reeks 2	53 54	16	49. 50	33. 34
7		39		3. 4	55. 56	17	51. 52	35. 36
8	14	40		5	57. 58	18	53. 54	37. 38
9		Reg. 41		6	59. 60	19	55. 56	39. 40
1890	15	42	27. 28	7	61. 62	20	57. 58	41. 42
1	16	43		8	63. 64	21	59. 60	43. 44
2	17	44	29	9	65. 66	22	61. 62	45. 46
3	18. 19	45		10 Reg.	67. 68	23	63. 64	47. 48
4	20	46						
5								
6								
7								
8								
9								
1900								
Laufende Nummer	146		147	148	149	150	151	99

Jahreszahlen	Jahrb. d. K. K. Geolog. Reichsanstalt	Societé Géologique de France — Mémoires 4°	Societé Géologique de France — Bulletin 8°	The Geological Magazine and „the Geologist" by P. R. Jones and Henry Woodward London	„The Geologist" stets mit Magazine verbunden, aber getrennt fortlaufend nummerirt	Annales des Sciences Géologiques Hébert et A. Milne Edwards	Zeitschr. der deutschen Geologischen Gesellschaft	Smithsonian Inst. Contributions to Knowledge 1846 -- 1
1850		II Série	) 8				2	
1	1		) 9				3	2
2	2		) 10				4	3. 4
3	3		) 11				5	5
4	4		) 12				6	6
5	5						7	7
6	6	6					8	8
7	7						9	9
8	8						10	10
9	9						11	11
1860	10						12	12
1	11						13	
2	12	7					14	
3	13						15	13
4	14			1	1— 6		16	
5	15			2	7— 18		17	14
6	16			3	19— 30		18	
7	17			4	31— 42		19	15
8	18	8		5	43— 54		20	
9	19	9		6	55— 66		21	
1870	20	10	)— 29	7	67— 78	1	22	16. 17
1	21		III Série	8	79— 90	2	23	
2	22		) 1	9	91—102	3	24	
3	23	III Série	) 2	10	103—114	4	25	18
4	24		) 3	New Ser. 1 Dec. II	115—126	5	26	19
5	25		) 4	2	127—138	6	27	
6	26		) 5	3	139—150	7	28	20. 21
7	27	1	) 6	4	151—162	8. 9	29	
8	28		) 7	5	163—174		30	
9	29		) 8	6	175—186	10	31	
1880	30		)— 9	7	187—198		32	22
1	31	2	) 10	8	199—210	11. 13	33	23
2	32		) 11	9	211—222	12	34	
3	33		) 12	10	223—234	14. 15	35	
4	34	3	) 13	1 Dec. III	235—246	16	36	
5	35	4	) 14	2	247—258	17. 18	37	24. 25
6	36		) 15	3	259—270	19	38	
7	37		) 16	4	271—282		39	
8	38		) 17	5	283—294	20	40	
9	39		) 18	6	295—306	22	41	
1890	40		)— 19	7	307—318		42	26
1	41		) 20	8	319—330	21	43	
2	42		) 21	9	331—342		44	
3	43		) 22	10	343—		45	27
4	44			Dec. IV			46	
5								
6								
7								
8								
9								
1900								
Laufende Nummer	152	153		154	155	156	157	158 a

Jahreszahlen	Smithsonian Inst. Miscellaneous Collections	Smithsonian Inst. Annual Report	Proceedings of the Royal Society	Jahresb. der Chemie Liebig, Kopp, Strecker, Naumann	Berichte der Deutschen Chemischen Gesellschaft	Bulletin de la Societé Chimique	Société des Naturalistes de Moscou Mémoires	Société des Naturalistes de Moscou Bulletin
1850		5		3				23
1		6	5	4			15	24
2		7		5				25
3		8		6				26
4		9	6	7				27
5		10		8			16	28
6		11	7	9				29
7		12	8	10				30
8		13		11		1		31
9		14	9	12		2	17	32
1860		15	10	13		3	18 u. Suppl.	33
1		16		14		4		34
2	1. 2	17	11	15		5		35
3	3. 4	18	12	16		II Série		36
4	5	19	13	17		1. 2		37
5		20	14	18		3. 4		38
6		21		19		5. 6		39
7	6. 7	22	15	20		7. 8		40
8		23	16	21	1	9. 10		41
9	8. 9	24	17	22	2	11. 12		42
1870		25	18	23	3	13. 14		43
1		26	19	24	4	15. 16		44
2		27	20	25	5	17. 18		45
3	10	28	21	26	6	19. 20		46
4	11. 12	29	22	27	7	21. 22		47. 48
5		30	23	28	8	23. 24		49
6		31	24	29	9	25. 26	19	50. 51
7		32	25	30	10	27. 28		52
8	13. 14. 15	33	26. 27	31	11 Reg.	29. 30		53
9		34	28. 29	32	12	31. 32		54
1880	16—19	35	30	33	13	33. 34		55
1	20. 21	36	31. 32	34	14	35. 36		56
2	22. 23	37	33	35	15	37. 38		57
3	24—27	38	34. 35	36	16	39. 40		58
4		39	36. 37	37	17	41. 42		59
5		40	38	38	18	43. 44		60. 61
6		41	39. 40	39	19	45. 46		62
7	28. 29. 30	42	41. 42	40	20	47. 48		Nouv. Sér. 1
8	31—33	43	43. 44	41	21 Reg.	49. 50		2
9	34	44	45	42	22	III Sér. 1. 2		3
1890		45	46. 47	43	23	3. 4		4
1		46	48. 49. 50	44	24	5. 6		5
2		47	51. 52	45	25	7. 8		6
3	35. 36	48	53. 54	46	26	9. 10		7
4			55. 56		27	11. 12		8
5			57			13. 14		
6								
7								
8								
9								
1900								
Laufende Nummer	158 b	158 c	159	97	160	161	95	96

Jahres-zahlen	Receuil des travaux Chimiques des Pays-Bas	Archives Néerlandaises	Memoirs of the National Academy of Sciences Washington 4°	Arch. des Sc. phys. et naturelles Genève	Archiv f. d. Naturkunde Liv-, Est- u. Kurlands phys.	Archiv f. d. Naturkunde Liv-, Est- u. Kurlands biol.	Sitzungsberichte der Dorpater Naturforscher-Ges.	Jenaer Zeitschrift für Medicin und Naturwissenschaft	Jahresbericht für chem. Technologie Wagner-Fischer
1850				13—15	I	II			
1				16—18					
2				19—21					
3				22—24		1			
4				25—27					
5				28—30					1
6				31—33	1				2
7				34—36			1		3
8				1—3 Nouv					4
9				4—6 Sér.					5
1860				7—9	2	2. 3			6
1				10—12		4			7
2				13—15					8
3				16—18					9
4				19—21	3	6		1	10
5				22—24			2		11 Reg.
6		1		25—27				2	12
7		2		28—30		7		3	13
8		3		31—33	4				14
9		4		34—36					15
1870		5		37—39	6			5	16
1		6		40—42				6	17
2		7		43—45			3		18
3		8		46—48				7	19
4		9		49—51	5			8—1 Neue	20
5		10		52—54	7	5		9—2 Reihe	21 Reg.
6		11					4	10—3	22
7		12						11—4	23
8		13						12—5	24
9		14			8		5	13—6	25
1880		15						14—7	26
1		16							27
2	1	17	1		9	8	6	15—8	28
3	2	18	2						29
4	3	19	3			9		17—10	30 Generalreg.
5	4					10	7	18—11	31
6	5	20	4					19—12	32
7	6	21					8	20—13 21—14	33
8	7	22						22—15	34
9	8	23						23—16	35
1890	9	24					9	24—17	36
1	10	25	5					25—18	37
2	11	26						26—19	38
3	12	27	6				10	27—20	39
4	13	28						28—21	
5									
6									
7									
8									
9									
1900									
Laufende Nummer	**162**	**163**	**164**	**109**	**165**		**166**	**167**	**168**

Jahreszahlen	Zeitschrift für analytische Chemie **Fresenius**	Zeitschrift für physiologische Chemie **Hoppe-Seyler**	Zeitschrift für Biologie **Pettenkofer** u. **Voit**	Archiv für experimentelle Pathologie u. Pharmakologie **Schmiedeberg** u. **Naunyn**	Verhandl. der Russ. K. Mineral. Ges. zu St. Petersburg	**Dingler**, Polytechnisch. Journal	Polytechn. Centralblatt **Hülsse, Weinlig, Böttcher**	Annales des Mines
								IV Série
1850					7		16	17. 18
1						119—122	17	19. 20
2					8	123—126	18	1. 2 V
3						127—130	19	3. 4 Sér.
4					9	131—134	20	5. 6
5					10	135—138	21	7. 8
6						139—142	22	9. 10
7					11	143—146	23	11. 12
8						147—150	24	13. 14
9						151—154	25	15. 16
1860						155—158	26	17. 18
1						159—162	27	19. 20
2	1					163—166	28	1. 2 VI
3	2					167—170	29	3. 4 Sér.
4	3	Medicin. chem.			II. Serie	171—174	30	5. 6
5	4	Untersuch.	1		25j. Jubil.	175—178	31	7. 8
6	5	1	2		1	179—182	32	9. 10
7	6	2	3		2	183—186	33	11. 12
8	7	3	4		3	187—190	34	13. 14
9	8		5		4	191—194	35	15. 16
1870	9		6		5	195—198	36	17. 18
1	10	4	7		6	199—202	37	19. 20
2	11 Reg.		8		7	203—206	38	1. 2 VII
3	12		9	1	8	207—210	39	3. 4 Sér.
4	13	Zeitschrift	10	2	9	211—214	40	5. 6
5	14	für physiolog.	11	3. 4	10	215—218	41	7. 8
6	15	Chemie	12	5	11	219—222	Schluss	9. 10
7	16	1	13	6. 7	12	223—226		11. 12
8	17	2	14	8. 9	13	227—230		13. 14
9	18	3	15	10. 11	14	231—234		15. 16
1880	19	4	16	12	15	235—238		17. 18
1	20	5	17	13. 14	16	239—242		19. 20
2	21 Reg.	6	18	15	17	243—246		1. 2 VIII
3	22	7	19—1 Neue	16. 17	18	247—250		3. 4 Sér.
4	23	8	20—2 Folge	18	19	251—254		5. 6
5	24	9	21— 3	19	21 Reg.	255—258		7. 8
6	25	10	22— 4	20. 21	22	259—262		9. 10
7	26	11	23— 5	22. 23	23	263—266		11. 12
8	27	12	24— 6	24	24	267—270		13. 14
9	28	13	25— 7	25	25	271—274		15. 16
1890	29	14	26/27 — 8/9	26. 27	27	275—278		17. 18
1	30	15	28—10	28. 29	28	279—282		19. 20
2	31	16	29—11	30	29	283—286		1. 2 IX
3	32	17	30—12	31. 32	30	287—290		3. 4 Sér.
4	33	18		33. 34		291—293		5. 6
5								7. 8
6								
7								
8								
9								
1900								
Laufende Nummer	**169**	**170**	**171**	**172**	**101**	**88**	**104**	**13**

Jahreszahlen	Philosophical Magazine	Annales du Muséum Nat. d'histoire naturelle 4°	Annales des Sciences naturelles: Zoologie	Annales des Sciences naturelles: Botanique	Mémoires couronnés de l'Ac. R. de Belgique	Archiv f. Mineralogie, Geognosie, Bergbau und Hüttenkunde **Karsten**	**Froriep's** Notizen auf d. Gebiete der Natur- und Heilkunde	Comptes rendus de la Société biologique
			III S	érie			Tagesber.	1849—1
1850	IV Series		13. 14	13. 14	4		1— 4	2
1	1. 2		15. 16	15. 16		24	5— 8	3
2	3. 4	6	17. 18	17. 18	5			4
3	5. 6		19. 20	19. 20	6	25		5
4	7. 8	7	1. 2 IV S	érie 1. 2		26		6
5	9. 10	8	3. 4	3. 4			Froriep's Not.	7
6	11. 12		5. 6	5. 6			1— 4	8
7	13. 14	9	7. 8	7. 8			5— 8	9
8	15. 16		9. 10	9. 10	7		9—12	10
9	17. 18	10	11. 12	11. 12	8. 9		13—16	11
1860	19. 20		13. 14	13. 14	10		17—20	12
1	21. 22		15. 16	15. 16	11. 12		21—24	13
2	23. 24		17. 18	17. 18	13. 14		25. 26	14
3	25. 26	Nouv. Archives	19. 20	19. 20	15		Schluss	15
4	27. 28	du Muséum	1. 2 V S	érie 1. 2	16			16
5	29. 30	1	3. 4	3. 4	17			17
6	31. 32	2	5. 6	5. 6	18			18
7	33. 34	3	7. 8	7. 8	19			19
8	35. 36	4	9. 10	9. 10	20			20
9	37. 38	5	11. 12	11. 12				21
1870	39. 40	6	13. 14	13	21			22
1	41. 42	7						23
2	43. 44	8	15. 16	14—16	22			24
3	45. 46	9	17. 18	17. 18	23			25
4	47. 48	10	19. 20	19. 20				26
5	49. 50		1. 2 VI S	érie 1. 2	24—26			27
6	1. 2 V Ser.		3. 4	3. 4				28
7	3. 4	II Série	5. 6	5. 6	27			29
8	5. 6	1	7	7— 9	28			30
9	7. 8	2	8		29			31
1880	9. 10	3	9. 10	10. 11	30			32
1	11. 12	4	11. 12	12	31. 32			33
2	13. 14	5	13. 14	13. 14	33			34
3	15. 16	6	15. 16	15. 16	34. 35			35
4	17. 18	7	17. 18	17—19	36			36
5	19. 20	8	19. 20	20. 1. 2				37
6	21. 22	9	1 VII S	érie 3. 4	37—39			38
7	23. 24	10	2— 4	5. 6	40			39
8	25. 26	Reg. III Sér.	5. 6	7. 8	41			40
9	27. 28	1	7. 8	9. 10	42. 43			41
1890	29. 30	2	9. 10	11. 12	44			42
1	31. 32	3	11. 12	13. 14	45			43
2	33. 34	4	13. 14	15. 16	46			44
3	35. 36	5	15. 16	17. 18				45
4	37. 38		17. 18	19. 20				46
5	39. 40							
6								
7								
8								
9								
1900								
Laufende Nummer	**24**	**93**	**94 a**	**94 b**	**100**	**102**	**173**	**174**

Jahreszahlen	Nature	Journal de Chimie médicale	Annals of natural history	Journal de pharm. et de chimie	Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure	Verhandl. des naturh. Vereins f. d. Rheinlande u. Westphalen	American Chemical Journal	Chemiker-Zeitung
		III Série		III Série				
1850		6	5. 6	17. 18		7		
1		7	7. 8	19. 20		8		
2		8	9. 10	21. 22		9 Neue		
3		9	11. 12	23. 24		10 Folge		
4		10	13. 14	25. 26		11— 1		
5		1 IV	15. 16	27. 28		12— 2		
6		2 Sér.	17. 18	29. 30		13— 3		
7		3	19. 20	31. 32		14— 4		
8		4	1. 2 III	33. 34		15— 5		
9		5	3. 4 Series	35. 36		16— 6		
1860		6	5. 6	37. 38		17— 7		
1		7	7. 8	39. 40		18— 8		
2		8	9. 10	41. 42		19— 9		
3		9	11. 12	43. 44		20—10		
4		10	13. 14	45. 46	1	21—1 III.		
5		1 V	15. 16	1. 2 IV	2	22—2 Folge		
6		2 Série	17. 18	3. 4 Série	3	23— 3		
7		3	19. 20	5. 6	4	24— 4		
8	1	4	1. 2 IV	7. 8	5	25— 5		
9	2	5	3. 4 Series	9. 10	6	26— 6		
1870	3	6	5. 6	11. 12	7	27— 7		
1	4	7	7., 8	13. 14	8	28— 8		
2	5. 6	8	9. 10	15. 16	1 II	29— 9		
3	7. 8	9	11. 12	17. 18	2 Série	30—10		
4	9. 10	10	13. 14	19. 20	3	31—1 IV.		
5	11. 12	11	15. 16	21. 22	4	32—2 Folge		
6	13. 14	12	17. 18	23. 24	5	33— 3		
7	15. 16	Schluss	19. 20	25. 26	6	34— 4		1
8	17. 18		1. 2 V	27. 28	7	35— 5		2
9	19. 20		3. 4 Series	29. 30	8	36— 6	1	3
1880	21 22		5. 6	1. 2 V Sér.	9	37— 7	2	4
1	23. 24		7. 8	3. 4	10	38— 8	3	5
2	25. 26		9. 10	5. 6	11	39— 9	4	6
3	27. 28		11. 12	7. 8	12	40—10	5	7
4	29. 30		13. 14	9. 10	1 III	41—1 V	6	8
5	31. 32		15. 16	11. 12	2 Série	42—2 Folge	7	9
6	33. 34		17. 18	13. 14	3	43— 3	8	10
7	35. 36		19. 20	15. 16	4	44— 4	9	11
8	37. 38		1. 2 VI	17. 18	5	45— 5	10	12
9	39. 40		3. 4 Series	19. 20	6	46— 6	11	13
1890	41. 42		5. 6	21. 22	7	47— 7	12	14
1	43. 44		7. 8	23. 24	8	48— 8	13	15
2	45. 46		9. 10	25. 26	9	49— 9	14	16
3	47. 48		11. 12	27. 28	10	50—10	15	17
4	49. 50		13. 14	29. 30	11	51—1 VI. F.	16	18
5								
6								
7								
8								
9								
1900								
Laufende Nummer	175	106	120	121	176	122	177	178

Jahreszahlen	Pharmaceutische Zeitung für Russland	Zeitschrift des allgemein. Oesterreichischen Apothekervereins, Red. 1863—86 **Fr. Klinger,** seit 1887 **Anton Sicha,** Fortsetzung von Oesterr. Zeitschr. f. Pharmacie 1847—62	Schweizerische Wochenschrift für Pharmacie 1863—91, seit 1892 Schweizer. Wochenschr. für Chemie u. Pharmacie Zürich	Pharmaceutical Journal and Transactions	Verhandlungen der physikal. medicin. Ges. zu Würzburg	Il nuovo Cimento	**Virchow,** Archiv f. patholog. Anatomie und Physiologie	Prager Vierteljahrsschr. f. d. ges. Heilkunde
1850				9	1			25— 28
1				10			3	29— 32
2				11	2. 3		4	33— 36
3				12			5	37— 40
4				13	4		6. 7	41— 44
5				14	5		8	45— 48
6				15	6		9. 10	49— 52
7				16	7		11. 12 I.	53— 56
8				17	8		13—15 Folge	57— 60
9				18	9		16. 17	61— 64
1860				1 IISer.	10		18. 19	65— 68
1				2	11		20. 21	69— 72
2	1	II. Reihe		3	12		22—25 II.	73— 76
3	2	17— 1	1	4	13		26—28 Flg.	77— 80
4	3	18— 2	2	5	14		29—31 III.	81— 84
5	4	19— 3	3	6	15		32—34 Flg.	85— 88
6	5	20— 4	4	7	16		35—37	89— 92
7	6	21— 5	5	8	17		38—41 IVF.	93— 96
8	7	22— 6	6	9	18	II Serie	42—44 Reg.	97—100
9	8	23— 7	7	10	19	1. 2	45—48	101—104
1870	9	24— 8	8	11	20	3. 4	49—51 V.F.	105—108
1	10	25— 9	9		1 Neue	5. 6	52—53	109—112
2	11	26—10	10		2. 3 Folge	7. 8	54—56	113—116
3	12	27—11	11		4	9. 10	57. 58	117—120
4	13	28—12	12		5. 6. 7	11. 12	59—61 VI.	121—124
5	14	29—13	13		8	13. 14	62—65 F.	125—128
6	15	30—14	14		9	15. 16	66—68	129—132
7	16	31—15	15		10. 11	1. 2 III	69—71 VII.	133—136
8	17	32—16	16		12	3. 4 Serie	72—74 F.	137—140
9	18	33—17	17		13	5. 6	75—78	141—144
1880	19	34—18	18		14	7. 8	79—82 VIII.F.	1 Zeitschr. f. Heilkunde
1	20	35—19	19		15. 16	9. 10	83—86	2
2	21	36—20	20			11. 12	87—90	3
3	22	37—21	21		17	13. 14	91—94 IX.	
4	23	38—22	22		18	15. 16	95—98 F.	
5	24	39—23	23				99—102 X.F.	
6	25	40—24	24		19		103—106 Rg.	
7	26	41—25	25		20		107—110	
8	27	42—26	26		21. 22		111—114 XI.	
9	28	43—27	27		23		115—118 F.	
1890	29	44—28	28		24		119—122 XII. F.	
1	30	45—29	29		25		123—126	
2	31	46—30	30		26		127—130	
3	32	47—31	31		27		131—134 XIII.F Suppl.	
4	33	48—32	32		28		135—138	
5							139—142	
6								
7								
8								
9								
1900								
Laufende Nummer	**179**	**180**	**181**	**123**	**182**	**183**	**124**	**125**

Jahreszahlen	Ch. Robin, Journal de l'anatomie et de physiologie normale et pathologique	Casper, Vierteljahrsschr. f. gerichtl. Medicin v. Horn, Eulenburg u. Wernich	Annales d'hygiène publique et de Médecine légale	A. Hencke, Zeitschr. f. d. Staatsarzneikunde — Bände	A. Hencke — Ergänzung	Henle und Pfeufer, Zeitschrift für rationelle Medicin	H. Ziemssen und F. A. Zenker, Deutsches Archiv f. klinische Medicin Leipzig F. C. W. Vogel	Transactions of the Pathological Society of London	Hager, Pharmaceutische Centralhalle für Deutschland, Berlin Selbstverlag des Verf., seit 1880 mit Ew. Geissler, seit 1892 von Ew. Geissler und A. Schneider
1850			43. 44	59 60	39—41	Neue Folge		1	
1			45. 46	61 62	42 43	1		2	
2		1. 2	47. 48	63 64		2		3	
3		3. 4	49. 50	65 66	44	3		4	
4		5. 6	1. 2 II Série	67 68	45	4. 5		5	
5		7. 8	3. 4	69 70	46	6. 7		6	
6		9. 10	5. 6	71 72		8		7	
7		11. 12	7. 8	73 74		1 III. Reihe		8	
8		13. 14	9. 10	75	47	2— 4		9	
9		15. 16	11. 12			5— 7		10	
1860		17. 18	13. 14			8		11	1
1		19. 20	15. 16			9—12		12	2
2		21. 22	17. 18			13—15		13	3
3		23. 24	19. 20			17—20		14	4
4	1	25—1 Neue Folge	21. 22			19—22		15	5
5	2	2. 3	23. 24			23—25		16	6
6	3	4. 5	25. 26			26. 28	1	17	7
7	4	6. 7	27. 28			27. 29. 30	2. 3	18	8
8	5	8. 9	29. 30			31. 32. 33	4	19	9
9	6	10. 11	31. 32			35	5. 6	20	10
1870	} 7	12. 13	33. 34				7	21	11
1	}	14. 15	35. 36				8	22	12
2	8	16. 17	37. 38				9	23	13
3	9	18. 19	39. 40				10. 11	24	14
4	10	20. 21	41. 42				12—14	25	15
5	11	22. 23	43. 44				15. 16	26	16
6	12	24. 25	45. 46				17. 18	27	17
7	13	26. 27	47. 48				19. 20	28	18
8	14	28. 29	49. 50				21. 22	29	19
9	15	30. 31	1. 2 III Série				23. 24	30	20
1880	16	32. 33	3. 4				25—27	31	21—1 Neue Folge
1	17	34. 35	5. 6				28. 29	32	22—2
2	18	36. 37	7. 8				30. 31	33	23—3
3	19	38. 39	9. 10				32. 33	34	24—4
4	20	40. 41	11. 12				34. 35	35	25—5
5	21	42. 43	13. 14				36. 37	36	26—6
6	22	44. 45	15. 16				38. 39	37	27—7
7	23	46. 47	17. 18				40. 41	38	28—8
8	24	48. 49	19. 20				42. 43	39	29—9
9	25	50. 51	21. 22				44. 45	40	
1890	26	52. 53	23. 24				46	41	
1	27	III. F. 1.2 Suppl.	25. 26				47. 48	42	
2	28	3.4 Suppl.	27. 28				49. 50	43	
3	29	5.6 Suppl.	29. 30				51. 52		
4	30	7.8 Suppl.	31. 32				53		
5									
6									
7									
8									
9									
1900									
Laufende Nummer	184	185	126	a 127	b	128	186	187	188

Jahres-zahlen	Jahrb. d. prakt. Pharm. **Herberger** und **Winckler**	**Johnson,** Mittheilungen d. freien K. Oek. Soc. St. Petersburg	American Journ. of Pharmacy by the Philadelphia Soc.	Archiv for Pharmaci og technisk Chemi med deses Grundvidenskabis	Upsala Läkareförenings Förhandlingar redigerade af **R. F. Fristedt**	The Therapeutic Gazette by **Robert Meade Smith** Detroit and Philadelphia Lex 8°	Pharmaceutical Record, weekly market reviews a technical and business, Journal for the Drug Trade New York **P. W. Bedford** Editor folio	Apotheker-Zeitung, herausgegeben vom deutschen Apotheker-Verein, Folio, Berlin, Selbstverlag Red. J. Greiss, dazu: Repertorium d. Pharmacie, Red. **H. Beckurts** Braunschweig	
	Neue Folge								
1850	13—10	7	22						
1	14—11	8	23						
2	15—12	9	24	6					
3	16—13	10	25	7					
4	1. 2 Neues	11	26	8					
5	3. 4 Jahrb.	12	27	9					
6	5. 6	13	28	10					
7	7. 8	14	29	11					
8	9. 10	15	30	12					
9	11. 12	16	31	13					
1860	13. 14	17	32	14					
1	15. 16	18	33	15					
2	17. 18	19	34	16					
3	19. 20	20	35	17					
4	21. 22	21	36	18					
5			37	19	1				
6			38	20	2				
7			39	21	3				
8			40	22	4				
9			41	23	5				
1870			42 IV Series	24	6				
1			43— 1	25	7				
2			44— 2	26	8				
3			45— 3	27	9				
4			46— 4	28	10				
5			47— 5	29	11				
6			48— 6	30	12				
7			49— 7	31	13	1			
8			50— 8	32	14	2			
9			51— 9	33	15	3			
1880			52—10	34	16	4			
1			53—11	35	17	5		Zeitung	Repertorium
2			54—12	36	18	6			
3			55—13	37	19	7			
4			56—14	38	20	8 III Ser.			
5			57—15	39	21	9—1			
6			58—16	40	22	10—2	1. 2	1	
7			59—17	41	23	11—3	3. 4	2	
8			60—18	42	24	12—4	5. 6	3	
9			61—19	43	25	13—5	7. 8	4	
1890			62—20	44	26	14—6	9. 10	5	1
1				45	27	15—7	11. 12	6	2
2				46	28	16—8	13. 14	7	3
3				47		17—9		8	eingegangen
4								9	
5									
6									
7									
8									
9									
1900									
Laufende Nummer	**129**	**189**	**73**	**190**	**191**	**192**	**193**	**194**	

Jahreszahlen	**Max Schultze,** Archiv für mikroskopische Anatomie. Bonn Max Cohen gr. 8° seit Schultze's Tode 1874 fortgesetzt von **Lavalette St. George** in Bonn und **W. Waldeyer** in Strassburg, seit 1889 mit **O. Hertwig** in Berlin	Saint Bartholomew's Hospital, Reports edited by Dr. **Edwards** and **Callender** London Longmann Green et Co. 8°	Saint Thomas' Hospital, Reports New Series London John Churchill 8°	Saint George's Hospital, Reports London John Churchill 8°	Clinical Lectures and Reports by the medical and surgical staff of the London Hospital, London John Churchill 8°	The Practitioner, a journal of therapeutics and public health 8°	Archiv für physiologische Heilkunde **Roser** und **Wunderlich**	Zeitschr. der K. K. Ges. d. Aerzte zu Wien **Hebra** 8°
1850							9	6
1							10	7
2							11	8
3							12	9
4							13	10
5							14	11
6							15	12
7							1 Neue Folge	13
8							2	14 4°
9							3	15
1860							1 Arch d. Heilk. E. Wagner	16
1							2	17 gr. 8°
2							3	18
3							4	19
4					1		5	20
5	1	1			2		6	21
6	2	2		1	3		7	22
7	3	3		2	4		8	23
8	4	4		3	5	1	9	24
9	5	5		4	6	2. 3	10	25
1870	6	6	1	5	7	4. 5	11	26
1	7	7	2	6	8	6. 7	12	27
2	8	8	3	7	9	8. 9	13	28
3	9	9	4	8	10	10. 11	14	29
4	10	10	5	9	11	12. 13	15	30
5	11	11	6	10	12	14. 15	16	31
6	12	12	7		13	16. 17	17	32
7	13. 14	13	8		14	18. 19	18	33
8	15	14	9		15	20. 21	19	34
9	16	15	10			22. 23		35
1880	17. 18	16	11			24. 25		
1	19	17	12			26. 27		
2	20. 21	18	13			28. 29		
3	22	19	14			30. 31		
4	23. 24	20	15			32. 33		
5	25	21	16			34. 35		
6	26—28	22	17			36. 37		
7	29. 30	23	18			38. 39		
8	31. 32	24	19			40. 41		
9	33. 34	25	20			42. 43		
1890	35. 36	26				44. 45		
1	37. 38					46. 47		
2	39. 40					48. 49		
3	41. 42							
4	43. 44							
5								
6								
7								
8								
9								
1900								
Laufende Nummer	**195**	**196**	**197**	**198**	**199**	**200**	**36**	**37**

Jahres-zahlen	Dorpater medicin. Zeitschr., red von **Arthur Boettcher**, Dorpat Gläser	Lo Sperimentale, giorno critico di Medicina e Chirurgia, Firenze	Transactions of the Clinical Society of London 8° London Longmann, Green et Co.	**Georges Hayem**, Revue des sciences médicales en France et à l'Etranger. Paris. G. Masson gr. 8°	The British medical Journal being the journal of the British medical Association edited for the Association by **Ernest Hart** London 4°	Arbeiten des Kais. Gesundheits-Amts. Berlin Lex. 8° 1886—jetzt	Archiv für Anthropologie von **Lindenschmidt** und **Ranke** Braunschweig Vieweg 4°	Archiv für Dermatologie und Syphilis **Pick** Wien Braumüller
1850		4						
1		5						
2		6						
3		7						
4		8						
5		9						
6		10						
7		11			1. 2			
8		12			3. 4			
9		13			5. 6			
1860		14			7. 8			
1		15			9. 10			
2		16			11. 12			
3		17			13. 14			
4		18			15. 16			
5		19			17. 18			
6		20			19. 20		1	
7		21			21. 22		2	
8		22	1		23. 24		3	
9		23	2		25. 26			1
1870		24	3		27. 28		4	2
1	1. 2	25	4		29. 30			3
2		26	5		31. 32		5	4
3	3. 4	27	6	1. 2	33. 34		6	5
4	5	28	7	3. 4	35. 36		7	6
5	6	29	8	5. 6	37. 38		8	7
6	Schluss	30	9	7. 8	39. 40		9	8
7		31	10	9. 10	41. 42			9
8		32	11	11. 12	43. 44		10	10
9		33	12	13. 14	45. 46		11	11
1880		34	13	15. 16	47. 48		12	12
1		35	14	17. 18	49. 50		13 Suppl.	13
2		36	15	19. 20	51. 52			14
3		37	16	21. 22	53. 54		14	15
4		38	17	23. 24	55. 56		15 Suppl.	16
5		39	18	25. 26	57. 58			17
6		40	19	27. 28	59. 60	1	16	18
7		41	20	29. 30	61. 62	2. 3		19
8		42	21	31. 32	63. 64	4	17	20
9		43	22	33. 34	65. 66	5	18	21
1890		44	23	35. 36	67. 68	6	19	22
1		45	24	37. 38	69. 70	7	20	23
2			25	39. 40	71. 72		21	24
3			26	41. 42	73. 74	8		25 Gen.-
4							22	26 Reg.
5								
6								
7								
8								
9								
1900								
Laufende Nummer	**201**	**202**	**203**	**204**	**205**	**206**	**207**	**208**

Jahreszahlen	Archiv für klinische Chirurgie von **Bergmann, Billroth und Gurlt** Berlin Hirschwald	Archiv für Hygiene von **Forster, Hofmann und v. Pettenkofer** München Oldenbourg	Archiv für Psychiatrie u Nervenkrankheiten von **Meyer, Meynert, Fürstner und Siemerling** Berlin Hirschwald	Centralblatt für d. medic. Wissensch. v. **Salkowsky, Senator, Bernhardt** Berlin Hirschwald	Centralblatt für Physiologie von **Gad u. Exner** Wien Deuticke	Gräfe's Archiv für Ophthalmologie von **Leber, Sattler und Snellen** Leipzig Engelmann	Jahresb. d. ges. Medicin v. **Canstatt, Virchow, Hirsch, dann Gurlt u. Posner** Würzburg, dann Berlin	Schmidt's Jahrb. d. in- u. ausländ. ges. Medicin von **Winter, Möbius**
1850							15. 16	65— 68
1							17. 18	69— 72
2							19. 20	73— 76
3							21. 22	77—80 Rg.
4						1	23. 24	81— 84
5						2	25. 26	85— 88
6						3	27. 28	80— 92
7						4	29. 30	93— 96
8						5	31. 32	97—100
9						6	33. 34	101—104
1860	1					7	35. 36	105—108
1	2					8	37. 38	109—112
2	3						39. 40	113—116
3	4			1		9	41. 42	117—120
4	5			2		10 Reg.	43. 44	121—124
5	6			3		11	45. 46	125—128
6	7			4		12	1 Virch.,	129—132
7	8			5		13	2 Hirsch	133—136
8	9		1	6		14	3	137-140 Rg.
9	10 Reg		2	7		15	4	141—144
1870	11. 12			8		16	5	145—148
1	13		3	9		17	6	149—152
2	14			10		18	7	153—156
3	15			11		19	8	157-160 Rg.
4	16. 17		4	12		20	9	161—164
5	18		5	13		21	10	165—168
6	19		6	14		22	11	169—172
7	20. 21 Suppl.		7	15		23	12	173—176
8	22		8	16		24	13	177-180 Rg.
9	23. 24		9	17		25	14	181—184
1880	25		10	18		26	15	185—188
1	26		11 12	19			16	189—192
2	27		13	20			17	193—196
3	28. 29	1	14	21			18	197-200 Rg.
4	30 Reg.	2	15	22			19	201—204
5	31. 32	3	16	23			20	205—208
6	33. 34	4. 5	17	24			21	209—212
7	35	6. 7	18	25	1		22	213—216
8		8	19	26	2		23	217-220 Rg.
9		9	20	27	3		24 Gen.-	221—224
1890		10 Reg.	21	28	4		25 Reg.	225—228
1		11. 12	22	29	5		26	229—232
2		13—15	23. 24	30	6		27	233—236
3		16—19	25	31	7		28	237-240 Rg.
4	47	20	26	32	8			241—244
5				33				
6								
7								
8								
9								
1900								
Laufende Nummer	**209**	**210**	**211**	**212**	**213**	**214**	**38**	**39**

Jahreszahlen	Deutsche Vierteljahrsschrift für öffentliche Gesundheitspflege von Finkelnburg, Göttaheim, A. Hirsch, red. von **A. Spiess** und **M. Pistor**, Braunschweig Vieweg gr. 8°	Arbeiten des pharmak. Instituts zu Dorpat, herausg. von **R. Kobert**	Index medicus a monthly classified record of the current medical litterature compiled under the supervision of **J. Billings** and **Rob. Fletcher** Boston and Detroit	Annual of the universal medical science. A yearly report of the progress of the general sanitary sciences througout the world edited by **Charles E. Sajous** and 70 associate editors Philadelphia. Jeder Jahrg. à 5 Bände	Zeitschrift für Biologie von **W. Kühne** und **C. Voit** München Oldenbourg	Zeitschrift für Geburtshülfe und Gynäkologie von **Fasbender** u. **Schröder** Stuttgart Enke	Zeitschr. f. allg. Psychiatrie u. psychisch-gerichtl. Medicin v. **Laehr** Berlin, Reimer 1844–49 1–6	St. Petersburger medicin. Wochenschrift und Zeitschrift
1850							7	
1							8	
2							9	
3							10	
4							11	
5							12	
6							13	
7							14	
8							15	
9							16	
1860							17	a) Zeitschrift 8°
1							18	1
2							19	2. 3
3							20	4. 5
4							21	6. 7
5					1		22	8. 9
6					2		23	10. 11
7					3		24 Sppl.	12. 13
8					4		25	14. 15
9	1				5		26	16. 17
1870	2				6			1 Neue Folge
1	3				7		27	2
2	4				8		28	3
3	5				9		29	4
4	6				10		30	
5	7				11		31. 32	5
6	8				12	1		1 Wochensch.
7	9				13	2	33	2
8	10				14	3	34	3
9	11		1		15	4	35	4
1880	12		2		16	5	36	5
1	13		3		17	6	37	6
2	14		4		18	7	38 Sppl.	7
3	15		5		19—1 N.F.	8. 9	39	8
4	16		6		20— 2	10. 11	40	9
5	17		7		21— 3		41	10
6	18		8		22— 4	12	42	11
7	19		9		23— 5	13	43	12
8	20	1. 2	10	1 a. b. c. d. e	24— 6	14. 15	44	13
9	21	3	11	2	25—7 Reg.	16. 17	45	14
1890	22	4. 5	12	3	26/27 — 8/9	18. 19. 20	46	15
1	23	6	13	4	28—10	21. 22	47	16
2	24	7. 8	14	5	29—11	23. 24	48	17
3	25	9	15	6	30—12	25. 26. 27	49	18
4	26	10			31—13	28	50	19
5		11. 12						
6								
7								
8								
9								
1900								
Laufende Nummer	**215**	**216**	**217**	**218**	**219**	**220**	**221**	**222**

Jahreszahlen	Berliner klinische Wochenschrift Berlin Hirschwald 1864--67 Red. L. Posner 1868 - 80 L. Waldenburg 1881—88 C. A. Ewald 1889 — jetzt C. A. Ewald u. C. Posner Folio	Gazette médicale de Paris gr. 4° Jules Guérin	Gazette des hôpitaux civils et militaires (Lancette française)	Landw. Jahrbücher. Fortsetzung von Annal. d. Landw. Lengecke-Thiel	Journal für Landwirthschaft Henneberg Göttingen	Die landwirthschaftl. Versuchsstationen Fr. Nobbe Chemnitz u. Tharand	Journal of the Royal Agricultural Society	Centralblatt für Agrikulturchemie und rationellen Wirthschaftsbetrieb Richard Biedermann Leipzig 8°
1850		5	23	15. 16			11	
1		6	24	17. 18			12	
2		7	25	19. 20			13	
3		8	26	21.22 u. Sup.	1 u. Jahresb.		14	
4		9	27	23. 24	2 „ „		15	
5		10	28	25. 26	3 „ „		16	
6		11	29	27. 28	4 „ „		17	
7		12	30	29. 30	5 „ „		18	
8		13	31	31. 32	6 „ „		19	
9		14	32	33. 34	7 „ „	1	20	
1860		15	33	35. 36	8 u. Beilage	2	21	
1		16	34	37. 38	9 „ „	3	22	
2		17	35	39. 40	10 „ „	4	23	
3		18	36	41. 42	11 „ „	5	24	
4	1	19	37	43. 44	12 u. Suppl.	6	25	
5	2	20	38	45. 46	13 u. Beilage	7	1. 2 New Ser.	
6	3	21	39	47. 48	14 u. Suppl.	8	2	
7	4	22	40	49. 50	15 „ „	9	3	
8	5	23	41	51. 52	16 „ „	10	4	
9	6	24	42	53. 54	17	11	5	
1870	7	25	43	55. 56	18	12	6	
1	8	26	44	57. 58	19	13. 14	7	
2	9	1 IV Série	45	Landw. Jhrb. 1	20	15	8	1
3	10	2	46	2	21 Reg.	16	9	2
4	11	3	47	3 u. 1 Erg.-Bd.	22	17	10	3
5	12	4	48	4 u. 1 Erg.	23	18	11	4
6	13	5	49	5 u. 1 Erg.	24	19	12	5
7	14	6	50	6 u. 1 Erg.	25	20	13	6
8	15	7	51	7 u. 3 Erg.	26	21. 22 Reg.	14	7
9	16	1 VI Série	52	8 u. 2 Erg.	27 u. Suppl.	23	15	8
1880	17	2	53	9 u 2 Erg.	28	24. 25	16	9
1	18	3	54	10 u. 2 Erg.	29 u Suppl.	26	17	10
2	19	4	55	11 u. 3 Erg.	30 u. Suppl.	27	18	11
3	20	5	56	12 u. 3 Erg.	31	28. 29	19	12
4	21	1 VII Série	57	13 u. 2 Erg.	32	30	20	13
5	22	2	58	14 u. 3 Erg.	33	31	21	14
6	23	3	59	15 u. 3 Erg.	34	32	22	15
7	24	4	60	16 u. 3 Erg.	35	33. 34	23	16
8	25	5	61	17 u. 4 Erg.	36	35	24	17
9	26	6	62	18	37	36	25	18
1890	27	7	63	19	38	37	26	19
1	28	8	64	20	39	38	27	20
2	29		65.	21	40	39	28	21
3	30		66	22	41		29	
4	31							
5								
6								
7								
8								
9								
1900								
Laufende Nummer	223	78	79	134	224	225	133	226

Jahreszahlen	Forschungen auf dem Gebiete der Agrikulturphysik von **E. Wollny** (München) Heidelberg C. Winter	Baltische Wochenschrift für Landwirthsch., Gewerbefleiss und Handel Dorpat 4°	Livländische Jahrb. der Landwirthschaft. Dorpat	Deutsche landwirthschaftliche Presse. Berlin Parey	Leopoldina **Knoblauch** Leipzig Engelmann 4° Amtliches Organ der Kais. Leopoldinisch-Carolinischen Deutschen Akademie der Naturforscher jährlich 1 Heft à 24 №	Morphologisches Jahrbuch für Anatomie und Entwickelungsgeschichte **Gegenbaur** Leipzig Engelmann 8°	Zeitschrift für wissenschaftliche Mikroskopie und für mikroskopische Technik **Behrend** Br. Harald Bruhn	Zoologischer Anzeiger **Victor Carus** Leipzig Engelmann
1850			11					
1								
2								
3								
4			12					
5								
6								
7								
8			13					
9								
1860								
1			14					
2			15					
3		1	16					
4		2	17		Heft			
5		3	18		1			
6		4			2			
7		5			3			
8		6			4			
9		7			5			
1870		8			6			
1		9			7			
2		10			8			
3		11			9			
4		12		1	10			
5		13		2	11			
6		14		3	12	1. 2		
7		15		4	13	3		
8	1	16		5	14	4		1
9	2	17		6	15	5		2
1880	3	18		7	16	6		3
1	4	19		8	17			4
2	5	20		9	18	7		5
3	6	21		10	19	8		6
4	7	22		11	20	9	1	7
5	8	23		12	21	10	2	8
6	9	24		13	22	11	3	9
7	10	25		14	23	12	4	10
8	11	26		15	24	13. 14	5	11
9	12	27		16	25	15	6	12
1890	13	28		17	26	16	7	13 Reg. 1—10
1	14	29		18	27	17	8	14
2	15	30		19	28	18	9	15
3	16	31		20	29	19. 20	10	16 Rg. 11—16
4					30	21. 22	11 3 Hefte	17
5								
6								
7								
8								
9								
1900								
Laufende Nummer	**227**	**228**	**70**	**229**	**230**	**231**	**232**	**233**

Jahreszahlen	Zoologische Jahrbücher **Spengel** Jena, Fischer. Vom 3. Bd. ab erscheint eine Doppelreihe: die mit einfacher Zahl bezeichneten Bde. beziehen sich auf Anatomie u. Ontogenie; die mit Zahl u. Buchstabe A bezeichneten auf Systematik, Geographie u. Biologie der Thiere.	Mittheilungen aus der zoologischen Station zu Neapel. Berlin Friedländer u. Sohn	Zeitschr. f. wissenschaftl. Zoologie **Kölliker, Siebold u. Ehlers** Leipzig Engelmann	Botanische Jahrbücher von **Engler** Leipzig Engelmann	Botanischer Jahresbericht von **Just, Köhne, Geyher** Berlin Bornträger	Berichte der deutschen botanischen Gesellschaft Berlin Bornträger	Archives du Musée Teyler 4° Harlem Loosjes	Vierteljahrsschrift über die Fortschritte auf dem Gebiete der Chemie der Nahrungs- u. Genussmittel von **Hilger, Kayser, König, Sell** Berlin Springer
1850			1					
1			2					
2			3					
3			4					
4			5					
5			6					
6			7 u. 1 Suppl.					
7			8					
8			9					
9								
1860			10					
1								
2			11					
3			12. 13					
4			14					
5			15					
6			16					
7			17					
8			18 Rg. 1—15				1	
9			19				2	
1870			20					
1			21					
2			22					
3			23		1			
4			24		2		3	
5			25		3			
6			26. 27		4			
7			28. 29		5			
8			30.31 u. 1 Sppl.		6		4	
9		1	32		7			
1880			33. 34		8		5	
1		2	35	1	9		II Série	
2		3	36. 37	2. 3	10			
3		4	38. 39	4	11	1	1	
4		5	40	5	12	2	2	
5			41. 42	6	13	3		
6	1	6 }	43. 44	7	14	4		1
7	2	} 7	45	8	15	5	3	2
8	3	8 }	46. 47	9	16	6		3
9	3 A 4 A	}	48 Rg. 31—45		17	7		4
1890		} 9	49. 50		18	8	4	5
1	4 5 A	}	51. 52		19	9		6
2	5 6 A	} 10	53.54 u. 1 Sppl.		20	10		7
3	6	}	55. 56			11		8
4	7 7 A 8		57. 58			12		9
5								
6								
7								
8								
9								
1900								
Laufende Nummer	**234**	**235**	**236**	**237**	**238**	**239**	**240**	**241**

Jahreszahlen	Zeitschrift für Nahrungsmitteluntersuchung und Hygiene von **Heger** Wien Perles	Pharmac. Post von **Hellmann** und **Heger** später nur von **Heger** Wien, Perles 1868—92 Lexic. 8°, seit 1893 Folio	Archiv der Mathematik u. Physik von **J. A. Grunert** und **Hoppe**	Acta mathematica **Mittag, Leffler** Stockholm 4°	**Crelle** Journal für reine und angewandte Mathematik	Astron. Nachr. v. **Schumacher**, fortgesetzt von **A. C. Petersen, P. A. Hansen, C. A. F. Peters** Altona-Kiel	Wochenschrift f. Astronomie, Meteorologie u. Geographie von **Ed. Heis**, neue (3.) Folge von **H. Klein**	Zeitschr. f. Mathematik u. Physik von **Schlömilch, Kahl u. Cantor** Leipzig Teubner 8°
1850					39. 40	30		
1					41. 42	31—32		
2					43. 44	33—34		
3					45. 46	35—36		
4					47. 48	37—38		
5					49. 50. 51	39—41		
6			27		52 Reg. 1—50	42—44		1
7					53. 54	45—46		2
8					55	47—48	1 (II. Folge)	3
9					56	49—51	2	4
1860					57	52—53	3	5
1					58. 59	54—55	4	6
2					60	56—58	5	7
3					61. 62	59—60	6	8
4					63	61—62	7	9
5			43. 44		64	63—65	8	10
6			45. 46		65. 66	66—67	9	11
7			47		67	68—69	10	12
8		1 Lex. 8°	48		68. 69	70—72	11	13
9		2	49. 50		70	73—74	12	14
1870		3	51		71. 72	75—76	13	15
1		4	52. 53		73. 74	77	14	16
2		5	54			78—79	15	17
3		6	55		75. 76	80—82	16	18
4		7	56		77. 78	83—84	17	19
5		8	57		79. 80	85—86	18 (III. Flg.) 1	20
6		9	58. 59		81	87—88	19. 2	21
7		10	60. 61		82. 83	89—90	20. 3	22
8		11	62		84. 85	91—93	21. 4	23
9		12	63. 64		86. 87	94—95	22. 5	24
1880		13	65		88. 89	96—97	23. 6	25
1		14	66		90. 91	98—100	24. 7	26 Reg.
2		15	67. 68	1	92. 93	101—103	25. 8	27
3		16	69	2. 3	94. 95	104—106	26. 9	28
4		17	70—1 II	4. 5	96. 97	107—109	27. 10	29
5		18	2 Ser.	6. 7	98	110—112	28. 11	30
6		19	3. 4	8	99	113—115	29. 12	31
7	1	20	5	9. 10	100. 101	116—117	30. 13	32
8	2	21	6	Inhaltsv. 11	102. 103	118—119	31. 14	33
9	3	22	7	12	104. 105	120—122	32. 15	34
1890	4	23	8. 9	13	106. 107	123—125	33. 16	35
1	5	24	10	14. 15	108	126—128	34. 17	36
2	6	25	11	16	109. 110	129—130	35. 18	37
3	7	26 Folio				131—133		38
4	8	27				134—136		
5								
6								
7								
8								
9								
1900								
Laufende Nummer	**242**	**243**	**244**	**245**	**46**	**246**	**247**	**248**

Jahreszahlen	Mathematische und naturwissenschaftliche Mittheilungen aus den Sitzungsber der Akad. der Wissensch. zu Berlin. Berlin G. Reimer	Monatshefte für Chemie aus den Sitzungsber. der Ak. d. W. zu Wien	Neue Zeitschrift für Rübenzuckerindustrie von **Scheibler.** Berlin Friedländer u. Sohn	Zeitschrift des Vereins für Rübenzuckerindustrie des deutschen Reiches von **Stammer.** Berlin Friedländer u. Sohn	**Petermann** Mittheilungen aus Justus Perthes geographischer Anstalt.	Ergänzungsbände	Geographisches Jahrbuch von **E. Behm** und **Herm. Wagner** Gotha Perthes	Zeitschrift für allgemeine Erdkunde 1853—65 Forts. Z. d. Ges. f. Erdkunde. Berlin Reimer
1850								
1								
2								
3								1
4				5				2. 3
5				6	1			4. 5 n. F.
6				7	2			6 n. F. 1
7				8	3			2. 3 n. F.
8				9	4			4. 5
9				10	5			6. 7
1860				11	6	1. 2. 3		8. 9
1				12	7	4. 5. 6		10. 11
2				13	8	7—11		12. 13
3				14	9			14. 15
4				15	10	12—14		16. 17
5				16	11	15—17		18. 19
6				17	12	18—22	1	Z.d.G.f.Erd. 1
7				18	13	23—25		2
8				19	14		2	3
9				20	15	26. 27		4
1870				21	16		3	5
1				22	17	28—30		6
2				23	18	31—34	4	7
3				24	19			8
4				25	20	35—38	5	9
5				26	21	39—42		10
6				27	22	43—49	6	11
7				28	23	50. 51		12
8			1	29	24	52—56	7	13
9			2. 3	30	25	57. 58		14
1880	1	1	4. 5	31	26	59—63	8	15
1	2	2	6. 7	32	27	64—66		16
2	3	3	8. 9	33	28	67—70	9	17
3	4	4	10. 11	34	29	71—73		18
4	5	5	12. 13	35	30	74—76	10	19
5	6	6	14. 15	36	31	77—80		20
6	7	7	16. 17	37	32	81—85		21
7	8	8	18. 19	38	33	86—89	11	22
8	9	9	20. 21	39	34	90. 91	12	23
9	10	10	22. 23	40	35	92—96	13	24
1890	11	11	24. 25	41	36	97—100	14	25
1	12	12	26. 27	42	37		15	26
2	13	13	28. 29	43	38	101—104	16	27
3	14	14	30. 31	44	39	105—109	17	28
4								
5								
6								
7								
8								
9								
1900								
Laufende Nummer	**249**	**250**	**251**	**252**	**253 a**	**253 b**	**254**	**255**

Jahreszahlen	Verhandlungen d. Ges. für Erdkunde zu Berlin. Berlin Reimer	Deutsche Rundschau für Geographie und Statistik **Umlauft.** Wien Hartleben	**Ymer** Tidskrift utgifven af Svenska Sällskapet för Antropologi och Geografi Stockholm Central-Tryckeriet	Journal of the Royal Geographical Society. London Murray	Bulletin de la Societé de Géographie	**E. Widenmann u. Herm. Hauff,** Reise- und Länderbeschreibungen	Globus, Illustrirte Zeitschrift für Länder- und Völkerkunde von **Carl Andree** Braunschweig Vieweg	**Heis** Wochenschrift für Astronomie, Meteorologie und Geographie Halle
1850				20	IV Série	10 a		
1				21	1. 2			
2				22	3. 4			
3				23	5. 6	10 b 11		
4				24	7. 8	13		
5				25	9. 10			
6				26	11. 12	14		
7				27	13. 14			Neue Folge
8				28	15. 16			1
9				29	17. 18			2
1860				30	19. 20			3
1				31				4
2				32			1. 2	5
3				33			3. 4	6
4							5. 6	7
5							7. 8	8
6							9. 10	9
7							11. 12	10
8							13. 14	11
9							15. 16	12
1870							17. 18	13
1							19. 20	
2							21. 22	
3							23. 24	
4	1						25. 26	
5	2						27. 28	
6	3						29. 30	
7	4						31. 32	
8	5						33. 34	
9	6	1					35. 36	
1880	7	2					37. 38	
1	8	3	1				39. 40	
2	9	4	2				41. 42	
3	10	5	3				43. 44	
4	11	6	4				45. 46	
5	12	7	5				47. 48	
6	13	8	6				49. 50	
7	14	9	7				51. 52	
8	15	10	8				53. 54	
9	16		9				55. 56	
1890	17		10				57. 58	
1	18		11				59. 60	
2	19		12				61. 62	
3			13				63. 64	
4								
5								
6								
7								
8								
9								
1900								
Laufende Nummer	**256**	**257**	**258**	**259**	**260**	**44**	**261**	**262**

Jahreszahlen	**J. Liouville** Journal des mathématiques pures et appliquées 4°	Annalen der Sternwarte bei München **J. Lamont**	**Ph. Carl** Repertorium für Experimentalphysik, physikalische Technik und astronomische Instrumentenkunde. München	**C. Bruhns** Vierteljahrsschr. d. astronomischen Gesellschaft. Leipzig seit 1891 **A. Auwers u. A. Winnecke**	Annalen der K.K. Sternwarte in Wien. **C. v. Littrow**	Zeitschrift für Chemie von **Beilstein, Fittig** u. A.	Flora **Goebel** Regensburg, Marburg Elwert	Archiv für Naturgeschichte **Wiegmann, Troschel, Hilgendorf**
1850	15				III. Folge		Neue Reihe	16
1	16				1		34— 9	17
2	17				2		35—10	18
3	18				3		36—11	19
4	19				4		37—12	20
5	20				5		38—13	21
6	II Série 1				6		39—14	22
7	2				7		40—15	23
8	3				8	1	41—16	24
9	4				9	2	42—17	25
1860	5				10	3	43—18	26
1	6				11	4	44—19	27
2	7				12	5	45—20	28
3	8				13	6 Neue	46—21	29
4	9	28—13			14	7 Folge	47—22	30
5	10	29—14	1		15	8—1	48—23	31
6	11	30—15	2	1		9—2	49—24	32
7	12	31—16	3	2		10—3	50—25	33
8	13	32—17	4	3		11—4	51—26	34
9	14		5	4		12—5	52—27	35
1870	15		6	5		13—6	53—28	36
1	16	33—18	7	6		14—7		37
2	17	34—19						38
3	18							39
4	19	35—20						40
5	1 III Série							41
6	2	36—21						42
7	3							43
8	4							44
9	5							45
1880	6							46
1	7							47
2	8							48
3	9							49
4	10							50
5	Reg. 1 IV Série							51
6	2							52
7	3							53
8	4							54
9	5							55
1890	6							56
1	7							57
2	8							58
3								59
4								
5								
6								
7								
8								
9								
1900								
Laufende Nummer	**263**	**264**	**265**	**266**	**267**	**268**	**269**	**48**

Jahres-zahlen	Erman's Archiv für wissenschaftl. Kunde von Russland	Das Inland Dorpat	Journal of anatomy and physiology G.M. Humphry, W. Turner, J. W. Clark, Alfr. Newton, E. P. Wright London 8° 1867—86 Macmillan & Co. 1887 — jetzt Williams and Norgate	Gazette médicale de Strasbourg Eissen	Münchener medicin. Wochenschrift Red. B. Spatz München Finsterlin, dann J. F. Lehmann Folio	Union médicale red. par A. Latour Imp. 8°	Zeitschrift für Hygiene Koch und C. Flügge Leipzig Veit gr. 8°	Medicinische Zeitung Russlands Heine, Krebel und Thielmann in 4°
1850	9	15		10		4		7
1	10 Reg.	16		11		5		8
2	11	17		12		6		9
3	12	18		13		7		10
4	13	19		14	1	8		11
5	14	20		15	2	9		12
6	15	21		16	3	10		13
7	16	22		17	4	11		14
8	17	23		18	5	12		15
9	18. 19	24		19	6	Nouv. 1—4		16
1860	20 Reg.	25		20	7	Sér. 5—8		17
1		26		21	8	9—12		1 Forts. St. Petersb. medicin. Zeitschrift
2	21	27		22	9	13—16		2. 3
3	22	28		23	10	17—20		4. 5
4	23	Schluss		24	11	21—24		6. 7
5	24			25	12	25—28		8. 9
6				26	13	29—32		10. 11
7	25 Reg.		1	27	14	III Série 1—4		12. 13
8			2	28	15	5. 6		14. 15
9			3	29	16	7. 8		16. 17
1870			4		17	9. 10		N. F. 1
1			5		18	11. 12		2
2			6		19	13. 14		
3			7		20	15. 16		3
4			8		21	17. 18		4
5			9		22	19. 20		5 Forts. St. Petersb. med. Wochenschrift 4°
6			10		23	21. 22		1
7			11		24	23. 24		2
8			12		25	25. 26		3
9			13		26	27. 28		4
1880			14		27	29. 30		5
1			15		28			6
2			16		29			7
3			17		30			8
4			18		31			9—1 N. F.
5			19		32			10— 2
6			20		33		1	11— 3
7			21—1 New Ser.		34		2	12— 4
8			22—2		35		3. 4	13— 5
9			23—3		36		5. 6. 7	14— 6
1890			24—4		37		8. 9	15— 7
1			25—5		38		10	16— 8
2			26—6		39			17— 9
3			27—7		40			18—10
4								19—11
5								
6								
7								
8								
9								
1900								
Laufende Nummer	50	51	270	52	271	272	273	130

Jahres-zahlen	Ausland Cotta	Medical Times and Gazette London Jaudet Churchill	Dublin quarterly journal of medical science	Annuaire de l'Académie Royale des sciences des lettres et des beaux arts de Belgique	Annuaire de l'univ. catholique de Louvain 8°	Annual Report of the Board of Regents Smithson	Revue médico-photographique des hôpitaux de Paris **A. de Montméja** et **Bourneville** Paris Adrien Delahaye	Jahresbericht über die Fortschritte d. Pharmakognosie, Pharmacie u. Toxikologie. Fortsetzung des Ende 1865 abgeschlossenen Canstatt-schen Jahresberichtes Göttingen Vandenhoeck & Ruprecht **Wiggers** und **Th. Husemann** 1874—78 **Dragendorff** 1879—80 **Wulfsberg** 1881—jetzt **H. Beckurts**
1850	23		9. 10		14	5		
1	24		11. 12	17	15	6		
2	25		13. 14	18	16	7		
3	26		15. 16	19	17	8		
4	27		17. 18	20	18	9		
5	28		19. 20	21	19	10		
6	29		21. 22	22	20	11		
7	30		23. 24	23	21	12		
8	31		25. 26	24	22	13		
9	32		27. 28	25	23	14		
1860	33		29. 30	26	24	15		
1	34		31. 32	27	25	16		
2	35		33. 34	28	26	17		
3	36		35. 36	29	27	18		
4	37		37. 38	30	28	19		
5	38		39. 40	31	29	20		
6	39		41. 42	32	30	21		1
7	40		43. 44	33	31	22		2
8	41		45. 46	34	32	23		3
9	42		47. 48	35	33	24	1	4
1870	43		49. 50	36	34	25	2	5
1	44		51. 52	37	35	26	3	6
2	45		53. 54	38	36	27	4	7
3	46	1. 2	55. 56	39	37	28	5	8
4	47	3. 4	57. 58	40	38	29	6	9
5	48	5. 6	59. 60	41	39	30	7	10
6	49	7. 8	61. 62	42	40	31	8	11
7	50	9. 10	63. 64	43	41	32		12
8	51	11. 12	65. 66	44	42	33		13
9	52	13. 14	67. 68	45	43	34		14
1880	53	15. 16	69. 70	46	44	35		15
1	54	17. 18		47	45	36		16
2	55	19. 20		48	46	37		17
3	56			49	47	38		18
4	57			50	48	39		19
5	58			51	49	40		20
6	59			52	50	41		21
7	60			53	51	42		22
8	61			54	52	43		23
9	62			55	53	44		24
1890	63			56	54	45		25
1	64			57	55	46		26
2	65			58	56	47		27
3	66			59	57	48		
4	67							
5	68							
6								
7								
8								
0								
1900								
Laufende Nummer	**45**	**274**	**55**	**57**	**58**	**59**	**275**	**276**

Jahreszahlen	Journal der Russischen Physiko-Chemischen Gesellschaft Журналъ физико-химическаго Общества Ст.-Петерб. gr. 8°	Revue internationale scientifique et populaire des falsifications Amsterdam gr. 4° Red. P.F. van Hamel	Kenngott Uebersicht der Resultate mineralog. Forschungen Wien 1844/49-- 1	Richard Maly Jahresber. über die Fortschritte der Thierchemie oder der Physiologischen und Pathologischen Chemie, Wien 1871—72, Wiesbaden 1873 — jetzt. Red. erst von Maly, dann v. R. Andreasch, jetzt von M. v. Nenckl und R. Andreasch	Kriegsmedicin. Journal Военно-медицинскій журналъ	Wiener med. Wochenschrift Folio Red. L. Wittelshöfer und H. Adler	Berg-Journal Горный журналъ Jahrgang	Berg-Journal Tafeln und Karten	Journal der Manufactur und des Handels Журналъ мануфактуръ и торговли
1850			2		55. 56		26	56	101—104
1					57. 58	1	27	36	105—108
2			3		59. 60	2	28	35	109—112
3			4		61. 62	3	29		113—116
4			5		63. 64	4	30		117—120
5			6		65. 66	5	31		121—124
6			7		67. 68	6	32	33	125—128
7					69. 70	7	33		129—132
8			8		71—73	8	34	36	133—136
9			9		74—76	9	35	34	137—140
1860			10		77—79	10	36	42	141--144
1			11		80— 82	11	37	60	
2			12		83— 85	12	38		
3					86— 88	13	39		
4					89— 91	14	40		
5					92— 94	15	41	35	
6					95— 97	16	42	33	
7					98—100	17	43	23	
8					101—103	18	44		
9	1 a. b				104—106	19	45	18	
1870	2 . .				107—109	20	46	20	
1	3 . .			1	110—112	21	47	33	
2	4 . .			2	113—115	22	48	22	
3	5 . .			3	116—118	23	49 Imp.8°	28	
4	6 . .			4	119—121	24	50	19	
5	7 . .			5	122—124	25	51	43	
6	8 . .			6	125—127	26	52	37	
7	9 . .			7	128—130	27	53	40	
8	10 . .			8	131—133	28	54	32	
9	11 . .			9	134—136	29	55	32	
1880	12 . .			10 Reg.	137—139	30	55	37	
1	13 . .			11	140—142	31	56	44	
2	14 . .			12	143—145	32	57	28	
3	15 . .			13	146—148	33	58	34	
4	16 . .			14	149—151	34	59	38	
5	17 . .			15	152—154	35	60		
6	18 . .			16	155—157	36	61		
7	19 . .			17	158—160	37	62		
8	20 . .	1		18	161—163	38	63	70	
9	21 . .	2		19	164—166	39	64	45	
1890	22 . .	3		20 Reg.	167—169	40	65	63	
1	23 . .	4		21	170—172	41	66	71	
2	24 . .	5		22	173—175	42	67		
3	25 . .	6		23	176—178	43	68		
4					179—181				
5									
6									
7									
8									
9									
1900									
Laufende Nummer	277	278	279	280	72	281	282	283	62

Jahres-zahlen	Verhandl. der Russisch. technischen Gesellschaft Записки Русск. Техническаго Общества и Сводъ Привилегій выдаемыхъ по Департементу Торговли и Мануфактуръ С.-Петерб. 8°	Verhandl. der Kiewschen Abtheilung der K. Russ. techn. Ges. für Rüben-Zucker-Industrie Записки Кіевскаго Отдѣленія И. Р. Техн. Общ. по свекло-сахарной Промышленности Кіевъ	Bakuer Naphta-Industrie Бакинскія Извѣстія органъ Русской нефтяной промышленности Баку	Travaux et Mémoires du Bureau international des poids et mesures publiés sous l'autorité du Comité international par le directeur du bureau Paris Gauthier-Villars	Annual Report of the Registrar-General of Births, Deaths and Marriages England	Annual Report of the Registrar-General of Births, Deaths and Marriages Scotland Edinburgh	Scotland on Vaccination	Ireland Dublin
1850					13			
1					14			
2					15			
3					16			
4					17			
5					18	1	1	
6					19	2	2	
7					20	3	3	
8					21	4	4	
9					22	5	5	
1860					23	6	6	
1					24	7	7	
2					25	8	8	
3					26	9	9	
4					27	10	10	1
5					28	11	11	2
6					29	12	12	3
7	1				30	13	13	4
8	2				31	14	14	5
9	3				32	15	15	6
1870	4				33	16	16	7
1	5	1			34	17	17	8
2	6	2			35	18	18	9
3	7	3			36	19	19	10
4	8	4			37	20	20	11
5	9	5			38	21	21	12
6	10	6	1		39	22	22	13
7	11	7	2		40	23	23	14
8	12	8	3		41	24	24	15
9	13	9	4		42	25	25	16
1880	14	10	5		43	26	26	17
1	15	11	6	1	44	27	27	18
2	16	12	7		45	28	28	19
3	17	13	8	2	46	29	29	20
4	18	14	9	3	47	30	30	21
5	19	15	10	4	48	31	31	22
6	20	16	11	5	49	32	32	23
7	21	17	12		50	33	33	24
8	22	18	13	6	51	34	34	25
9	23	19	14		52	35	35	26
1890	24	20	15	7	53	36	36	27
1	25	21			54	37	37	28
2	26	22			55	38	38	29
3	27	23			56	39	39	30
4								
5								
6								
7								
8								
9								
1900								
Laufende Nummer	284	285	286	287	63	288	289	290

Jahreszahlen	Tijdschrift voor Nederlandsch Indië uitgegeven door **W. R. van Hoëvell**	Journal of the Asiatic Society of Bengal Calcutta	Preussische Statistik herausgegeben in zwanglosen Heften vom Kön. statistischen Bureau in Berlin gr. 4° Meteorologie von **H. W. Dove**	Zeitschrift des Königl. Sächsischen statistischen Bureaus Dresden 4° Druck von B. G. Teubner	Zeitschrift des Königl. Bayerischen statistischen Bureaus München gr. 4° redigirt von dessen Vorstand **Dr. Georg Mayr**	Beiträge zur Statistik d. Kön. Bayern F. B. W. von Hermann München Folio	Zeitschrift des Kön. Preussischen statist. Bureaus 1861–81 **Ernst Engel** seit 1882 **E. Blenck**	Statistical Abstract for the United Kingdom in each of the last fifteen years	№
1850	12	19				1			
1	13	20							
2	14	21							
3	15	22				2		1839—53	1
4	16	23				3		40—54	2
5	17	24		1		4. 5. 6		41—55	3
6	18	25		2				42—56	4
7	19	26		3		7		43—57	5
8	20	27		4				44—58	6
9	21	28		5		8		45—59	7
1860	22	29		6				46—60	8
1		30	1	7			1	47—61	9
2		31	2	8			2	48—62	10
3		32	3. 4	9			3	49—63	11
4		33	5. 6. 7	10			4	50—64	12
5		34	8	11			5	51—65	13
6		35		12			6 Er-	52—66	14
7		36	10. 11. 12	13			7 gänz.-heft	53—67	15
8		37	13. 14. 15	14		19	8	54—68	16
9		38	16a 20	15	1		9—2	55—69	17
1870		39	17. 22. 23	16	2		10	56—70	18
1		40	16b. 18. 19. 21. 24	17	3		11—3	57—71	19
2		41	25	18	4		12	58—72	20
3		42	27	19	5		13	59—73	21
4		43	26. 28. 29. 32. 33	20	6		14—4	60—74	22
5		44	30. 34. 35	21	7		15	61—75	23
6		45	31. 36. 37. 38. 42	22	8		16	62—76	24
7		46	39. 43. 44	23	9		17	63—77	25
8		47	40. 45. 46. 47	24	10		18	64—78	26
9		48	48. 49. 50. 52	25	11		19	65—79	27
1880		49	51. 53. 54. 55. 57	26	12		20	66—80	28
1		50	56. 58. 60. 62	27	13		21	67—81	29
2		51	54. 61. 63. 64. 67	28	14		22—9	68—82	30
3		52	65. 66. 68. 69. 71. 72. 73	29	15		23	69—83	31
4		53	74. 75 76. 77. 78. 79. 80. 81. 82	30	16		24	70—84	32
5		54	76. 80. 83a. 85. 86	31	17		25	71—85	33
6		55	83b. 84. 88. 89	32	18		26	72—86	34
7		56	70. 87. 91. 92. 93	33	19		27	73—87	35
8		57	94. 95. 96. 97	34	20		28	74—88	36
9	1	58	90. 98. 99. 101. 103. 105	35	21		29	75—89	37
1890	2	59	100. 102. 107. 108. 109. 110. 113	36	22		30	76—80	38
1		60	111. 114. 115	37	23		31	77—91	39
2		61	106. 112. 116. 117. 118. 119. 120	38	24		32	78—92	40
3		62	121 b. 123. 126. 120 a 121 a	39	25		33		
4									
5									
6									
7									
8									
9									
1900									
Laufende Nummer	**64**	**65**	**290**	**291**	**292**	**293**	**294**	**295**	

Jahreszahlen	Statistical Abstract for several Colonial and other possessions of the United Kingdom in each year	Zeitschrift der Kais. Russ. Geogr. Gesellschaft — Записки Русскаго Географическаго Общества						
		Записки 1846—1 1847—2 1849—3	Извѣстія, подъ редакціею Барона Ф. Р. Остенъ-Сакена	Вѣстникъ	Ostsibirische Abtheilung Извѣстія Восточно-Сибирскаго Отдѣла Имп. Русск. Географическаго Общества 8° T. 11—14 4°	Отдѣленія географіи физической и математической Abtheilung für physische und mathematische Geographie	По отдѣленію статистики Abtheilung für Statistik	Кавказскаго отдѣла Kaukasische Abtheilung
1850		4						
1		5		1. 2. 3				
2		6		4. 5. 6				1
3				7. 8. 9				2
4				10. 11. 12				
5		10		13. 14. 15				3
6		11		16. 17. 18				
7		12		19. 20. 21				
8				22. 23. 24				
9		13		25. 26. 27				
1860				28. 29. 30				
1	№	1 Neue						
2		2 Reihe						5
3	1	3						
4	2	4						6
5	3		1					
6	4		2				1	
7	5		3			1		
8	6		4					
9	7		5		8°	2		
1870	8		6		1			
1	9		7		2	4	2	
2	10		8		3			
3	11		9		4	3	3	
4	12		10		5		4	
5	13		11		6	5. 6		
6	14		12		7	7		
7	15		13		8			
8	16		14		9		5	
9	17		15		10	8		
1880	18		16		11 4°			
1	19		17		12	9		
2	20		18		13	12		
3	21		19		14	10		
4	22		20		15 8°			
5	23		21		16	14		
6	24		22		17			
7	25		23		18	16		
8	26		24		19	11.15.17.19		
9	27		25		20		6	
1890	28		26		21			
1	29		27					
2	30		28					
3								
4								
5								
6								
7								
8								
9								
1900								
Laufende Nummer	**296**	**297**	**298**	**299**	**300**	**301**	**302**	**303**

Jahreszahlen	Zeitschr. der Russ. geogr. Gesellschaft Записки Русскаго Географическаго Общества Западно-Сибирскаго отдѣла Омскъ Типографія окружнаго Штаба	Zeitschr. der Russ. geogr. Gesellschaft Записки Русскаго Географическаго Общества По отдѣленію Географіи С.-Петербургъ.	Journal de l'école polytechnique Paris 4° Cahier	Jaarboek van de Koninglijke Akademie van Wetenschappen gevestigd te Amsterdam C. G. van de Post 8°	Journal Asiatique Paris 8°	American Journal of Mathematics pure and applied **J. J. Sylvester and William E. Story** Baltimore gr. 4° Johns Hopkins University	The quarterly Journal of pure and applied Mathematics edited by **J. J. Sylvester, N. M. Ferrers, G. G. Stokes, A. Cayley, J. W. F. Glaisher** (Cambridge), seit 1885 **A. R. Farsyth** London Longmans 8°	Centralblatt für klinische Medicin (vom dritten Jahrgang ab Organ des Congresses für innere Medicin) Leipzig Breitkopf & Härtel 8° redigirt von **L. Brieger, P. Ehrlich, D. Finkler, A. Fränkel,** seit 1894 Centralblatt für innere Medicin, redig. von **H. Unverricht**
1850					15. 16			
1					17. 18			
2					19. 20			
3					1. 2 V Série			
4					3. 4			
5					5. 6			
6					7. 8			
7				1	9. 10			
8			37	2	11. 12			
9				3	13. 14			
1860				4	15. 16			
1				5	17. 18			
2				6	19. 20			
3				7	1. 2 VI Série			
4				8	3. 4			
5				9	5. 6			
6				10	7. 8			
7		1		11	9. 10			
8				12	11. 12			
9		2		13	13. 14			
1870				14	15. 16			
1		4		15	17. 18			
2				16	19. 20			
3		3. 5		17	1. 2 VII Série			
4				18	3. 4			
5				19	5. 6			
6		7		20	7. 8			
7		7		21	9. 10		14	
8		8		22	11. 12	1	15	
9	1			23	13. 14	2	16	
1880	2	6		24	15. 16	3		1
1	3			25	17. 18	4	17	2
2	4	9. 10		26	19. 20	5	18	3
3	5	11		27	1. 2 VIII Série		19	4
4	6	12		28	3. 4	6		5
5	7	13. 14		29	5. 6	7	20	6
6			56	30	7. 8	8	21	7
7		16	57	31	9. 10	9	22	8
8			58	32	11. 12	10		9
9		19	59	33	13. 14	11	23	10
1890			60	34	15. 16	12	24	11
1			61	35	17. 18	13	25	12
2			62	36	19. 20	14		13
3			63	37	1. 2 IX Série			14
4								
5								
6								
7								
8								
9								
1900								
Laufende Nummer	**304**	**305**	**66**	**306**	**67**	**307**	**308**	**309**

Jahreszahlen	Annali di Matematica pura ed applicata **F. Brioschi** e **L. Cremona** Milano 4°	Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques, redigé par Mr. **G. Darboux, J. Houël** et **J. Tannery**	Mélanges mathém. et astron. du Bull. de l'Ac. d. Sc. de St. Pétersbourg	Schriften des kriegs-topogr. Depôt Записки военно-топографич. Депо С.-Петерб. gr. 4°	Kaukasische Landwirthschaftl. Gesellschaft Труды Кавказскаго Общества Сельскаго Хозяйства Тифлисъ 8° Записки	Сборникъ Выпускъ (Heft)	Nachrichten der landw. u. Forst-Akademie Petrowsk Извѣстія Петровской Земледѣльческой и Лѣсной Академіи Москва Типогр. М. Н. Лаврова и Ко. Imp. 8°	Prager medicinische Wochenschrift Folio Red. **G. Ritter, E. Klebs, F. Ganghöfer,** seit 1880 **F. Ganghöfer** u. **O. Kahler** 1876—80 Verlag von H. Dominicus, 1881—jetzt F. Tempsky Prag
1850								
1				13				
2			1	14				
3				15				
4				16				
5				17	1			
6				18	2			
7			2	19	3			
8				20	4			
9					5			
1860				21	6			
1				22	7			
2				23	8			
3			3	24	9			
4				25	10			
5				26	11			
6		1		27	12			
7		2		28	13			
8		3		29	14			
9	2	4		30	15			
1870	3	5	4	31	16			
1	4	6		32	17			
2	5	7			18			
3		8		33	19			
4	6	9			20			
5		10		34	21			
6	7	11			22		Heft	1
7	8	1 II Série	5	35	23		Выпускъ	2
8		2		36	24	1	1	3
9	9	3			25	2	2	4
1880		4		37	26	3	3	5
1	10	5			27		4	6
2	11	6			28	4	5	7
3	12	7		38	29	5. 6	6	8
4		8		39	Труды		7	
5	13	9	6	40	30		8	
6	14	10		41	31		9	
7	15	11			32		10	
8	16	12		42. 43	33		11	
9	17	13		44. 45	34		12	
1890	18	14			35		13	
1	19	15		46. 47	36		14	
2	20	16		48			15	
3		17		49. 50			16	
4								
5								
6								
7								
8								
9								
1900								
Laufende Nummer	**310**	**311**	**312**	**75**	**313**	**314**	**315**	**316**

Jahreszahlen	„Arzt" Врачъ подъ редакціей профессора В. А. Манассеина С.-Петербургъ Folio	Revue des deux Mondes Paris 8°	Annuaire des deux Mondes histoire générale des divers états Paris 8°	The Lancet by J. G. Wakley London Imp. 8°	Historische Studien aus dem pharmakologischen Institut der Univ. Dorpat, herausgegeben von Prof. Dr. Rud. Kobert Halle Tausch und Grosse gr. 8°	Wiadomos'ci Farmaceutyczni. Organ Towárzystwa Farmaceutycznego Warszawskiego dwutygognik pos'wiecony n'aukom farmaceutycznym i sprawom zawodu. Warszawa. Druk S. Orgelbranda synow gr. 8°	Nachrichten der Kais. Gesellsch. der Freunde der Naturwiss., Anthropologie und Ethnographie Извѣстія Имп. Общ. любителей Естествознанія Антропологіи и Этнографіи Москва gr. 4°	Arbeiten des geolog. Comité Труды Геологическаго Комитета С.-Петерб. 4°
1850		37—40	1	55. 56				
1		41—44	2	57. 58				
2		45—48	3	59. 60				
3		1—4 II Sér.	4	61. 62				
4		5—8 Nouv.	5	63. 64				
5		9—12 période	6	65. 66				
6		1—6 Seconde	7	67. 68				
7		7—12 période	8	69. 70				
8		13—18	9	71. 72				
9		19—24	10	73. 74				
1860		25—30		75. 76				
1		31—36	11	77. 78				
2		37—42	12	79. 80				
3		43—48		81. 82				
4		49—54	13	83. 84				
5		55—60		85. 86			2	
6		61—66	14	87. 88			1. 3_a	
7		67—72		89. 90			4	
8		73—78		91. 92				
9		79—84		93. 94			7	
1870		85—90		95. 96			5. 6_c. 8_a	
1		91—96		97. 98			9	
2		97—102		99. 100			10	
3		103—108		101. 102			12	
4		1—6 Troisième		103. 104		1	11.13.14.15	
5		7—12 période		105. 106		2	16. 19	
6		13—18		107. 108		3	18. 20. 21. 22. 23. 25	
7		19—24		109. 110		4	24.26.28.29.30	
8		25—30		111. 112		5	29.30.31.33	
9		31—36		113. 114		6		
1880	1	37—42		115. 116		7	37. 40	
1	2	43—48		117. 118		8	37. 41. 42	
2	3	49—54		119. 120		9	32. 34. 35	
3	4	55—60		121. 122		10	36. 43. 44	1
4	5	61—66		123. 124		11	45	
5	6	67—72		125. 126		12		2. 3
6	7	73—78		127. 128		13	46.47.48.49.50	
7	8	79—84		129. 130		14	50	
8	9	85—90		131. 132		15		5. 6
9	10	91—96		133. 134	1	16	58. 59. 63	
1890	11	97—102		135. 136	2	17	59. 65. 66. 62 64. 68	
1	12	103—108		137. 138		18		
2	13	109—114		139. 140	3	19		
3	14	115—120		141. 142				
4	15	121—126		143. 144	4			
5								
6								
7								
8								
9								
1900								
Laufende Nummer	317	76	318	77	319	320	321	322

Jahreszahlen	Repertoire de Chimie pure. Compte rendu des progrès de la chim. pure et appliquée en France et à l'Étranger par M. Adolph Wurtz Paris 8°	Jahresb. der schles. Ges. f. vaterl. Cultur. Breslau 1851 — 8°	Oefversigt af Finska Vetenskaps-Societatens Förhandlingar 4°	Records of the Geological Survey of India. Indian Government Publication	Memoirs of the Geological Survey of India. Indian Government Publication	Account of the Operations of the Great Trigonometrical Survey of India. Indian Government Publication	Synopses of the Results of the Great Trigonometrical Survey of India. Indian Government Publication	Ymer Tidskrift utgifven af Svenska Sällskapet för Antropologi och Geografi. Stockholm Central-Tryckerit 8°
1850		28						
1		29						
2		30	1					
3		31						
4		32	2					
5		33						
6		34	3					
7		35	4					
8	1	36	8°		1			
9		37						
1860	2	38	5		2			
1	3	39						
2	4	40						
3	5	41						
4	6	42	6		3			
5	7	43	7		4			
6		44	8		5			
7		45	9	1				
8		46	10	2	6			
9		47	11	3				
1870		48	12	4		1		
1		49	13	5	7			
2		50	14	6	8. 9			
3		51	15	7		3		
4		52	16	8	10		1. 2. 3	
5		53	17	9			4. 5. 6	
6		54	18	10	11	4		
7		55	19	11	12. 13			
8		56	20	12	14		8. 9	
9		57	21	13	15	2. 5	7	
1880		58	22	14	16. 17	6	10.11.12.13	
1		59	23	15	18			1
2		60	24	16	19	7. 8		2
3		61	25	17	20. 22	9.10.11.12.13	14. 15. 16. 17. 18 19. 20. 21	3
4		62	26	18				4
5		63	27	19	21		13 a	5
6		64	28	20		4 a		6
7		65	29	21				7
8		66	30	22				8
9		67	31	23	24			9
1890		68	32	24				10
1		69	33	25				11
2		70	34	26				12
3			35	27				13
4								
5								
6								
7								
8								
9								
1900								
Laufende Nummer	323	135	324	325	326	327	328	329

Jahres-zahlen	Landw. Journ. d. Mosk. Ges. Землед́ѣльч. журналъ изд. Московскаго Общ. Сельск. хозяйства	Archives des Sciences biologique, publiée par l'Institut Impériale de Médecine expérimentale à St. Petersbourg gr. 4° links Russ., rechts Franz.	Nouvelles Annales de Mathématique **Gerono et Terquem** 8°	Archivio per la Zoologia, l'Anatomia e la Fisiologia, publicata per cura di **G. Canestrini, G. Doria, P. M. Ferrari e M. Lessona** Genova, Modena, Bologna 8°	Centralblatt für die medicinischen Wissenschaften, red. von **J. Rosenthal, H. Senator, Salkowski, Bernhardt** Berlin Hirschwald 8°	Fortschritte der Medicin, begründet von **Carl Friedländer** (Berlin) dann **Weigert,** dann **H. Unverricht,** dann **Curschmann** und **C. J. Ewerth** Berlin N. W. Fischer's med. Buchhandlung H. Kornfeld gr. 8°	Annali di chimica medico-farmaceutica e di farmacologia **P. Albertoni e J. Guareschi**	Therapeutische Monatshefte **Liebreich, Langgaard, Rabow** Berlin Springer 8°
1850	IV десятилѣтіе		9				10. 11	
1			10				12. 13	
2	1		11				14. 15	
3	2		12				16. 17	
4	3		13				18. 19	
5	4		14				20. 21	
6	5		15				22. 23	
7	6		16				24. 25	
8			17				26. 27	
9			18				28. 29	
1860			19				30. 31	
1			20	1			32. 33	
2			1 II Sér.	2			34. 35	
3			2		1		36. 37	
4			3	3	2		38. 39	
5			4		3		40. 41	
6			5	4	4		42. 43	
7			6		5		44. 45	
8			7		6		46. 47	
9			8		7		48. 49	
1870			9		8		50. 51	
1			10		9		52. 53	
2			11		10		54. 55	
3			12		11		56. 57	
4			13		12		58. 59	
5			14		13		60. 61	
6			15		14		62. 63	
7			16		15		64. 65	
8			17		16		66. 67	
9			18		17		68. 69	
1880			19		18		70. 71	
1			20		19		72. 73	
2			1 III Sér.		20		74. 75	
3			2		21	1	76. 77	
4			3		22	2	78. 79	
5			4		23	3	1. 2 Ser. IV	
6			5		24	4	3. 4	
7			6		25	5	5. 6	1
8			7		26	6	7. 8	2
9			8		27	7	9. 10	3
1890			9		28	8	11. 12	4
1			10		29	9	13. 14	5
2		1	11		30	10	15. 16	6
3		2	12		31	11	17. 18	7
4		3						
5								
6								
7								
8								
9								
1900								
Laufende Nummer	**330**	**331**	**137**	**332**	**333**	**334**	**138**	**335**

Jahreszahlen	Hygienische Rundschau von **Carl Fränkel** und **Erwin v. Esmarch** Berlin Hirschwald gr. 8°	Archiv für Ophthalmologie **F. Arlt, F. C. Donders, A. v. Graefe** Berlin, Peters 8° von Bd. 33 ab W. Engelmann Leipzig	Deutsches Archiv für Geschichte der Medicin und medicinische Geographie **H. u. G. Rohlfs** Leipzig 8°	Archives de Biologie. **E. van Beneden et Ch. van Bambeke** Gand 8°	Les nouveaux remèdes **G. Bardet et A. Delpech** Paris O. Dain Journal bimensuel de Pharmacologie, de Thérapeutique, de Chimie médicale et d'Hydrologie	The medical age, a semi-monthly Journal of medicine and surgery edited by **B. W. Palmer** Detroit (Michigan) S. Davis publisher 8°	Medicinische Bibliographie und Anzeiger zum Centralblatt f. d. gesammte Medicin Leipzig 8° Breitkopf und Härtel	The Apothecary published quarterly by the School of Pharmacy of N. W. University Chicago 8° Oscar Oldberg editor
1850								
1								
2								
3								
4								
5		1						
6		2						
7		3						
8		4						
9		5						
1860		6						
1		7						
2		8						
3		9						
4		10						
5		11						
6		12						
7		13						
8		14						
9		15						
1870		16						
1		17 **Arlt, Donders und Leber**						
2		18						
3		19						
4		20 Reg.						
5		21						
6		22						
7		23						
8		24	1					
9		25	2					
1880		26	3	1				
1		27	4	2				
2		28	5	3				
3		29	6	4		1	1	
4		30	7	5		2	2	
5		31	8	6	1	3	3	
6		32		7	2	4	4	
7		33 **Dond. u. Leb.**		8	3	5	5	
8		34 **Dond., Leb. u. Sattler**		9	4	6	6	
9		35		10	5	7	7	
1890		36 **Leber, Sattler und Snellen**		11		8	8	
1	1	37		12			9	1
2	2	38		13			10	2
3	3	39		14			11	3
4		40		15			(Schluss)	
5		von Bd. 17 ab heisst es: **Al. v. Graefe's Archiv**						
6								
7								
8								
9								
1900								
Laufende Nummer	**336**	**337**	**338**	**339**	**340**	**341**	**342**	**343**

Jahreszahlen	Deutsche Zeitschrift für praktische Medicin von **C. F. Kunze,** fortgesetzt v. **B. Fränkel** Leipzig gr. 4° Veit & Co.	Centralblatt für prakt. Augenheilkunde von **J. Hirschberg** (Berlin) Leipzig Veit & Co. 8°	Neurologisches Centralblatt von **E. Mendel** Berlin Leipzig 8° Veit & Co.	Jahresbericht über die Fortschritte in der Lehre von den pathogenen Mikroorganismen **P. Baumgarten** Braunschweig gr. 8° Harald Bruhn	Deutsche Klinik, Ztg. für Beobacht. aus deutsch. Klin. u. Krankenhäus. **Al. Göschen** 1 Berlin	Jahresbericht über die Leistungen im Gebiete der Ophthalmologie von **Alb. Nagel** Tübingen H. Laupp	Jahresbericht über die Leistungen auf dem Gebiete der Hygiene von **Uffelmann**	Jahresbericht über die Fortschritte der Geburtshülfe und Gynäkologie **Frommel** Wiesbaden 8° Bergmann
1850					2			
1					3			
2					4			
3					5			
4					6			
5					7			
6					8			
7					9			
8					10			
9					11			
1860					12			
1					13			
2					14			
3					15			
4					16			
5					17			
6					18			
7					19			
8					20			
9					21			
1870					22	1		
1					23	2		
2					24	3		
3					25	4		
4	1					5		
5	2					6		
6	3					7		
7	4	1				8 red.		
8	5	2				9 **Jul.**		
9		3				10 **Michel**		
1880		4				11		
1		5				12		
2		6	1			13		
3		7	2			14		
4		8	3			15	1	
5		9	4	1		16	2	
6		10	5	2		17	3	
7		11	6	3		18	4	1
8		12	7	4		19	5	2
9		13	8	5		20		3
1890		14	9	6		21		4
1		15	10	7		22		5
2		16	11	8		23		6
3		17	12	9		24		7
4								
5								
6								
7								
8								
9								
1900								
Laufende Nummer	**344**	**345**	**346**	**347**	**348**	**349**	**350**	**351**

Jahreszahlen	Annales médico-psychologiques	Balneologisches Centralblatt. Zeitschrift der ges. Interessen der Balneotherapie, Hydrotherapie, Massage, Heilgymnastik, Bäderhygiene und Diätetik. Leipzig 8° Herausgeber **Franz C. Müller** (Alexandersbad, Fichtelgebirge)	Pharmaceutische Zeitung von **H. Müller** 1856—80 mit **H. Böttger** — 1885, seit 1886 von **H. Böttger** allein. Supplement: Pharmac. Handelsblatt **H. Müller**	Vierteljahrsschrift über die Fortschritte auf dem Gebiete der Chemie der Nahrungs- u. Genussmittel v. **A. Hilger, Kayser, König, Sell** Berlin Springer 8°	Oesterr. Ztschr. f. Pharmac. h. v. **M. S. Ehrmann** Wien	Rundschau für die Interessen der Pharmacie, Chemie, Hygiene, herausgeg. von **Emil Graf** und **Adolf Vomačka** Leitmeritz 1874 - 85 Prag 1886—1894 seit 1892 mit **A. Brestowski**	Pharmac. Rundschau v. **Fr. Hoffmann** New-York 4° Monatsschr. für die wiss. u. gewerbl. Interessen der Pharm. in den Ver. Staaten	Deutsch-Amerikanische Apotheker-Zeitung New-York 1880—1882, von **Isaac Plant** seit 1883 anonym als Pharm. Publishing Co.
					1847—1			
					1848—2			
	1849—1				1849—3			
1850	2				1850—4			
1	3				5			
2	4				6			
3	5				7			
4	6				8			
5	1 III Ser.				9			
6	2		1		10			
7	3		2		11			
8	4		3		12			
9	5		4		13			
1860	6		5		14			
1	7		6		15			
2	8		7		16			
3	1. 2 IV Ser.		8		Zeitschr. des allgem. Oesterr. Apotheker-Vereins cf. Nr. 180			
4	3. 4		9					
5	5. 6		10					
6	7. 8		11					
7	9. 10		12					
8	11. 12		13					
9	1. 2 V Ser.		14					
1870	3. 4		15					
1	5. 6		16					
2	7. 8		17					
3	9. 10		18					
4			19			1		
5			20			2		
6			21			3		
7			22			4		
8			23			5		
9			24			6		
1880			25			7		1
1			26 **H. Böttger**			8		2
2			27			9	1	3
3			28			10	2	4
4			29			11	3	5
5			30			12	4	6
6			31	1		13	5	7
7			32	2		14	6	8
8			33	3		15	7	9
9			34	4		16	8	10
1890		1	35	5		17	9	11
1		2	36	6		18	10	12
2		3	37	7		19	11	13
3		4	38	8		20	12	14
4				9		21	13	15
5								
6								
7								
8								
9								
1900								
Laufende Nummer	**352**	**353**	**354**	**355**	**356**	**357**	**358**	**359**

Schriften
herausgegeben von der Naturforscher-Gesellschaft
bei der Universität Jurjeff — Dorpat.
IX.

Studien
über
sexuellen Dimorphismus, Variation und verwandte Erscheinungen.

Von
Professor Dr. J. Kennel.

I.

Der sexuelle Dimorphismus bei Schmetterlingen
und
Ursachen desselben.

Jurjeff, (Dorpat).
Druck von C. Mattiesen.
1896.

In Commission bei
K. F. Koehler in Leipzig und E. J. Karow in Dorpat.

Schriften
herausgegeben von der Naturforscher-Gesellschaft
bei der Universität Jurjeff — Dorpat.
IX.

Studien
über
sexuellen Dimorphismus, Variation und verwandte Erscheinungen.

Von
Professor Dr. J. Kennel.

I.

Der sexuelle Dimorphismus bei Schmetterlingen
und
Ursachen desselben.

Jurjeff, (Dorpat).
Druck von C. Mattiesen.
1896.

In Commission bei
K. F. Koehler in Leipzig und E. J. Karow in Dorpat.

Дозволено цензурою. Юрьевъ, 30-го Ноября 1895 г.

Vor einigen Jahren [1]) gab ich in einem ganz kurzen Referat über einen in der Narturforscher-Gesellschaft gehaltenen Vortrag der Anschauung Ausdruck, dass früher die Cervinen in beiden Geschlechtern Geweihe zur Ausbildung gebracht hätten, gerade wie auch bei den Cavicorniern sowohl Männchen wie Weibchen Hörner besitzen. Bei dem allmählich sich herausbildenden regelmässigen Verlust des Geweihes, dem eine ebenso regelmässige Neubildung folgte, hätten aber die weiblichen Thiere, in Anspruch genommen durch die Production der Jungen, die für jenen Kopfschmuck nöthige Ausgabe nicht mehr leisten können, wesshalb sie in all den Fällen, wo das Geweih nicht unbedingt zur Erhaltung der Art nöthig war, wie beim Renthier, dasselbe nicht mehr producirten, während bei den Cavicorniern, wo kein Wechsel stattfindet, die Hörner auch im weiblichen Geschlecht beibehalten werden konnten. Dies wurde weiterhin als möglich auch angewendet auf das dauernde Prachtgefieder vieler männlicher Vögel, besonders der Hühnerarten u. dgl. Dieser Auffassung gemäss würden dann nicht die Weibchen dieser sexuell dimorphen Thiere auf einem dem Ahnentypus nahen Standpunct stehen geblieben sein, während die Männchen einseitig durch Gewinnung neuer hervorragender Eigenschaften sich mehr und mehr davon entfernten, sondern die Männchen repräsentirten vielmehr den in direct aufsteigender Richtung von den Ahnen abzuleitenden Typus der Art — freilich in mannichfacher Weise ausgebaut — und die Weibchen sind secundär zu einfacheren Formen zurückgegangen. Bei dieser „regressiven“ Umbildung gelangen sie aber durchaus nicht auf die a n c e s t r a l e Form zurück, sondern nur auf eine solche, die der k i n d l i c h e n Form der eigenen Art nahesteht, und sich nur mehr oder weniger über dieselbe erhebt oder von ihr entfernt.

Der kindliche- und der Ahnentypus einer Thierspecies muss aber, wie bald gezeigt werden wird, in den meisten Fällen scharf auseinander gehalten werden.

Beim Durchsuchen der neueren Literatur über den sexuellen Dimorphismus und verwandte Erscheinungen finde ich nun ziemlich einheitlich den früheren, von obiger Auffassung diametral verschiedenen Standpunct eingenommen. Man ist so sehr von

---

1) Sitzungsber. d. Naturf.-Gesellsch. Dorpat, Bd. 10, p. 214—216.

der Ueberzeugung durchdrungen, dass die männlichen „secundären“ Geschlechtscharactere durchweg solche seien, die vom Männchen allein in sexueller Zuchtwahl erworben und weiter ausgebildet sind, dass man nicht nur zahlreiche Fälle, wo das Entgegengesetzte geradezu augenfällig ist, ignorirt, sondern dass man sogar Eigenschaften, die beiden Geschlechtern gleichmässig zukommen, dahin interpretirt, dass dieselben zuerst als sexuelle Charactere beim Männchen aufgetreten seien, und erst secundär vom Weibchen ebenfalls zur Ausbildung gebracht wurden, indem diese gleichsam den vorauseilenden Männchen endlich nachgekommen seien. So z. B. Ault[1]) für die Hörner der Cavicornier.

Ganz die gleichen Gedanken sind neuerdings in einem Vortrag von Alex. Brandt[2]) ausgesprochen worden und nicht nur für eine Reihe von Thieren, wie die oben erwähnten, sondern auch für den Menschen. Darnach ist z. B. der Bart des Mannes ein solcher nur von diesem zur Ausbildung gebrachter sexueller Schmuck, der noch dazu erst in einem gewissen Alter auftritt — als Beweis, dass er erst in der Menschenreihe erworben wurde, — und Brandt ist geneigt, die gelegentlich vorkommenden bärtigen „Mannweiber“ für „prophetische Individuen, für Pionire auf einem, kommenden Generationen vorgezeichneten Entwicklungspfade“ zu halten, ebenso wie hahnenfedrige Hennen, geweihtragende weibliche Cervinen Individuen seien, welche die vom männlichen Geschlecht schon längst zu voller Blüthe gebrachten Artcharactere endlich auch einmal, wenn auch einstweilen noch vereinzelt nachgeholt hätten.

Es ist dies letztere, wie gesagt, die allgemein verbreitete Anschauung, wenn auch die den Menschen betreffende, obwohl scheinbar correcte Consequenz, mehr vereinzelt stehen möchte. Worauf beruht nun diese Schlussfolgerung? Hauptsächlich auf der Vergleichung des kindlichen Typus mit dem des Erwachsenen. Weil das menschliche Kind schwach behaart ist, so ist die stärkere Behaarung eine secundäre Eigenschaft, in Bezug auf welche der Mann dem Weibe überlegen ist, also ist der Mann dem Weibe in dieser Entwicklungsrichtung vorausgeeilt, und dieses kommt ihm langsam nach. In dem Zurückgehen auf den kindlichen Typus liegt aber der Fehler; denn dieser ist nicht der Vorfahrentypus. Wäre er es, würde in den kindlichen Eigenschaften die letzte Etappe der Stammesentwicklung repräsentirt, so müsste man daraus schliessen, dass die unmittelbaren Vorfahren des Menschengeschlechts nicht nur so gut wie haarlos, sondern auch zahnlos gewesen seien, und der fünfte Backenzahn (Weisheitszahn) so wie die Anlage eines sechsten, nie zum Durchbruch kommenden, müsste man dann für allmählich entstehende, sich immer mehr befestigende, nicht aber als rudimentäre Gebilde erklären. Daran denkt aber Niemand. Ebensowenig darf man aus dem Umstande, dass die jungen Vögel zuerst unscheinbar gefärbt sind, und erst später bunt werden im Verlauf eines oder mehrerer Federwech-

1) Ault, Hornless Ruminants, Amer. Naturalist. vol. 21.

2) Ueber Variationsrichtungen im Thierreich. Virchow-Holzendorff'sche Sammlung gemeinverständl. wiss. Vortr. Heft 228.

sel ohne weiteres folgern, dass „das unscheinliche, düstere Kleid für die Vögel das ursprüngliche, das bunte, nicht selten metallisch schimmernde, hingegen eine spätere Vervollkommnung darstelle [1])“. Denn eine eben so folgerichtige Consequenz wäre dann anzunehmen, dass ursprünglich die Vögel nackt, oder nur mit Dunenfedern bekleidet gewesen seien, da die Jungen so aus dem Ei kommen.

Die Ahnen der Vögel mussten aber schon lange bevor sie die übrigen Vogelcharactere besassen, noch mit mannichfachen Reptilieneigenschaften behaftet, im erwachsenen selbstständigen Zustand grosse Federn, wenigstens Schwung- und Schwanzfedern haben, mussten fliegen können. Denn nur bei flugfähigen Thieren ist die Umbildung des Sternums und des Handskelets zu der Form, wie alle Vögel diese Theile zeigen, möglich gewesen. Aus diesen Organbildungen geht auch zweifellos hervor, dass es primär flugunfähige Vögel, so weit wir wissen, nie gegeben hat, da auch bei den jetzt lebenden und ausgestorbenen Ratiten ein richtiges Flügelskelet, oder wenigstens, wo dies ganz rudimentär ist, ein breites Sternum vorhanden ist.

Der kindliche Typus steht zu dem des Erwachsenen immer in einer gewissen Relation, ebenso wie bei anderen Thieren der Larventypus und man kann ohne Weiteres auch bei Vögeln und vielen Säugern von einem solchen sprechen. Aber selbstverständlich ist dies ein secundärer Larventypus, wie derjenige vieler Insecten. Während wir bei Heuschrecken, Rhynchoten u. a. Larvenzustände finden, die nur wenig vom ausgebildeten Thier sich unterscheiden und in der That Ahnencharactere besitzen mögen, sind die Raupen der Schmetterlinge, die Larven der Käfer, Dipteren u. a. in Anpassung an ganz besondere Existenzverhältnisse secundär umgeändert und zeigen nur in einzelnen Eigenthümlichkeiten, z. B. beissende Mundtheile, Ahnenmerkmale. Diese Thiere schlagen gewissermassen in ihrer Entwicklung einen Umweg ein, auf dem die Jugendformen umändernd beeinflusst wurden, und biegen dann erst zum richtigen Wege ein, und zwar kann dies in ein und derselben Gruppe sehr ungleich weit gediehen sein, wie bei den Musciden gegenüber den Culiciden.

Der ersten Gruppe der erwähnten Insecten kann man solche Säugethiere vergleichen, deren Junge in hoher körperlicher Ausbildung geboren werden, wie Meerschweinchen, Ein- und Zweihufer, Schweine und andere Hufthiere. Der zweiten dagegen die Säugethiere mit Jungen, die vom Arttypus anfangs recht stark abweichen, und dazu gehört auch der Mensch. Nicht das geborene Kind, sondern das mit Lanugo bedeckte ungeborene steht den Ahnenformen in Bezug auf Behaarung näher, und zeigt gerade dadurch, dass seine reiche Behaarung degenerirt, dass der Mensch secundär eine früher starke Allgemeinbehaarung verloren hat. Aus welchen Gründen der Haarverlust zu Stande kam, ob aus inneren Variationstendenzen, um ein kurzes Wort zu haben, dem aber keine falsche Bedeutung untergeschoben werden darf, ob durch die Gewohnheit, sich mit Hüllen zu bedecken, ist eine Frage für sich. Uralt muss die Rückbildung des Haarkleides sein, da sie schon lange

1) Brandt, l. c.

vor der Geburt der Kinder der Gegenwart eintritt. Auffallend kann es nur sein, dass sich an einzelnen Körperstellen, und abgesehen vom Kopfe. eventuell auch Brust und Nacken, gerade an Orten, wo Säugethiere sonst schwach behaart sind, diese Integmnengebilde erhalten haben und sogar anscheinend in verstärktem Maasse zur Entwicklung kamen. Ich möchte dafür folgenden Erklärungsversuch wagen. Starke Behaarung des Kopfes und des Nackens vielleicht auch der Gesichtsseiten dürften die anthropoiden Vorfahren besessen haben, wie noch jetzt sehr viele Affen. An Brust, in den Achselhöhlen und der Inguinalgegend haben sehr viele Säugethiere zwar dünnstehende, aber borstenartig starke Haare, und ebenso sind die Schnurrhaare und viele andere an Wangen und Kinn stärker als der übrige Pelz. Das lässt sich nicht nur bei Affen sondern auch bei Hunden und anderen Säugern leicht constatiren. Solche Haare sind wohl nicht gleichzeitig mit den anderen degenerirt, sondern erhielten sich hartnäckiger. Wir sehen nun oft — worauf später noch genauer eingegangen wird — bei Degeneration einzelner Gebilde, man könnte geradezu sagen in Folge der dadurch erzielten Erparung, eine compensatorische Weiterbildung anderer. So wäre es möglich, dass bei dem allgemeinen Haarschwund im Stamme des Menschen gerade den hartnäckiger sich erhaltenden, stärkeren und fester eingewurzelten Haaren mit grösseren Papillen der gewonnene Ueberschuss zu Gute kam und diese in Folge dessen sogar eine stärkere Ausbildung erlangen konnten. Die des Rückens und der Brust degenerirten als gewöhnliche nur stärkere Wollhaare allmählich auch noch, aber zuletzt, wesshalb sie bei vielen Personen noch immer reichlich und kräftig auftreten; ihnen folgen — wie es scheint — weiterhin die Kopfhaare. Am hartnäckigsten widerstehen die groben Haare der Achselhöhlen und der Schamgegend sowie die Barthaare, die an und für sich schon von besonderer Art den meisten Nutzen vom übrigen Haarschwund gezogen haben.

Ob und wie sehr diese Haare aber wirklich fortschrittlich ausgebildet wurden, ist schwer zu sagen. Die Wangengegend scheint in der Reihe der Anthropoiden von jeher eine bevorzugte Stelle für Integumentbildungen gewesen zu sein, denn dort produciren mit zunehmendem Alter manche der jetzt lebenden statt stärkeren Haarwuchses mächtige Schwielen. Auch zeigen andererseits sehr zahlreiche Menschenstämme nur schwachen Bartwuchs. Letzteres kann aber ebensogut eine Folge von durch zahllose Generationen systematisch fortgesetzter Unterdrückung sein, wie bei den stark bärtigen Rassen eine ebenso consequente Pflege diesen Schmuck gesteigert haben mag. Jedenfalls kommen wir zu dem, übrigens wohl meist verbreiteten Resultat, dass die Ahnen des Menschengeschlechts allgemein, an manchen Stellen stärker, an anderen in eigenartiger Weise behaart gewesen sind und dass dieses Haarkleid grösstentheils der Degeneration anheimfiel und voraussichtlich weiter anheimfallen wird — mit Ausnahme zunächt einzelner besonders cultivirter oder beanlagter Hautstellen; dass der Mann in Bezug auf Behaarung der Stammformen noch näher steht und desswegen die atavistische Behaarung vieler Körperregionen bei ihm leichter und öfter noch auftritt, während sich das Weib durch viel weitergehende Dege-

neration der Integumentbildungen in höherem Maasse von diesem Typus entfernt hat. Die gelegentlich vorkommenden bärtigen und stark behaarten Weiber sind dann ebenfalls als Rückschlagserscheinungen aufzufassen, so wie auch die seltenen Haarmenschen, nicht aber als solche, die in ihrer normalen Weiterentwickelung gleichsam der Jetztzeit vorausgeeilt sind und zeigen wie das Weib später sein wird!

Der Umstand, dass nicht selten solche weibliche Individuen, die nicht zur Fortpflanzung gelangten, und solche, bei denen die Fortpflanzungsfähigkeit aufgehört hat, anfangen stärkere Behaarung besonders des Gesichts zu bekommen, könnte dafür sprechen, dass die Unterdrückung des der Menschenrasse eigentlich noch zukommenden stärkeren stellenweisen Haarwuchses mit der Fortpflanzungsthätigkeit zusammenhängt. Normal erst in späterem Alter auftretend, wird diese Hautbildung im weiblichen Geschlecht normaler Weise nicht geleistet, wenn und so lange die Ausgaben des Körpers für die Nachkommenschaft in Anspruch genommen werden und zwar zeigt sich das nicht nur in der Behaarung, sondern auch in den Bildungen des Kehlkopfes und der Stimme. Natürlich kommen für diese Rückschläge gegen den durch den Mann im höheren Maasse repräsentirten Arttypus auch Familienunterschiede und erbliche Anlagen in Betracht, wesshalb denn jene Eigenthümlichkeiten nicht bei allen Frauen in gleicher Stärke, bei vielen kaum angedeutet oder gar nicht auftreten. Der Mensch ist als höchstes Culturthier zwar ein ausgezeichnetes Beobachtungsobject, bei dem wir zudem in der Lage sind, auch die kleinsten Unterschiede und Merkmale zu erkennen, aber bei seinen complicirten und nicht mehr naturgemässen verfeinerten Lebensbedingungen und den zahllosen künstlichen Beeinflussungen kein klassisches Beispiel und Versuchsobject; seine vielen Rassen und Typen laufen durch unendliche Vermischung zu sehr durcheinander, als dass man leicht die natürlichen Ursachen einzelner Erscheinnngen auffinden könnte. Das wird leichter bei Naturthieren möglich sein.

Das menschliche Weib hat zweifellos auch im erwachsenen Zustand eine grosse Annäherung an den k i n d l i c h e n Typus bewahrt und entfernt sich dadurch von dem männlichen; aber da das Kind durch die schon im foetalen Leben erfolgende Degeneration der ancestralen Pelzanlage sich in dieser Hinsicht als rudimentär erweist, nicht nur den Ahnen gegenüber, sondern sogar im Vergleich mit den Kindern derselben, so wird dadurch noch deutlicher, dass gerade das Weib secundäre Abweichungen besitzt vom eigentlichen Arttypus. Es giebt dafür ein ausgezeichnetes Beispiel extremster Art in der Thierreihe, welches diese Anschauung klarer zum Ausdruck bringt. Die Raupen sind der kindliche Typus der Schmetterlinge, aber gewiss nicht der Ahnentypus; denn die Schmetterlinge stammen sicher von geflügelten Insecten ab, welche früher einmal eine allmähliche Metamorphose, wie etwa die Orthopteren, gehabt haben; ihre kindlichen Zustände wurden secundär modificirt. Darum repräsentirt nur der voll ausgebildete, geflügelte Schmetterling den Arttypus. Die weiblichen Psychiden und einige andere Schmetterlinge, im Jugendzustand normale Raupen, machen gleichfalls ihre Metamorphose durch, aber das fertige Thier ist fast völlig auf larvaler Stufe stehen geblieben, es zeigt so viele kindliche Eigen-

schaften, dass es ungeheuer vom Männchen differirt, es ist degenerativ zurückgeblieben aber nicht auf ancestraler, sondern nur auf kindlicher Stufe, ja sogar noch durch den Verlust der Beine und der Mundwerkzeuge unter diesen herabgesunken. Kein Mensch wird behaupten wollen, dass das Psychidenweibchen das vom Ahnenstamm weniger abweichende sei, und dass das Männchen secundär, im Kampf ums Dasein und in sexueller Zuchtwahl seine auszeichenden Eigenschaften errungen habe. Ja, wenn es keine anderen Schmetterlinge, als nur Psychiden gäbe, und wenn überhaupt geflügelte Insecten die spärlichen Ausnahmen bildeten, dann könnte man allenfalls zu solcher Auffassung kommen. Unter den vorliegenden Umständen aber wird Niemand daran zweifeln, dass die Vorfahren der Psychiden in beiden Geschlechtern normale Schmetterlinge waren, dass die Männchen diesen Typus bewahrt haben, die Weibchen aber secundär degenerirt seien, bis sie endlich auf dem kindlichen (larvalen) Zustand, unbeschadet der Fortpflanzungsfähigkeit stehen blieben, ja dass gerade die Production der Nachkommenschaft — neben anderen möglichen Ursachen — sie auf diese Stufe zurückgedrängt habe.

Ueberhaupt ist kaum eine Thiergruppe so sehr geeignet, die secundäre Abänderung, resp. Degeneration der weiblichen Thiere gegenüber den männlichen im Zusammenhang mit dem Fortpflanzungsgeschäft deutlicher zu illustriren, als gerade die Schmetterlinge. Denn da diese Insecten, trotz der Mannigfaltigkeit der Formen und Färbungen, trotz einzelner anatomischer Abweichungen, dennoch so einheitlich in ihren Bildungen im Allgemeinen sind, und eine gut abgegrenzte Gruppe bilden, deren Jugendformen auch durchweg hohe Gleichartigkeit zeigen, so lässt sich bei ihnen gerade so sehr leicht feststellen, was typisch ist und was secundäre Abweichung sein dürfte. In Gleichförmigkeit der Organisation lassen sich ausser einigen anderen Insectengruppen von den höheren Thieren nur noch die Vögel ihnen an die Seite stellen. Es sind Endtypen, bei denen sich wohl noch Varietäten und aus diesen neue Arten ausbilden mögen, die aber kaum in fortschreitender Richtung noch wesentlich umbildungsfähig erscheinen — höchstens ist zu erwarten, dass in Folge auftretender Degeneration einzelner Organe weitergehende Abweichungen ausgebildet werden, wie das schon bei den flugunfähigen Vögeln der Fall ist; diese aber sind grösstentheils — auch ohne menschliche Dazwischenkunft — auf dem Aussterbeetat.

Bei Schmetterlingen beruht der sexuelle Dimorphismus, ausser dem eben erwähnten Falle 1) in verschiedener Färbung, 2) in ungleicher Grösse, 3) in ungleicher Ausbildung homologer Organe, speciell der Flügel und Fühler, auch mitunter einzelner Beine bei Männchen und Weibchen oder 4) in Combination mehrerer dieser Merkmale [1]). Bei der grossen Mehrzahl sind beide Geschlechter, abgesehen von geringen Grössenunterschieden des Abdomens, in welcher Hinsicht das Weibchen immer in

1) Eine gute Zusammenstellung dieser Verhältnisse findet sich bei Aurivillius, Ueber secundäre Geschlechtscharactere nordischer Tagfalter. Bihang till. Köngl. Svenska Vetensk.-Acad. Handlingar. 5. Bd. 1878—1890.

Folge der Eiproduction das stärkere ist, ziemlich gleich; beide Geschlechter folgen demnach einander im allgemeinen genau bei den Variationsrichtungen, die zur Bildung neuer Arten führten, was auch nach dem Wesen der Vererbung das naturgemässe und normale ist. Einzelne Differenzen, wie Stummelflügeligkeit oder Flügellosigkeit der Weibchen sind widerspruchslos als secundäre Degeneration dieses Geschlechts anerkannt. Wenn das noch eines Beweises bedürfte, so fände sich derselbe in dem Umstande, dass die Flügelscheiden der weiblichen Puppen solcher Schmetterlinge, die Stummelflügel haben, gewöhnlich viel grösser sind, als die später ausgebildeten Flügel [1]), wie ich dies auch für die Puppe von Acentropus kürzlich [2]) gezeigt habe. Die Flügelscheide der Puppe, als Cuticularabsonderung des Epithels des unter der Raupenhaut angelegten und nach deren Abstreifung sich ausbreitenden jungen Organs, giebt genau die Grösse der Flügelanlage an. Diese ist demnach bei dem männlichen und weiblichen Acentropus gleich gross und nur des grösseren weiblichen Abdomens wegen relativ kleiner. Da nun der weibliche Acentropus gewöhnlich nur ganz kleine Flügelstummel hat, viel kleiner als die Puppe erwarten lässt, so ist klar, dass hier im letzten Stadium der Entwickelung eine Reduction eintrat und zwar gleichzeitig mit der Ausbildung der Eier, welche der kurzlebige Schmetterling bereits völlig fertig beim Verlassen der Puppencuticula mitbringt. Das gilt auch für andere Schmetterlinge. Man kann ceteris paribus annehmen, dass die weiblichen Flügelanlagen und damit die Flügelscheiden der Puppe um so kleiner sein werden, je älter die Degeneration der weiblichen Flügel bei der betreffenden Art ist und je mehr sich diese Eigenthümlichkeit bereits befestigt hat.

Fragen wir nach den Ursachen, welche für die secundäre Flügeldegeneration weiblicher Schmetterlinge in Betracht kommen können, so geht meine Anschauung über dieselben schon aus mehreren Stellen des bisher Gesagten hervor; ich meine nämlich, dass in manchen Schmetterlingsgattungen, in anderen nur bei einzelnen Arten einige oder viele Weibchen schon während des Puppenstadiums, oder bereits in den letzten Phasen des Raupenlebens einen grösseren Theil der Körpersubstanzen, als dies bis dahin der Fall war, zur Production der Eier verwandten und eine grössere Zahl derselben erzeugten, als andere Genossen. Das konnte nur auf Kosten anderer Organe geschehen, die in Folge dessen rudimentär werden mussten; in diesem Falle waren das die Flügel. Irgend ein Organ, oder mehrere zugleich mussten bei solchen „Ueberproductionen“ der Ovarien, wenn wir stets ziemlich gleiche Ernährung der Raupen voraussetzen, geschädigt werden. Sollten aber derartige Weibchen überhaupt fortpflanzungsfähig sein, so konnten nur solche Organe in Betracht kommen, ohne deren normale Ausbildung dennoch das Weibchen seine „Bestimmung“ erreichen

1) L. Knatz, Ueber Entstehung und Ursache der Flügelmängel bei den Weibchen vieler Lepidopteren; Arch. f. Naturg. 57. Jahrg. 1891. Daselbst auch zahlreiche Literaturangaben und Besprechung entgegengesetzter Ansichten.

2) Sitzungs-Berichte der Naturf.-Gesellsch. bei der Univ. Dorpat 1895. Entomolog. Mittheilungen.

konnte, also diejenigen, die es entbehren konnte, und vielleicht auch schon in früheren Generationen weniger benutzt hatte. Hier kommen nun, da im Allgemeinen bei den Schmetterlingen das Männchen mit Hilfe einer vortrefflichen Geruchsorgane so wie so das Weibchen aufsucht, zunächst die Flügel an die Reihe. Die Degeneration derselben konnte eine im Laufe zahlreicher Generationen unter allmählicher Steigerung der Eierproduction langsam fortschreitende sein, es ist aber auch denkbar, dass in manchen Fällen eine durch wenige Generationen hindurch rapid gesteigerte Erzeugung von Eiern ein ebenso schnelles Herabsinken der Flügel von ihrer früheren Höhe, gleichsam ein Aufzehren derselben bewirken mochte. Dann könnte man mit vollem Recht von einer „sprungweisen Abänderung" der Weibchen sprechen.

Solche Fälle liegen vielleicht da vor, wo die weiblichen Puppen noch ebenso grosse Flügelanlagen aufweisen, wie die männlichen, oder bei den Arten, wo noch gelegentlich ganz, oder fast ganz normal beflügelte Weibchen auftreten. Das kommt nach Knatz [1]) vor bei Acentropus niveus und Xysmatodoma melanella, bei ersterem unter den gewöhnlich stummelflügeligen und bei letzterer sollen die Weibchen „in England stets ungeflügelt sein, mit Ausnahme der Jahre 1869 und 1870, wo sie, wie dies in Deutschland immer der Fall ist, in grosser Menge geflügelt gefunden worden sind" (nach Harding, Month. Mag. 1876 p. 208). Es wäre von höchstem Interesse zu untersuchen, wie sich solche geflügelte und fast ungeflügelte Weibchen in Bezug auf die Menge resp. Masse der erzeugten Eier verhalten. In der von Knatz reproducirten Abbildung eines geflügelten Acentropusweibchens ist das Abdomen wesentlich kleiner als bei dem stummelflügeligen; allerdings zeichnen sich die Abbildungen dieses Autors nicht gerade durch grosse Correctheit aus. [2]) Sollte sich herausstellen, was ich nicht bezweifle, dass die geflügelten Weibchen der genannten Arten weniger productiv sind an Eierzahl, als die ungeflügelten, so wäre das geradezu ein Beweis für die hier vertretene Anschauung.

Nach dieser ist es nicht nothwendig, eine Vererbung der Flügelverkümmerung von vorn herein anzunehmen, sondern nur eine Vererbung der Tendenz, mehr Eier zu erzeugen; dann ergibt sich die Verkümmerung der Flügel im weiblichen Geschlecht jedes mal ganz von selbst, wenn nicht gelegentlich Rückschläge vorkommen, wie bei Acentropus; das männliche Geschlecht wird dabei gar nicht tangirt; denn selbst wenn auch bei diesem eine höhere Production von Geschlechtsstoffen von den fruchtbareren Weibchen aus vererbt wird, so nimmt diese doch beim Männchen so wenig Substanz in Anspruch, dass es in Bezug auf seine übrigen somatischen Eigenschaften so gut wie unverändert bleiben kann. Sollte aber einmal auf das männliche Geschlect Flugunfähigkeit vererbt werden, so wird diese bei der Unwahrschein-

1) l. c. pag. 55.
2) So ist z. B. seine Copie von Exapate congelatella eine sehr freie nach Praun, dessen Abbildungen selbst schon unter aller Kritik sind, aber keineswegs eine Verbesserung.

lichkeit, dass solche Männchen zur Begattung gelangen, nicht weiter übertragen, sondern bald ausgemerzt. Die Flügellosigkeit als eine einfache Folge einer anderen, gesteigerten Leistungsfähigkeit wird jedoch anfangs gar nicht direct vererbt werden, sondern eben nur die letztere, und die geht das männliche Geschlecht ja nichts an, hat aber im weiblichen immer dieselbe Folge. Ist aber die Eigenschaft innerhalb einer Art noch nicht alt, und nicht sehr stabil geworden, so ist begreiflich, dass ab und zu Rückschläge von verschiedener Stärke vorkommen werden. Am wenigsten auffällig werden solche indessen bei den Arten und Gruppen sein, wo die Reduction der weiblichen Flügel eine sehr allmählige, im Laufe vieler Generationen gesteigerte war; Rückschläge werden sich in diesen Fällen nur in ziemlich kleiner Amplitude zeigen, nämlich in Hinneigung zu den noch näherliegenden Etappen der früheren Zustände, die aber auch schon stark reducirt waren. Steigert sich dagegen durch Erbschaft und Fortwirkung der ersten Ursache — mag dies sein, welche sie wolle — die Eiproduction, so wird auch die Reduction anderer Organe weitere Fortschritte machen, sich nicht nur auf die Flügel, sondern auch auf Beine, Fühler, Beschuppung etc. ausdehnen — immer so weit sich dies mit der Fortexistenz der Art verträgt. Es ist das im eigentlichen Sinne „ein Kampf der Theile im Organismus" (Roux.).

In wie weit Wahrscheinlichkeitsbeweise beizubringen sind für die Ansicht, dass die übermässig erhöhte Inanspruchnahme des weiblichen Körpers für das Fortpflanzungsgeschäft die Degeneration der Flügel zur Folge hatte, wird später zu untersuchen sein. Zunächst muss der Erklärungsversuch, den K n a t z [1]) für die „Flügelmängel" geboten hat, besprochen werden. Er geht von der oft gemachten Erfahrung aus, dass durch äussere Einwirkungen — Druck oder Stoss auf die Puppe, Verletzung derselben, aber auch durch mangelhafte Ernährung während des Raupenstandes, oder durch Mangel an der nöthigen Feuchtigkeit oder Wärme, oder auch von beiden — zuweilen zufällig Deformitäten, wie an anderen Theilen so auch an der Beflügelung der Imago entstehen. „Ungünstige klimatische Veränderungen in der Heimath der Art, oder auch nur mehrjährige ungünstige meteorologische Verhältnisse werden nun, wenn sie während des Raupenstandes wiederkehren, und namentlich wenn sie alsdann die Futterpflanze ungünstig beeinflussen, ebenso aber auch, wenn sie während des Puppenstandes bestehen, die Wirkung üben, dass die Beflügelung bei mehr oder weniger zahlreichen Individuen der Art verkrüppelt ausfällt. Soweit diese Männchen sind, wird die Sache keine Folgen haben, denn flügeldeforme Männchen können die Weibchen nicht aufsuchen, anscheinend überhaupt keine Copula vollziehen. — Flügeldeforme Weibchen dagegen werden wie wohlgestaltete befruchtet. W e n n d i e s l ä n g e r e Z e i t s i c h f o r t s e t z t, s o i s t d e r A n s t o s s g e g e b e n u n d d i e M ö g l i c h k e i t d e r C o n s t a n z d e s F l ü g e l m a n g e l s u n d z w a r n u r b e i m w e i b l i c h e n G e s c h l e c h t v o r h a n d e n [2]). Diese Deformität wirkt

1) l. c. pag. 65.
2) Dieser Satz ist auch im Original gesperrt gedruckt.

nun wahrscheinlich vortheilhaft." — Die flugunfähigen Weibchen „bleiben sitzen und das ist vortheilhaft für sie, denn mit Hülfe ihrer Bergungsmimikry fallen sie dann den Feinden weniger leicht zum Opfer. — Der vortheilhafte Instinct des Sitzenbleibens wird vererbt. Je weniger die Thiere die Flügel gebrauchen desto früher werden dieselben durch Nichtgebrauch verkümmern. Damit zugleich wird der Thorax schwinden, der Hinterleib wachsen. — Mit der Vergrösserung des Hinterleibes ist die Vergrösserung des Eierstockes verbunden. Je mehr Eier das Weibchen legt, desto grösser ist im Zweifel (ohne Zweifel?) die Nachkommenschaft, die wiederum durch Vererbung dieselbe Eigenschaft auf die ferneren Generationen überträgt. Die besser beflügelten Weibchen gehen immer mehr zu Grunde, haben weniger Nachkommen, verschwinden ganz. — Die Erschwerung des Auffindens der Weibchen bewirkt bei den Männchen durch Zuchtwahl die stärkere Entwicklung der Flügel."

Wie man sogleich sieht, ist die referirte Anschauung, abgesehen von einigen Schlussfolgerungen, gerade entgegengesetzt der oben dargelegten. Die grössere Fruchtbarkeit der Weibchen, welche dort eine Ursache für gewisse anatomische Mängel hingestellt wird, ist hier eine der letzten Consequenzen einer primär erworbenen und vererbten Flügel m i s s b i l d u n g. Es soll hier nicht die Frage nach der Möglichkeit der Vererbung solcher durch äussere Einflüsse hervorgerufener D e f e c t e aufgerollt, sonderen nur der vorliegende Versuch auf seine Wahrscheinlichkeit geprüft werden. Von den angeführten eventuellen Ursachen einer Flügelmissbildung bei relativ zahlreichen Individuen kommen in der freien Natur nur mangelhafte Ernährung der Raupen oder Mangel von Feuchtigkeit resp. Wärme während des Puppenstadiums in Betracht. Der erstere Factor kann, wie allgemein bekannt ist[1]), eine bedeutende Verzögerung im Wachsthum der Raupe und wenn er erst im letzten Stadium auftritt eine Beschleunigung der Verpuppung bedingen[2]) und solche Raupen liefern dann vielfach kleine Schmetterlingsindividuen beiderlei Geschlechts. Als Ursache von Flügelverkrüppelung wird Nahrungsmangel nur selten wirken, vor allem nicht in der Freiheit. Zu grosse Trockenheit der Umgebung aber ist eine bei Züchtungen häufige Ursache und sie wirkt wie ich glaube einfach dadurch, dass die Puppe zu viel Wasser durch Verdunstung verliert und darum die Cuticula der Flügel schon in den letzten Tagen der Puppenruhe ganz oder theilweise zu wasserarm und hart wird, um später noch eine Ausglättung der in feine Falten gelegten Flügelmembran durch den Druck der in die „Adern" getriebenen Luft und Blutflüssigkeit zu gestatten. Auch dies wird in der freien Natur, wo die Raupen sich zur Ver-

1) Vgl. auch A. S e i t z, Allgemeine Biologie der Schmetterlinge. Zool. Jahrb. Abth. für Syst. etc. Bd. 7. 1894.

2) D. B a r f u r t h, Der Hunger als förderndes Princip in der Natur, Arch. f. mikr. Anatomie. Bd. 29 weist nach, dass auch bei Froschlarven die letzten Stadien der Umwandlung in Folge von Nahrungsentziehung beschleunigt durchlaufen werden können.

puppung geeignete Orte aufsuchen, häufig unter der Rasendecke, zwischen Moos oder tief in der Erde kaum in grösserem Umfange eintreten, kann aber vor allem für Arten, wie Acentropus, die im Wasser leben, gar nicht in Frage kommen. Zudem scheint doch die Puppencuticula für alle die Formen, deren Puppen frei hängen oder in lockeren Gespinnsten liegen, genügender Schutz zu sein, und man darf das, was in der unnatürlich trockenen Zimmerluft öfter eintritt, nicht ohne Weiteres auf natürliche Verhältnisse übertragen. In wie fern Mangel an Wärme rudimentär bleibende Flügel erzeugen kann, weiss ich nicht, finde auch keine sicheren Angaben in der Literatur.

Aber angenommen, solche Ursachen bewirkten thatsächlich ein oder mehrere Mal im Freien, dass bei einer grossen Zahl von Schmetterlingen einer Art die Flügel verkrüppeln, so fehlt doch noch der Nachweiss, dass sich das erblich überträgt. Wie häufig werden gerade verkrüppelte weibliche Exemplare einer seltenen Schmetterlingsart zur Nachzucht benutzt, und ihre Nachkommen werden, wenn man nur richtige Existenzbedingungen schafft, alle ganz normal. Dass aber die ungünstigen Verhältnisse, die immer wieder denselben Effect hatten, durch so lange Zeiträume hindurch in einem ausgedehnten Verbreitungsgebiet einer Art immer wieder regelmässig aufgetreten seien, dass sich dadurch die Flügelverkümmerung befestigt und zu einem erblich übertragbaren Character gesteigert hätte, ist wohl schwer anzunehmen, auch wenn man die Möglichkeit der Vererbbarkeit derart erzeugter Missbildungen annimmt. Denn es handelt sich ja nicht um regelmässig wiederkehrenden Wechsel von Jahreszeiten, sondern um regelmässig auftretende gleichmässig abnorme Verhältnisse während einer bestimmten Jahreszeit durch lange Jahre hindurch.

Am bedenklichsten aber ist der Schluss des gesperrt gedruckten Satzes, dass durch diese Umstände „die Möglichkeit der Constanz des Flügelmangels und zwar nur beim weiblichen Geschlecht vorhanden“ war. Zugegeben muss werden, dass Männchen, welche aus den gleichen Ursachen stummelflügelig geworden wären, nicht in Betracht kommen, wegen der Unwahrscheinlichheit, dass sie zur Begattung kommen konnten. Warum aber stummelflügelig gewordene Weibchen nur die Fähigkeit besitzen sollten, diese ihre Eigenschaft auf die weibliche, nicht aber auch auf die männliche Nachkommenschaft zu vererben, das ist nicht einzusehen. Denn wo finden sich Belege dafür, dass die Männchen ihre besonderen Eigenschaften nur auf die männlichen, die Weibchen die ihrigen nur auf die weiblichen Nachkommen vererben? Das scheint wohl so zu sein bei den streng sexuell dimorphen Thieren, wo uns die individuellen Eigenthümlichkeiten entgehen und nur die auffallenden, mit dem Geschlecht verknüpften „secundären Sexualcharactere“ so sehr in die Augen fallen und als grosse Haupsache imponiren. Denn da sind endlich diese Eigenschaften etwas dem betreffenden Geschlecht Immanentes geworden, das ein ganz und gar von sonstigen Eigenschaften des Vaters und der Mutter Unabhängiges ist, es gehört zum Geschlecht. Das ist aber nicht so bei eben erst entstandenen oder entstehenden Eigenschaften des einen oder anderen Geschlechts, solange dieselben nicht durch alle

zusammenwirkenden Factoren einseitig als Sexualcharactere befestigt sind. Denn wenn man annehmen wollte, dass z. B. das Geweih der männlichen Hirsche eine Vererbung von Seiten des Vaters, der Geweihmangel eine solche durch die Mutter sei, so müsste man ebenso nothwendig dann folgern, dass die Männlichkeit selbst nur vom Vater, die Weiblichkeit von der Mutter abstamme. Dagegen sprechen aber schon die Thatsachen der Parthenogensis; bei den Bienen werden gerade aus den unbefruchteten Eiern, auf die das Männchen keinen Einfluss ausübt, nur Drohnen mit allen primären und secundären männlichen Eigenschaften und bei Schmetterlingen entstehen durch Jungfernzeugung entweder Männchen und Weibchen in annähernd gleicher Zahl, oder allein weibliche Thiere[1]). Jeder Thierzüchter weiss, dass bei Kreuzung verschiedener Rassen ebensogut Merkmale des Weibchens auch auf die männlichen Nachkommen vererbt werden, wie solche der Männchen auf die weiblichen, und die Fälle, dass aus der Paarung einer hornlosen Ziege und eines gehörnten Bockes auch hornlose Böcke entsprossen, sind zahlreich genug, so dass auf andere Beispiele verzichtet wevden kann, zumal wie ich glaube, die daran illustrirte Thatsache allgemein anerkannt ist. Es werden demnach aus der Paarung von „flügeldeformen" Schmetterlingsweibchen mit normalen Männchen nicht nur stummelflügelige Weibchen und geflügelte Männchen, sondern immer auch männliche Thiere mit verkümmerten Flügeln und weibliche mit normalen Flügeln entstehen. Ein Ueberwiegen der einen Sorte kann erst entstehen, wenn die flugunfähigen Weibchen anfangen sich durch grössere Fruchtbarkeit auszuzeichnen und die Stummelflügel intensiver vererbt werden. Da das aber beide Geschlechter in annähernd gleichem Maasse betreffen wird, so ist nicht nur kein Vortheil, sondern geradezu ein Nachtheil für die Erhaltung der Art die Folge. In dem Maasse, wie die Weibchen mit rudimentären Flügeln an Menge überwiegen, werden dies auch die Männchen thun; es werden darum immer weniger geflügelte Männchen, welche die Begattung ausüben können, und die Art kommt auf den Aussterbeetat, wenn nicht unterdessen die Fähigkeit der Parthenogenese auftritt, über deren Ursachen wir aber gar nichts wissen.

Noch ein weiterer Punct von Wichtigkeit ist zu besprechen. Nach Knatz ist die Ursache der Flügeldeformität eine solche, wie sie auch bei Züchtungen oft die Ausbildung der Flügel hindert. Es scheint mir aber ein gewaltiger Unterschied zu sein zwischen einem „verkrüppelten" Flügel und einem „rudimentären." Der verkrüppelte Flügel ist ein ganz normal angelegter und ausgearbeiteter, der sich nur später nicht entfalten kann, ein rudimentärer dagegen, wie ihn die Natur erzeugt hat, ist ein völlig entfalteter, leidet aber an Substanzmangel, und kann trotz aller Entfaltung und Ausglättung die normale Grösse nicht erreichen; der Substanzmangel kann soweit gesteigert werden, dass sogar die anfänglich vorhandene Flügelanlage ganz und gar verschwindet. Wenn nun auch durch viele Generationen hin-

1) Seitz l. c. pag. 846

durch die Ursachen, welche Flügelverkrüppelung bedingen, regelmässig wiederkehren und immer gleiche Folgen haben, so werden diese Folgen eben immer nur „verkrüppelte" Flügel sein; hören die Ursachen wieder auf zu wirken, so steht der vollen Entfaltung der immer noch normal angelegten Flügel nichts mehr im Wege. Da hilft man sich nun damit, dass man annimmt, der verkrüppelte Flügel wird wenig oder garnicht mehr gebraucht, Organe, die nicht mehr benutzt werden, verkümmern und degeneriren in Folge von Nichtgebrauch; so werden aus ursprünglich verkrüppelten wirklich rudimentäre Flügel. Der Satz von der „Degeneration in Folge von Nichtgebrauch" spielt in den naturwissenschaftlichen Anschauungen seit Darwin eine so grosse Rolle, dass es kaum eine Theorie der Vererbung gibt, die nicht damit rechnet und die Art und Weise auseinander zu setzen sucht, wie man sich die Sache zu denken habe. Er wird in zahllosen Fällen einfach als Erklärung für das Rudimentärwerden von Organen genommen: „Die Ohrmuskeln des Menschen, die Afterzehen der Hufthiere, die hinteren Extremitäten der Wale, die Augen von Höhlenthieren ect. ect. sind degenerirt in Folge von Nichtgebrauch."

Aber der Satz enthält gar keine Erklärung, sondern constatirt nur die häufig zu beobachtende Thatsache, dass Organe, die nicht gebraucht werden, degeneriren können und auch gewöhnlich degeneriren, oder richtiger, dass diejenigen Organe, welche durch Degeneration rudimentär werden, in der Regel solche sind, die in der betreffenden Thiergruppe keine oder nur geringfügige Function hatten. Der Nichtgebrauch ist aber nicht die Ursache der Degeneration, sondern diese ist, wie ich glaube, in der Erstarkung und Weiterbildung anderer Organe oder Theile des Körpers zu suchen, die in höherem Maasse in Anspruch genommen wurden. Bei der eigenartigen Umbildung der Extremitäten der Hufthiere geht die Reduction der seitlichen und die mächtige Erstarkung der Mittelzehen ganz parallel. Bei der von Hause aus ungleichen Länge der Zehen in der ganzen Wirbelthierreihe wurden bei den Thieren, die aus Sohlengängern Zehengänger wurden, die mittleren, längeren durch die Last des Körpers mehr in Anspruch genommen; sie wurden durch Gebrauch gekräftigt und zwar von Generation zu Generation mehr und mehr. Sie verlangten zu ihrer Ausbildung mehr Stoff und dieser wurde anderen unwichtigeren Organen entzogen, in erster Linie den weniger werthvollen Nachbargebilden; diese wurden dadurch immer schwächer, kleiner und endlich rudimentär. Die hintere Extremität der Sirenen und Wale degenerirte bis zum völligen Verschwinden nicht weil sie beim Wasserleben nicht mehr gebraucht wurde, sondern weil andere Organe für das Schwimmen in Anspruch genommen, gewaltig erstarkten, die Lenden- und Schwanzmuskulatur und derer Knochengerüst, sowie die mächtigen Bindegewebs- und Hautbildungen des Schwanzes; deren erhöhte Ausbildung erfolgte auf Kosten anderer Organe, uud dabei wurde immer zuerst bei denjenigen gleichsam eine Anleihe gemacht, die von untergeordneter Bedeutung waren. Das waren nun freilich hier die Hinterbeine, die wahrscheinlich beim Schwimmen, wie das bei Tritonen der Fall

ist, ohne Bewegung dem Körper angelegt wurden und in der That nichts besonderes leisteten. Sollte der Schwanz bei den Anthropoiden und den Vorfahren des Menschen nun degenerirt sein, weil er ein functionsloses Organ war? Welche Bedeutung hat denn der Schwanz der Mäuse und Ratten? Man hat Functionen des Schwanzes bei diesen Thieren ausfindig zu machen gesucht, aber was man auch sagte von Steuer in den unterirdischen Gängen u. dgl. klingt doch sehr gesucht und wir dürfen ruhig sagen, dass wir eine hervorragende Function nicht kennen; nicht einmal als Fliegenwedel wird er benutzt, wozu die geschwänzten Vorfahren der Anthopoiden den ihrigen doch vielleicht brauchen konnten. Warum verschwand er bei diesen, während er sich bei den Ratten erhielt? Die stattfindende, allmählich gesteigerte Umbildung der Anthropoiden zu aufrecht gehenden Thieren machte eine bedeutende Erstarkung der Knochen und Muskeln in der Lendengegend und den Hinterextremitäten nothwendig, ganz abgesehen von der Weiterbildung anderer Organe, wie Gehirn ect. und das geschah wohl auch theilweise auf Kosten des Schwanzanhanges. Die Ratten und Mäuse stammen vermuthlich auch von Thieren ab, bei denen der Schwanz eine grosse Bedeutung hatte, wie bei den Eichhörnchen noch heute; bei ihrer Anpassung an die jetzige Lebensweise büsste er seine Bedeutung ein; aber so lange die Träger dieses Organs nicht wieder anfangen, durch Variation in irgend einer Richtung, ein wichtiges Organ umzuformen, weiter auszubilden oder zu kräftigen, degenerirt auch der Schwanz nicht wesentlich, trotz seiner geringen Bedeutung. Es gibt ja Beispiele genug, dass nicht nur bedeutungslose, sondern selbst schon rudimentäre Organe mit ungemeiner Hartnäckigkeit vererbt werden, und man steht vor diesen Thatsachen als vor Räthseln. Ich glaube nun, dass auch solche Organe immer und immer wieder vererbt werden, wenn keine Veranlassung zu ihrer Rückbildung vorliegt und eine solche enthalten sie nicht in sich, sondern sie tritt erst ein mit irgend einer neuen Periode von progressiver Veränderung anderer Organe. Ein solche kann eintreten in Folge einer Veränderung der äussern Umstände, der Lebensbedingungen; aber diese Umstände bewirken nicht direct die Rückbildung der nutzlosen Organe, sondern die Ausbildung anderer, und erst das letztere Moment ist die Veranlassung zur Degeneration von jenem. Nur dann kann eine mehr unmittelbare Beinflussung eines nutzlosen Organs, ohne dass andere Theile davon Nutzen ziehen, vorkommen, wenn dasselbe an und für sich stark variabel und für seine Besitzer direct schädlich ist; denn dann kann die natürlichen Auslese der am wenigst benachtheiligten Individuen einsetzen. Der Satz: „Nutzlose Organe degeneriren in Folge von Nichtgebrauch“ müsste demnach geändert werden in: „Nichtgebrauchte Organe degeneriren in Folge stärkerer Ausbildung anderer.“ Bei Thierarten, die gegenwärtig ziemlich stabil sind, wird auch in nutzlosen Organen kaum eine Veränderung eintreten, bei solchen dagegen, die sich in lebhafter Variation befinden, besonders denen, die im Zuge sind, gewisse Organe zu höherer Leistungsfähigkeit umzubilden, werden solche unnöthigen Organe einer relativ raschen Degeneration anheimfallen.

Wenn wir dies anwenden auf die durch äussere Umstände verkrüppelten Schmetter-

lingsflügel, so werden dieselben im wahren Sinne erst degeneriren, wenn ein anderes Organ eine höhere Ausbildung erfährt, z. B. das Ovarium. Dazu bedarf es aber wieder einer besonderen Ursache, denn die Verkrüppelung der Flugorgane kann dies nicht bewirken, da ja keine Stoffersparniss gemacht ist. Eine solche Ursache kann aber auch auf normalflügelige Schmetterlinge wirken und wenn sie erfolgreich wirkt, brauchen die Flügel nicht erst verkrüppelt zu sein, damit ihr Bildungsmaterial in Anspruch genommen werden kann, sie brauchen nur nach der Lebensweise der Art nicht unbedingt nöthig zu sein für die Erhaltung derselben.

So kommen wir wieder zu der Anschauung, die ich oben kurz praecisirt habe, dass in Folge einer Variationsrichtung bei manchen Schmetterlingsweibchen primär eine Vermehrung des Eimaterials auftrat, dass dies auf Kosten anderer Organe, speciell der Flügel geschah, die dadurch rudimentär wurden, dass diese Variation der gesteigerten Fortpflanzungsfähigkeit, wenn sie sich befestigte und erblich übertrug, immer nur die Weibchen zu betreffen brauchte und dadurch wird eine ganze Menge von Schwierigkeiten gehoben, die bei der anderen referirten Anschauung bestehen.

Diese Erscheinungen traten bei einer Gattung oder Species früher auf, als bei anderen und sind darum auch dort weiter gediehen, oder sie verliefen im einen Falle rapider und stürmischer, als im andern, wodurch sich die Verschiedenheiten in der Rückbildung der Flügel erklären, die in den einzelnen Gruppen flügeldimorpher Schmetterlinge vorkommen. [1])

Nun lässt sich leicht bemerken, dass diejenigen Schmetterlingsarten, deren Weibchen völlig flugunfähig geworden sind, gewöhnlich auch verkümmerte oder nur sehr schwach entwickelte Saugrüssel haben. Da es auch eine Menge wohlbeflügelter Schmetterlinge gibt, die diesen Mangel zeigen, so könnte man annehmen, dass die genannte Eigenthümlichkeit schon vor Reduction der Flügel bestanden habe, und dass die Degeneration der Flugwerkzeuge sich am leichtesten bei den Weibchen solcher Arten ausbilden, resp. erhalten konnte, welche im ausgebildeten Zustand kein Nahrungsbedürfniss mehr hatten und überhaupt nur eine kurze Lebenszeit als Imago besassen, was gewöhnlich zusammenfällt. In einigen wenigen Fällen haben beide Geschlechter übrigens gut ausgebildete Rüssel, z. B. Lignyoptera, Gnophos, und das zeigt nur, dass die Flügelreduction nicht immer mit der Bedürfnisslosigkeit der Art zusammenzuhängen braucht. In der Gattung Biston aber finden sich zwei europäische Arten, B. hirtarius und stratarius, deren Weibchen wohl beflügelt sind, und die in beiden Geschlechtern Saugrüssel, wenn auch schwach ausgebildete, haben, während die übrigen vier Arten, deren Weibchen ganz rudimentäre Flügel haben, in beiden Geschlechtern des Rüssels entbehren. Wenn diese Formen in Wirklichkeit einer einzigen Gattung angehören, so muss die Rüssellosigkeit mit der Flügel-

1) Vgl. die Liste von Knatz l. c.

losigkeit zusammenhängen und wie diese eine secundäre Erscheinung sein. Für das weibliche Geschlecht ist es begreiflich, dass die Ueberproduction von Eiern nicht nur eine Degeneration der Flügel, sondern auch der Mundtheile zur Folge haben konnte, wenn letztere in Folge der Unfähigkeit zum Fliegen ebenfalls nutzlos wurden. Warum aber haben die Männchen dieser Arten nun ebenfalls die Degeneration der Mundtheile, nicht aber der Flügel überkommen? Da die Männchen auch in Folge einer erblich überkommenen gesteigerten Production von Sperma noch durchaus nicht rudimentär zu werden brauchten, so kann der Mangel des Rüssels nur durch Erbschaft von Seiten der degenerirten Weibchen übertragen worden sein. Es liegt also hier ein Zeichen dafür vor, dass Reductionen des weiblichen Geschlechts auf das männliche vererbt werden können — aber nur solche, welche die Erhaltung der Art nicht gefährden. Vererbte Flügellosigkeit wurde bei den Männchen regelmässig dadurch unterdrückt, dass diese Männchen nicht zur Begattung gelangten, vererbte Rüssellosigkeit hinderte daran nicht, desshalb konnte sie sich allmählich befestigen. Immerhin kann man in dieser Hinsicht noch Zweifel hegen, und es ist sehr wohl möglich, dass Biston hirtarius und stratarius mit Unrecht in dieser Gattung stehen, wie denn auch der ganze Habitus, die Beschuppung von derjenigen der übrigen Bistonmännchen abweichen. Anders liegt die Sache in der Gattung Gnophos, wo neben zahlreichen normalflügeligen Arten mehrere vorkommen, deren Weibchen alle Grade der Flügeldegeneration zeigen: hier sind sämmtliche Arten in beiden Geschlechtern mit normalen Rüsseln versehen.

Bevor wir auf andere Erscheinungen des sexuellen Dimorphismus bei Schmetterlingen übergehen, sollen noch einige allgemeinere Fragen erörtert werden: 1. gibt es Andeutungen dafür, dass die bisher besprochenen Eigenthümlichkeiten mit erhöhter Fortpflanzungsfähigkeit im Zusammenhang stehen und 2. kann man eine Endursache für letztere auffinden, wenn sie den Anstoss zur Degeneration anderer Organe gegeben hat?

Die erste Frage darf wohl bejahend beantwortet werden, und alle Beobachter stimmen darin überein, dass sich die Weibchen der betreffenden Arten durch ganz besonders stark ausgebildeten Hinterleib auszeichnen und auch ungewöhnlich viele Eier legen. Es kommt aber nicht allein auf die Zahl der Eier an, sondern auch auf deren Grösse, weil aus grösseren Eiern grössere, kräftigere, oder auch noch für einige Zeit mit Reservenahrung versehene Räupchen ausschlüpfen können, die im Kampf ums Dasein viel günstiger situirt sein werden, als kleine und solche, welche gleich Nahrung nöthig haben, und zudem ihrer Schwachheit gemäss sehr zarte Nahrung. So schlüpften mir aus den schneckenhausförmig gewundenen Gehäusen von Cochlophanes crenulella, die ich aus Italien mitgebracht hatte, hier in Dorpat eine Menge Räupchen aus, die mich durch ihre Grösse überraschten, sich sofort aus Staub und Sand, den sie von den Muttergehäusen abnagten, Hüllen fertigten, und obwohl sie keine Nahrung annahmen, doch über einen Monat am

Leben blieben! Es gibt zwar unter der Spinnern auch normal beflügelte Arten, deren Weibchen im Zusammenhang mit starker Eierproduction einen sehr schweren Hinterleib haben, wie Liparis dispar, Gastropacha quercus u. A. Aber so gross, wie bei den Orgyia-Arten ist das Missverhältniss doch nicht, und die Spanner, deren Weibchen ungeflügelt oder stummelflügelig sind, zeichnen sich im männlichen Geschlecht zwar gewöhnlich durch grosse, aber sehr zarte Flügel und ziemlich schlechten, schwankenden Flug aus, wie z. B. Hibernia und Cheimatophila, so dass nur eine geringfügige Mehrbelastung des Körpers dazugehört, um den Flug so gut wie unmöglich zu machen. Im Uebrigen sind auch die geflügelten Spinnerweibchen mit grosser Eiermasse sehr schwerfällig und träge, so dass ihnen Rogenhofer ebenfalls eine Degeneration der Flügel prophezeiht, und er mag für manche Arten Recht haben. Es ist jedoch bemerkenswerth, dass die Schmetterlinge, welche in unseren Breiten Weibchen mit stark rudimentären Flügeln haben, alle den recht kleinen und relativ schwächlichen Formen angehören. Man könnte daraus folgern, dass nur bei solchen die reichlichere Eierproduction leicht eine Degeneration der Flügel herbeiführen konnte, oder dass bei grossen Arten, wenn das Nämliche bei ihnen auftrat, wegen der Grösse und Auffälligkeit die Weibchen nicht erhalten blieben, und sich darum die Eigenschaft nicht vererbte.

Recht schwierig ist es, in plausibler Weise die zweite Frage zu beantworten, welche Ursachen eine reichlichere Entwicklung der Geschlechtsproducte bewirkt haben könnten. Wir wissen so wenig vom eigentlichen Wesen der Variation und noch weniger von deren Ursachen, eigentlich nur, dass Thiere variiren können, und dass durch Paarung zweier in gleicher Richtung abgeänderter Thiere die neuen Eigenschaften gesteigert werden, ferner dass durch erhöhten Gebrauch ein Organ gekräftigt, wohl auch etwas umgeformt werden kann und dass solche Abänderungen erblich übertragbar sein mögen. In manchen Fällen können wir einen directen Einfluss der Nahrung nachweisen — besonders auf Färbung; ob derartige Abänderungen aber, wenn durch viele Generationen die gleiche Ursache wirkt, endlich erblich werden, das zu beurtheilen, sind unsere Erfahrungen noch nicht alt genug, und die Versuchsreihen nicht hinreichend consequent fortgesetzt. Und doch muss irgend etwas bei der Gelbfärbung der gezüchteten Kanarienvögel und bei den oft sonderbaren Eigenschaften unserer Hausthiere den Anstoss gegeben haben. Wir suchen nach Ursachen; es muss aber zugestanden werden, dass „post hoc“ und „propter hoc“ recht häufig verwechselt wird. Das Folgende kann daher auch nur ein Versuch sein, eine Endursache für die oben behandelte Erscheinung zu finden.

Die Fortpflanzung ist eine so wichtige Function der Organismen, dass dieselbe auch unter grossen Hindernissen, häufig unter sichtlichem Darben anderer Organe und unter Herabsetzung anderer Thätigkeiten zur Ausführung kommt. In der Pflanzenwelt kann man vielfach die Beobachtung machen, dass gerade die kümmerlichsten Individuen am schnellsten und auch in überraschend reicher Fülle ihre Früchte und Samen reifen. Die Gärtnerei hat sich diese Thatsache längst zu

Nutz gemacht, indem man Pflanzen, welche schnell und reich blühen sollen, ohne zu sehr ins Kraut zu schiessen, in möglichst kleine Töpfe pflanzt, und an jungen Obstbäumen soll man durch Umlegen und Anziehen eines Drahtringes um den Stamm, wodurch der Saftstrom gehemmt wird, reicheren Blüthen- und Fruchtansatz erzwingen können. Bei Thieren, deren physiologische Gesammtleistungen ja viel verwickelter sind, und bei denen Experimente darum viel weniger reine und unanfechtbare Resultate ergeben, zeigen sich solche Erscheinungen nicht in gleich klarer Weise. Ich denke aber, es könnte doch mangelhafte Ernährung auch ähnliche Folgen haben. Die Resultate einer solchen, speciell bei Schmetterlingsraupen, sei es nun dass Mangel an Wärme, oder zu grosse Hitze, zu geringe oder zu grosse Feuchtigkeit die Ernährung hindert, könnten in dreifacher Hinsicht verschieden sein: entweder entstehen, wie oben schon erwähnt, im allgemeinen normale, nur sehr kleine Schmetterlinge; diese werden ihrer geringen Grösse entsprechend auch nur wenig Geschlechtsproducte erzeugen; oder es erscheinen Falter von normaler Grösse und Organisation, aber mit sehr geringfügiger Fruchtbarkeit, oder drittens Imagines mit theilweise verkümmerten Organen aber mit normaler Ausbildung und Productionsfähigkeit der Fortpflanzungsorgane. Diese letzteren sind natürlich in Bezug auf Nachkommenschaft den anderen überlegen. Man darf vielleicht annehmen, dass die verschiedenen Resultate der „Hungerzüchtung,“ die eben aufgestellt wurden, nicht zufällig, sondern im Zusammenhang mit besonderer Beanlagung, einer Art latenter, oder nur in unmerklichem Umfang vorhanden gewesener Bevorzugung des einen oder anderen Organs, sich ausbildeten. Es tritt also die vorher nicht wahrnehmbare Anlage zu besserer Ausbildung dieses oder jenes Organs auf Kosten anderer, oder aller auf Kosten eines einzigen unter den gegebenen Umständen nur deutlich hervor. Bis dahin war es unter normalen Verhältnissen gleichsam ein Ringen aller Organe, das zu einem annähernden Gleichgewicht führte, jetzt hat das Organ, welches schon längst eine kleine Praeponderanz hatte, unter Ausbeutung der Substanz anderer ein bedeutendes Uebergewicht erhalten. In der That leistet ja ein Hungerindividuum, das die normale Menge von Eiern liefert, in dieser Hinsicht eine Ueberproduction und seine Nachkommen können diese Anlage erben. Dass diese Vererbungsmöglichkeit vorhanden ist, lehren uns die Fälle, wo in manchen Familien Zwillings- und Drillingsgeburten durch mehrere Generationen hindurch häufig sind, was jeder Geburtshelfer, der seine Literatur kennt, bestätigen dürfte. Ich kenne einen Fall, wo ein als Drilling geborenes Schaf dreimal hinter einander Vierlinge zur Welt brachte, freilich die beiden letzten Male todt, was aber nichts zur Sache thut.

Nun haben wohl die meisten Insecten in ihren Ovarien beträchtlich mehr Einlagen, als sie wirklich zur Reife bringen. Erben jetzt die Nachkommen jener ungewöhnlich fruchtbaren Weibchen alle, oder zum Theil die erhöhte Fruchtbarkeit, so ist es möglich, dass sie wieder unter normalen Ernährungsverhältnissen auch noch solche Eier zur Reife bringen, die über die bisher übliche Zahl hinaus gehen, und das kann dann wieder nur auf Kosten anderer Organe geschehen; dass das dieselben

sein werden, die auch schon bei den Müttern in Anspruch genommen waren, ist sehr wahrscheinlich. Auf diese Weise könnte die Fruchtbarkeit in relativ kurzer Zeit hoch gesteigert werden, und mit ihr parallel ginge die Verkümmerung anderer Organe.

Was nach dieser Hypothese der Hunger bewirkt, kann reichliche Ernährung allein nicht gut leisten. Wohl könnten durch die zu höherer Eiproduction „beanlagten" Individuen eventuell fruchtbarer werden, aber das Gleichgewicht des Körpers würde nicht so ohne weiteres gestört werden, und ein Theil der grösseren Stoffmenge würde wahrscheinlich auch der besseren Ausbildung anderer Organe zu Gute kommen; vielleicht liegt dieser Fall bei den sehr eierreichen aber wohl beflügelten Weibchen vieler Bombyciden vor. Eine Reduction einzelner Organe, wie der Flügel, kann erst erfolgen, wenn bei zunächst hoch getriebener Tendenz zur Fruchtbarkeit Mangel an Bildungsmaterial eintritt. Natürlich braucht die Reihenfolge der Stadien nicht immer die in vorstehendem niedergelegte, und die Entwicklung nicht eine continuirlich fortschreitende gewesen zu sein, sondern sie kann mit Intervallen, mit zahlreichen Rückschlägen durchsetzt gedacht werden. Die einmal ausgebildete Praeponderanz der Geschlechtsorgane und ihre Folgeerscheinungen kommen bei der ersten Gelegenheit immer wieder zum Durchbruch und befestigen sich mehr und mehr, da die übrigen Individuen allmählich unterdrückt und ausgemerzt werden. Es documentirt sich in dieser Hinsicht das, was ich mit einem kurzen Ausdruck „Bildungs- oder Entwicklungstendenz" nennen möchte.

Eine ganze Menge von Erscheinungen in der Thierreihe macht nämlich den Eindruck, als ob bei einmal angelegten Organen oder bei einer gewissen Variation vorhandener, die von besonderem Nutzen waren, und darum rasch in ihrer Entwicklung gesteigert wurden, gleichsam der ganze Organismus in stürmischer Weise zu deren Weiterbildung in Anspruch genommen wird, so dass weniger bedeutungsvolle oder gar nutzlose Organe rapid zu seiner Förderung verbraucht werden; es sieht aus, als wenn alle überflüssigen Gewebe sich an den Ort der Neubildung stürzen. Diese „Bildungstendenz" ruht auch nicht immer, wenn das Organ seine beste Ausbildung erlangt hat, sondern steigert dasselbe weiter bis ins Maasslose, so dass mitunter geradezu Monströses, Nutzloses, selbst Schädliches das Endresultat ist. Sie hört erst auf, wenn nichts mehr weiter verausgabt werden kann, oder wenn wiederum in Folge eines neuen Anstosses der „Bildungstrieb" anderswohin gelenkt, oder ein neues Gleichgewicht hergestellt wird. Ich kann mir z. B. die enormen Eckzähne von Machairodus, das Geweih des Riesenhirsches, die Stosszähne des Mammuth, die spiralig gewundenen Hauer des Hirschebers, die übergrossen Hörner der Steinböcke und die gewundenen der Schafe, und eine Menge solcher Bildungen, die wir an ausgestorbenen und noch lebenden Thieren anstaunen, und die in ihrer „Ueberbildung" nicht nur keinen erkennbaren Nutzen haben, sondern nur Hindernisse bieten können, nicht anders entstanden denken und bin überzeugt, dass viele Thierarten an den extremen Leistungen eines solchen einseitigen Bildungsdranges zu Grund gegangen

sind. Denn in solchen Fällen ist die Grenze dessen, was die Auslese des best Situirten zulassen könnte, thatsächlich überschritten.

Wenden wir uns wieder speciell zu den Schmetterlingen, so bleibt noch zu untersuchen, ob auch noch andere secundäre Geschlechtscharactere in gleicher Weise als eine secundär ausgebildete Inferiorität der Weibchen betrachtet werden können. Ausser den Flügeln zeigen zunächst die Antennen häufig stark dimorphe Ausbildung, was besonders bei vielen Bombyciden und Spannern, aber auch deutlich bei Sphingiden, Noctuen und manchen Kleinschmetterlingen beobachtet wird. Immer haben die Männchen die grösseren, längeren, dickeren, stärker gekämmten oder gefiederten Fühler, und sind also, da diese zweifellos der Sitz der Geruchsorgane sind, mit diesem Sinne besser ausgestattet als die Weibchen; sie haben auch, weil sie die Suchenden sind, in dieser Hinsicht eine ausgezeichnete Riechfähigkeit sehr nöthig und es ist darum leicht verständlich, dass man, so viel ich sehe, allgemein der Ansicht ist, die stärker ausgebildeten Antennen seien eine secundäre durch allgemeine und sexuelle Zuchtwahl entstandene Ausrüstung der Männchen. Nimmt man an, dass früher einmal bei sexueller Uniformität männliche und weibliche Fühler gleich waren, so werden diejenigen Männchen, welche in Folge einer gelegentlichen Variation Antennen bekamen, die den so nöthigen Geruchsorganen mehr Raum zu reichlicherer Entfaltung und Vermehrung gewährten, am ehesten die Wahrscheinlichkeit gehabt haben, Weibchen aufzufinden, sich mit ihnen zu begatten und ihre neuen Eigenschaften zu vererben. Unter allmählicher Steigerung der Fühlergrösse oder der Flächenvermehrung derselben wurden so die auffallenden männlichen Antennen erzielt, während die Weibchen die früheren einfachen behielten.

Eine Frage tritt bei dieser Anschauung sofort entgegen, warum nämlich die Weibchen nicht auch durch Vererbung etwas von dieser besseren Einrichtung profitirt haben sollten, da sie ihnen doch unmöglich schädlich sein konnte? Es müssen immerhin Ursachen vorhanden gewesen sein, welche es diesen erschwerten oder unmöglich machten, den Männchen auf dem eingeschlagenen Wege zu folgen oder ihnen zur Seite zu bleiben. Man kann darauf antworten, dass zwar auch die weiblichen Thiere die Anlagen zu solchen verbesserten Antennen erbten, und ja auch theilweise in geringerer Ausbildung erhielten, dass sie aber wegen der grösseren Ausgabe für die Fortpflanzungsproducte nicht im Stande waren, die für die männliche Fühlergrösse erforderliche Stoffmenge darauf zu verwenden, weshalb sie bei den ursprünglichen stehen blieben oder doch nur schwache Abbilder der des anderen Geschlechts zur Entwicklung brachten. Es könnte dies gewiss so gewesen sein und ist vielleicht auch in vielen Fällen richtig, aber die einzige Möglichkeit ist es nicht und vielfach scheint es in der That anders gewesen zu sein.

Man kann bei den Schmetterlingen mit dimorphen Fühlern, besonders bei Bombyciden und Spannern an der Puppe schon leicht das Geschlecht erkennen an der Gestalt und Grösse der Antennenscheiden; denn es liegt in der Natur der Sache, dass die Fühleranlage in der Raupe vor dem Uebergang in das Puppenstadium

wenigstens äusserlich in ihrem Epithelschlauch die Grösse und Configuration des ausgebildeten Fühlers hat, beim Weibchen kleiner und einfacher, beim Männchen grösser und complicirter und in dieser Form wird dann auch die Puppencuticula abgesondert. Höchstens könnte man erwarten, dass sich nach dem Ausschlüpfen des Schmetterlings die Antennen noch durch Ausglätten und Strecken vergrössern, wie die Flügel, was aber nicht der Fall zu sein scheint. Bei den weiblichen Puppen von Aglia tau aber finde ich Fühlerscheiden, die sich nicht von denen der männlichen Puppe unterscheiden, von einer Breite, dass man unbedingt einen Fühler von männlicher Form und Grösse erwarten sollte, und doch kommen dann die schmalen, schwach gekämmten zum Vorschein, die den zur Verfügung stehenden Raum ebensowenig ausfüllen, wie die rudimentären Flügel des Acentropus und der Orgyaweibchen ihre Hülle.

Man kann schwerlich daran denken, dass es sich hier gleichsam um einen Versuch der Weibchen handle, die vom Männchen längst erlangte Eigenthümlichkeit ebenfalls zur Ausbildung zu bringen; denn in diesem Falle würden wohl die Fühleranlagen von Generation zu Generation allmählich grösser werden, dann aber jedesmal die fertigen Antennen in der durch die Puppenscheiden angedeuteten Form erscheinen. Das ist aber hier nicht der Fall; auch handelt es sich nicht um Abnormitäten, denn ich fand dasselbe an allen Puppen von Aglia, die mir in den letzten Jahren zu Gesicht kamen und die erzogenen Weibchen waren völlig normal.

Man wird am besten auch diese Sache in derselben Weise auffassen, wie dies für die Flügelstummel geschah, die ja auch ihre Entstehung in viel grösseren Puppenscheiden einer Reduction verdanken: Aglia tau hatte früher in beiden Geschlechtern Fühler von der ungefähren Grösse und Gestalt der männlichen und diese werden auch jetzt noch in jedem Individuum zur Anlage gebracht, was seinen Ausdruck in der Puppencuticula findet. Das Weibchen aber musste grosse Substanzmengen zur Production der grossen und zahlreichen Eier aufwenden, und in Folge dessen wurden Ersparnisse an anderen, weniger wichtigen Organen gemacht, wie in anderen Fällen an den Flügeln (und den Antennen), so hier an den Antennen allein. Diese verloren aber an Bedeutung in dem Maasse, wie die Weibchen durch die Erzeugung grosser Eiermengen schwerfälliger wurden, weniger flogen und sich mehr von den Männchen aufsuchen liessen.

Die Rückbildung der Fühler scheint bei Aglia tau noch nicht sehr alt zu sein, darum tritt immer noch die frühere Anlage auf; bei anderen Arten, wo derselbe Process schon früher oder rascher erfolgte, wird auch in der individuellen Entwicklung die Unterdrückung und Rückbildung früher auftreten, und darum in der Puppe schon die sexuelle Verschiedenheit sichtbar werden, wie bei Gastropacha quercus, rubi etc. Wahrscheinlich ist auch in vielen Fällen diese Rückbildung schon bei den Stammformen ganzer Gattungen geschehen, so dass sich dann der sexuelle Fühlerdimorphismus auf eine grössere Zahl von Arten erblich übertrug. Vielleicht aber wird man bei speciell darauf gerichteter Aufmerksamkeit noch eine Menge derartiger Erscheinungen beobachten können.

Ich will nun durchaus nicht die Möglichkeit bestreiten, dass die Männchen solcher dimorph gewordener Schmetterlinge auch noch ihrerseits ihre Flügel und Antennen einseitig zu noch höherer Ausbildung gebracht haben können, gegenüber dem Stadium, wo beide Geschlechter darin gleich waren. Es wird dies um so mehr der Fall gewesen sein, je weniger die Weibchen in Folge der Degeneration ihrer Bewegungen resp. Geruchsorgane zum gegenseitigen Aufsuchen und Auffinden beitragen konnten; denn nun konnte eine Auslese der in jeder Hinsicht hervorragenderen Männchen erst recht wirksam werden, und so mochte durch Divergenz nach beiden Seiten hin der sexuelle Dimorphismus noch rascher gesteigert werden. Es sollte durch das Vorstehende nur gezeigt werden, dass die auszeichnenden Eigenschaften der Männchen nicht von diesen einseitig neu ausgebildet und gesteigert wurden, wahrend die Weibchen auf dem ursprünglichen Status verharrten, sondern dass beide Geschlechter lange Zeit hindurch in ihrer Ausbildung gleichen Schritt hielten und dass dann erst ein Herabsinken des Weibchens zu einfacheren Verhältnissen stattfand, das selbst zu einem Degeneriren weit unter die Charactere der Stammformen führen konnte, während die Männchen die errungene Höhe behaupteten, selbst noch etwas steigern mochten.

In Bezug auf die Fühler kann man nicht eigentlich von einer Degeneration der Weibchen reden, denn diese Organe sinken ja nur in seltenen Fällen (Psychiden und ähnliche) zur Unbrauchbarkeit oder zu völligem Schwund herab, wie die Flügel, sondern man muss mehr von einer Reduction oder einem Rückschlag sprechen, bei dem eine Annäherung an die früheste Form der Antennen erzielt wird, wie sie für die Stammeltern der ganzen Ordnung characteristisch gewesen sein mögen. Dies wird die Gestalt eines gegliederten Fadens gewesen sein, aus dem sich durch allseitige, einseitige, oder zweiseitige Verbreiterung aller Glieder, oder einiger der an der Spitze liegenden alle Formen der keulenförmigen, gewimperten, gefiederten, kolbigen Fühler einfach ableiten lassen. Wenn wir nun finden, dass die Weibchen fühlerdimorpher Schmetterlinge einfach fadenförmige Antennen oder solche besitzen, die eine Zwischenstufe zwischen diesen und den complicirten der Männchen darstellen, so wird man nicht sagen dürfen, die Weibchen sind erst bei dieser Stufe der Ausbildung angelangt, sondern vielmehr sie sind wieder bei der betreffenden Form angekommen, und man kann solchen Weibchen, vorausgesetzt dass ihre Lebensweise und Eiproduction auf dem eingeschlagenen Wege fortschreitet, eine noch weitere Vereinfachung dieser Organe prognosticiren.

Eine merkwürdige Differenz zeigen viele Tagfalter in der Bildung der Vorderbeine in beiden Geschlechtern, und Aurivillius [1]) hat eine gute Zusammenstellung und Beschreibung dieser Gebilde bei den Rhopaloceren des nördlichen Europas gegeben. Die Vorderbeine sind häufig in eine sogenannte Putzpfote

1) Chr. Aurivillius, Ueber secundäre Geschlechtscharactere nordischer Tagfalter m. 3. Taf. in Bihang till K. Svenska Vet. Acad. Handlinger Bd. 5 Nr. 25. 1880.

umgebildet, die breit beh[illegible] und W[illegible] der aber die Tarsenglieder fehlen oder rudimentär sind. Bei m[illegible]hig sind, n ist dieses in beiden Geschlechtern geschehen und der Putzfuss ist im weiblichen nur kleiner und verkümmerter, was sich in den Rahmen der oben dargelegten Anschauung ohne Weiteres einfügen liesse. In anderen Fällen aber sind die Vorderbeine beim Weibchen viel normaler gestaltet, besitzen deutliche Tarsenglieder und sind überhaupt als Gehwerkzeuge und zum Festhalten gut brauchba[illegible] während sich im männlichen Geschlecht eine bei Weitem stärkere Rückbildung oder besser Umbildung erkennen lässt. Hier ist es zweifellos, dass das Männchen in der Umgestaltung die Initiative ergriffen hat, dem Weibchen in manchen Arten weit vorauseilte und bei anderen ganz allein die Abänderung zeigt, während das Weibchen unverändert blieb.

Nun wäre es ja sehr einseitig und eine völlige Verkennung der Thatsachen, wenn man die Idee vertheidigen wollte, dass Anstösse zu Variationen nur vom weiblichen Geschlecht ausgehen könnten. Ursachen, welche Variationen und Umbildungen bedingen, können ebenso gut auf beide Geschlechter gleichmässig wirken, wie bei Verschiedenheiten der Lebensgewohnheiten auf das eine Geschlecht stärker oder ganz allein. Die Consequenzen aber müssten sich trotzdem in beiden Geschlechtern zeigen, denn im zweiten Falle wird dem nicht direct beeinflussten Geschlecht die neue Eigenschaft durch Vererbung allmählig mitgetheilt. In allen Fällen aber wird die neue Entwicklungsrichtung nur so weit gefördert werden können, als sie nicht die Ausübung der nothwendigen Lebensfunctionen hindert und das kann und wird häufig in beiden Geschlechtern verschieden sein, denn das gleiche Organ, das von der Umbildung betroffen wird, ist für das Männchen vielleicht von ganz anderer Bedeutung, als für das Weibchen. Sowie eine in beiden Geschlechtern etwa aufgetretene oder vom Weibchen auf das Männchen vererbte Flügellosigkeit bei der sehr geringen Lauffähigkeit der Schmetterlinge zum Untergang der Art führen müsste, wenn sie sich allgemein ausbreitete und darum nur im weiblichen Geschlecht sich erhalten konnte, im männlichen dagegen immer wieder ausgemerzt wurde, so wird dasselbe auch für andere Organe gelten. Es kommt wesentlich auf den Werth und die Bedeutung des abändernden Organs an. Mag das umgewandelte Vorderbein der verschiedenen Tagfalter nun eine „Putzpfote" sein oder eine andere Hauptfunction haben, jedenfalls war es für viele Weibchen dieser Thiere in seiner normalen ursprünglichen Gestalt von zu grosser Wichtigkeit, als dass die auch in diesem Geschlecht aufgetretenen „Variationsversuche" besonders viel ausrichten konnten, während es im männlichen einen grösseren Werth durch seine Umgestaltung gewann. Ueberlegt man nun, bei welcher Lebensfunction sich Männchen und Weibchen so verschieden benehmen, dass dem einen diese, dem andern jene Ausbildung der Vorderbeine von Bedeutung sein konnte, so kann man, wie ich glaube, nur den Begattungsact finden. Hier muss sich das Weibchen an seiner Unterlage möglichst fest anklammern können und stützt sich beim Emporheben des Abdomens wesentlich auf die vorderen Beine; das Männchen dagegen,

über dem Weibchen flatternd, stützt sich auf [illegible] mit den hinteren Beinpaaren und biegt das Abdomen nach unten. Dabei [illegible]hkeit bes[illegible] die Vorderbeine vielleicht mehr zum Betasten und Streicheln. Jede Abänderung der männlichen Vordertarsen, welche die Bedeutung derselben als Reizorgan oder Schmeichelapparat erhöhte, war für das männliche Thier vor Vortheil, eine Vererbung auf das weibliche Geschlecht aber gereichte diesem, wenn eine gewisse Grenze überschritten wurde, zu grossem Nachtheil, da in Folge zu geringer Stabilität des Weibchens die Beg[illegible]ung erschwert oder verhindert wurde. Durch Auslese kommen dann am ehesten und häufigsten zur Paarung und Fortpflanzung die Männchen, welche das bestentwickelte Schmeichelorgan, und die Weibchen, welche noch möglichst gut zum Anklammern brauchbare Vorderfüsse besitzen und es bildete sich allmählich aus der Variation des betreffenden Organs ein secundärer Sexualcharackter heraus. Nur bei den Weibchen, die zugleich mit der Umbildung der Vorderbeine auch allmählich den Begattungsmodus änderten, vielleicht die Paarung im Fluge vornahmen, war die Form der Vorderbeine gleichgültig; sie folgten der Variationsrichtung der Männchen völlig, ja aus den oben für die Flügel- und Fühlerdegeneration angeführten Gründen wurde das für sie nutzlose Organe ausserdem noch kleiner und unscheinlicher, es degenerirte.

Es ist nun noch zu untersuchen, ob auch das Colorit der Schmetterlinge in irgendwelchen causalen Zusammenhang mit der Production der Eier resp. der Spermatozoen gebracht werden kann, oder ob es sich hier nur um anfangs zufällige Variationen handelt, für die eine Ursache nicht aufgefunden werden kann, Variationen, die in der Folge aber in allgemeiner und sexueller Zuchtwahl nach den Geschlechtern different weitergebildet und nun als secundäre Sexualcharactere relativ befestigt erscheinen. Wir kommen damit zu einem recht schwierigen Kapitel, in welchem schon die verschiedensten Meinungen geäussert wurden; zwar geht die Mehrzahl der Ansichten dahin, dass es sich im Allgemeinen um einen höheren Schmuck des männlichen Geschlechts handle, der in Folge sexueller Zuchtwahl, durch Auswahl der hübschesten von Seiten der Weibchen gesteigert wurde. Darin liegt nun aber durchaus keine Ursache für das erste Auftreten der Verschiedenheit; denn natürliche und sexuelle Zuchtwahl kann erst einsetzen mit ihrer Wirksamkeit an etwas, das vorhanden ist; etwas Neues, eine Abänderung erzeugen kann sie nicht [1]); dazu sind andere, von diesen Factoren ganz unabhängige Ursachen nothwendig. Es hat aber auch immer einige Stimmen gegeben, freilich vielfach principielle Gegner des Darwinismus und jeder Descendenztheorie, die nachzuweisen suchten, dass die sexuelle Zuchtwahl bei den Schmetterlingen gar keine Rolle spiele. Um nur einige von den Gründen dieser Antoren anzuführen, sie erwähnt, dass man leicht beobachten könne, dass ja

1) Vgl. hierzu: Eimer, Die Artbildung und Verwandtschaft bei den Schmetterlingen. Eine ystematische Darstellung der Abänderungen, Abarten und Arten der Segelfalter-ähnlichen Formen der Gattung Papilio. Jena.

die Männchen die Suchenden und Wählenden sind, und dass die Weibchen, sobald sie überhaupt begattungsfähig sind, jedes beliebige erste Männchen annehmen; dass bei vielen Schmetterlingen die Männchen so viel früher als die Weibchen erscheinen, dass sie meist schon ganz abgeflogen und zerfetzt zur Begattung gelangen, wo dann ihr früherer Schmuck ziemlich fragwürdig erscheine [2]). Man kann auch noch hinzufügen, dass die Pracht der männlichen Schmetterlinge nur in der Ruhe resp. bei ausgebreiteten Flügeln zur Geltung kommt, nicht aber beim raschen Schlagen mit den Flügeln, wie ein solches gerade bei der Begattung so oft zu beobachten ist; ferner dass bei sehr vielen Schmetterlingen mit sexuell dimorpher Färbung und Zeichnung die Männchen für unser Auge wenigsten so übereinstimmend sind, oder doch nur so winzige Unterschiede zeigen, dass von einer Auswahl der „schöneren“ kaum die Rede sein kann; ferner kann man darauf hinweisen, dass bei Schmetterlingen, die am späten Abend oder in der Nacht fliegen — und solche bevorzugen bekanntlich die dunkeln Nächte — wohl kaum eine Unterscheidung geringfügiger Verschiedenheiten, unter denen doch die Weibchen eine Auswahl treffen sollten, möglich ist, ja dass dann selbst intensive Färbungen kann in Betracht kommen werde.

Diesen ziemlich gewichtigen Argumenten gegen eine sexuelle Zuchtwahl wird man vielleicht entgegenhalten, dass wir gar nicht wissen können, wie scharf und deutlich die Schmetterlinge gerade bewegte Körper und deren Einzelheiten zu sehen und zu erkennen vermögen, und wie gut ihre Augen für schwaches Licht eingerichtet sind. Und das ist richtig. Aber ebenso gewiss können wir auch nicht wissen, was einem Schmetterlingsweibchen einer bestimmten Art schöner oder angenehmer erscheinen mag, und doch beurtheilt man ganz ohne Weiteres nach allgemein menschlichem oder selbst persönlichem Geschmack nicht nur die Färbung und Zeichnung, sondern auch die Gerüche und Düfte und andere Eigenschaften, welche die männlichen Thiere besitzen, auf ihren Werth im Kampf ums Dasein und in der geschlechtlichen Zuchtwahl. Sondert ein Thier einen für unsere Nase angenehmen Duft ab, so ist das ein sexuelles Anlockungs- und Reizmittel, riecht uns das Thier abscheulich, so nehmen wir an, dass dies für alle Thiere so sei und sagen, dass ist eine Schutz-, Vertheidigungs- oder Abschreckungswaffe! Und diese Uebertragung unserer Empfindungen auf die Thiere, besonders uns in verwandtschaftlicher Beziehung fernstehende, halte ich für bedenklich. Sehen wir doch Katzen geradezu toll aufgeregt werden vom Geruch des Baldrians, der uns gar nicht besonders wahrnehmbar ist, und wälzen sich ja Hunde mit fast unwiderstehlichem Drang auf halbvermodertem Aas und anderen uns höchst widerwärtig stinkenden Gegenständen, so dass sie den Geruch tagelang im Fell herumtragen. Und das sind Thiere, deren Empfindungen wir noch eher verstehen zu können uns anmassen dürften. Wie nun erst bei Insecten und anderen niederen Thieren! Wir bemerken, dass eine Anzahl von

2) Cf. Seitz Allg. Biol. der Schmetterl. Zool. Jahrb. Abth. I. Syst. Bd. 7. 1890 pag. 829 ff. und mehrere Aufsätze von Schilde. Entom. Nachrichten.

Insecten Gerüche verbreiten, und theilen diese in angenehme und unangenehme, erklären höchstens einmal, der Duft sei für uns indifferent; es ist aber ganz zweifellos, dass zahllose Insecten, die uns völlig geruchlos erscheinen, dennoch starke Gerüche aussenden müssen, denn nur durch solche können die Männchen selbst seltener Arten die weit entfernten Weibchen, oft mitten in grossen Städten auffinden. Die Luft muss voller Gerüche sein im Sommer, sogar sehr intensiver, aber wir riechen sie nicht; wir sehen ja aber auch die ultravioletten Lichtstrahlen nicht, die so starke chemische Wirkungen haben, und wir hören Töne von einer gewissen Höhe ab nicht mehr, auch wenn sie so laut wären, wie die Posaunen von Jericho; die Menschen, welche das Schrillen der Heuschrecken, das Zirpen der Cicaden, die in südlichen Gegenden einem die Ohren gellen machen, das Piepsen der Fledermäuse nicht hören, sind nicht selten, und doch hören dieselben Menschen Töne, die nur wenig tiefer liegen, sehr deutlich. Es handelt sich in solchen Fällen gar nicht um die Feinheit des Sinnesorgans, nicht um die allgemeine Höhe seiner Leistungsfähigkeit, sondern um sein specifisches Unterscheidungsvermögen in gewisser Richtung und das kann für jede Thiergattung, ja für jede Species in besonderem Rahmen ausgebildet sein. So mögen viele Insecten Gerüche, die für uns ungemein intensiv sind, überhaupt nicht wahrnehmen, sicher empfinden sie den Geruch der eigenen Art stark genug, um sich gegenseitig zu finden, und ausserdem noch eine Anzahl von Gerüchen, die auch wir theilweise wahrnehmen, theilweise aber auch nicht. Das geht schon daraus hervor, dass viele Schmetterlinge ihre Eier ganz richtig nur an die Nährpflanze der Raupe ablegen, welche sie doch nur an dem Geruche, der ihnen aus ihrer Jugend bekannt ist, erkennen können; das sind aber Pflanzen, die für uns oft keine Spur eines specifischen Geruches besitzen. Jedenfalls wird jeder Insectenart der Geruch der eigenen Species nicht unangenehm sein, mag er uns erscheinen, wie er will.

Aber man wird noch einen Unterschied machen müssen zwischen Sexualgeruch, der die Geschlechter zusammenführt, und anderen Gerüchen, welche die Thiere sonst noch durch Drüsensecrete erzeugen mögen und oft sicher erzeugen. Ob diese von den betreffenden Thieren überhaupt als Duft empfunden werden, ist noch eine grosse Frage, die nur durch sorgfältige Beobachtung der lebenden Individuen in ihrem gegenseitigen Benehmen beantwortet werden kann. Riechen z. B. die Baumwanzen ihr für uns so stinkendes Drüsensecret, oder empfindet das Stinkthier seinen Vertheidigungssaft, der auf höhere Thiere und den Menschen so furchtbar wirkt, auch als Gestank oder merkt es überhaupt, dass er riecht? Wer will das sicher beantworten? Auf keinen Fall kann der Geruch den betreffenden Thieren besonders unangenehm sein, ja ich glaube, dass es auch eine Menge anderer Thiere gibt, die gar nichts davon verspüren, und gegen solche wären diese Secrete auch kein Schutz, wenn sie als Feinde aufträten. Es ist genau wie mit den giftigen Säften der Pflanzen, die nicht an und für sich giftig sind — denn das gibt es gar nicht — sondern nur weil manche Thiere und der Mensch sie nicht vertragen; andere Thiere machen sich nichts daraus, ja lieben sie sogar. Nichts im oder am Thier- und

Pflanzenkörper hat für andere Organismen eine aprioristische Bedeutung, sondern gewinnt eine solche erst durch das Verhalten der letzteren gegenüber dem Träger gewisser Eigenschaften.

Diese Ueberlegungen zeigen, dass wir völlig im Unrecht sind, wenn wir aus unserem Empfinden und unserem Gefühl heraus derartigen Eigenschaften der Thiere, wie Gerüche, Färbung, Zeichnung eine bestimmte Bedeutung beilegen, und darauf hin vom Nutzen und Schaden der Eigenschaften für den Besitzer sprechen. Nur wenn wir durch zweifellose und zahlreiche Beobachtungen in der freien Natur, oder durch Reihen von Experimenten sichere Beweise von der einen oder anderen Wirkung haben, gewinnen wir das Recht und die Möglichkeit, diese Erscheinungen unter gewisse Gesichtspuncte zu bringen und zu untersuchen, in wie weit natürliche und sexuelle Zuchtwahl an der Ausbildung und Steigerung der Eigenschaft betheiligt sein mögen. In vielen Fällen, z. B, bei den feinen Anpassungen vieler Thiere an ihre Umgebung, bei der sorgfältigen Copirung lebloser Gegenstände und auch bei zahlreichen mimetischen Nachahmungen scheint allerdings die Bedeutung auf der Hand zu liegen; besonders bei der letztgenannten Gruppe aber darf immerhin Vorsicht angerathen werden; denn hier nimmt man vielfach gar zu voreilig oder leichtherzig einen Schutz an, wo er doch erst zu beweisen ist.

Einen sprechenden Beweis dafür, mit welcher Willkühr in der Beurtheilung solcher Dinge mitunter vorgegangen wird, und in wie hohem Grade die Empfindungen des Menschen bei dieser Gelegenheit auf die Thiere übertragen werden, liefert die öfter citirte Abhandlung von E. Haase über Mimicry. Mit Wallace, Bates und anderen nimmt er eine Anzahl von Schmetterlingsfamilien und Gattungen für widerlich, ungeniessbar und darum für geschützt an gegen die Verfolgung der Schmetterlingsliebhaber unter den Thieren. Während nun Wallace der Färbung und Zeichnung solcher Schmetterlinge „die oft recht auffallend und bunt sind, eine Bedeutung als „Schreckfarbe“ oder „Warnungsfarbe“ beilegt, kann Haase nach seinem Empfinden nur selten eine „entschiedene Schreckfarbe“ darin sehen, „wie sie uns z. B. in dem oben gelb und schwarz gefleckten Erdmolch entgegentritt. Ein ähnlich auffallendes Kleid treffen wir nur in der neotropischen Iosien-Tracht an. Dagegen erscheinen schon die meist in Gelb, Rostbraun und Schwarz prangenden Flügelfarben der Neotropinen mehr schön als abstossend. Noch weniger kann man den Begriff von „Ekelfarben“ auf die Färbung der Danaer anwenden, — —. Dagegen ist die Färbung der übrigen Formen — — zwar characteristisch, aber frei von jeder abstossenden Wirkung“ u. s. w, Wie man sieht, äussert sich hier der ganz persönliche Geschmack des Autors; warum ihm aber gerade nur die Combination von Schwarz und Gelb „schrecklich“ ist, wird nicht mitgetheilt. Dann kommt die Reihe an den „abstossenden Foetor,“ der bei manchen Formen wahrgenommen wird. Darüber habe ich mich bereits geäussert.

Da aber die betreffenden Schmetterlinge doch geschützt sein müssen, so sucht er nach einer Ursache, und findet dieselbe in der Nahrung der Raupe.

„Ganz besonders“ (pag. 99) „dürfte die eigenartige Raupennahrung darauf einwirken, dass vorerst die Larve selbst, und dann über die Puppe hinaus auch die Imago durch Aufspeicherung gewisser, besonders emetisch wirkender Gifte zu einem widrig schmeckenden, wenn nicht sogar schädlich wirkenden Bissen wurde.“ Und nun wird nachzuweisen versucht, dass die Raupen vieler als „geschützt“ angenommener Schmetterlinge auf stinkenden, giftigen, schweisstreibenden und diuretisch wirkenden Pflanzen leben. Was in aller Welt gehen denn aber diese Eigenschaften der Nahrung diejenigen der Gewebe der Thiere an? Gewiss wird es Stoffe geben, die mit der Nahrung aufgenommen, nicht verarbeitet und irgendwo im Thierkörper abgelagert werden können, wie ich später bei Besprechung der Färbung zeigen werde, und dass dies mitunter auch giftig wirkende sein können, beweisen die Fälle von Vergiftungen durch Miesmuscheln, Austern u. dgl. Aber die Nahrung immer für die Giftigkeit oder Ungeniessbarkeit der Thiere verantwortlich machen, geht doch zu weit. Denn die meisten der genannten Substanzen werden doch zweifellos zersetzt und sind brauchbare Nährstoffe für die Raupen, aus denen diese ihre Gewebe aufbauen. Wenn die betreffenden Schmetterlinge in der That ungeniessbar sind, was erst noch bewiesen werden muss, so mag diese Eigenschaft von Stoffen herrühren, die sie in ihrem Stoffwechsel erst erzeugen, mag die Nahrung der Raupe sein, welche sie wolle. Die Raupe des Kohlweisslings ist so giftig, dass schon Rinder und Kühe an ihrem Genuss gestorben sein sollen, und sie frisst den harmlosen Kohl; die Bienen, Wespen und Giftschlangen bereiten ihr Gift aus ganz unschuldigen Substanzen, die Baumwanzen saugen allerlei für uns geruchlose Pflanzensäfte und produciren ihr stinkendes Drüsensecret, und das Moschusthier und Stinkthier brauchen doch nicht Dinge zu fressen, welche ihre abschreckenden Stinkstoffe schon fertig zubereitet enthalten! Es ist also auch reine Willkühr, anzunehmen, dass für uns giftige Nahrung der Schmetterlingsraupen in unveränderter Form in die Imago übergehe, und dort einen Schutz bedinge. Ich weiss auch nicht, wie ein Vogel oder eine Eidechse, wenn sie im Verlauf einer halben Stunde zwei Dutzend verschiedene Insecten verzehren und dann Unbehagen verspürten oder krank würden, erkennen sollten, welchem Bissen sie dies zu verdanken haben. Geschützt können nur solche Insecten vor Verfolgung sein, deren Ungeniessbarkeit sich sofort beim Ergreifen oder unmittelbar darnach herausstellt. Denn nur daraus kann der Räuber die nöthige Lehre ziehen und in Zukunft solche Bissen verschonen. Wo aber die Untauglichkeit oder Gefährlichkeit, wie z. B. bei heftig stechenden Insecten, deren Giftwirkung wir bei höheren Thieren ebenso wie bei uns kennen, nicht augenfällig ist, helfen alle Theorien nichts; da führt nur Beobachtung und Experiment zum Ziel. Die Beobachtung muss feststellen, welche Thiere, die sonst Verzehrer von Insecten, speciell Schmetterlingen sind, einzelne Arten meiden, und das Experiment muss mit diesen nämlichen Thieren, eventuell mit den Jungen derselben feststellen, welche Folgen ein Verzehren der gemiedenen Insecten hat, resp. was an letzteren widerwärtig sein mag. Versuche mit beliebigen Vögeln ziehen nicht, denn einmal

gilt auch hier oft das Sprichwort vom Bauern, der nicht verzehrt, was er nicht kennt, denn aber verhalten sich die Thiere sehr verschieden gegen die Wirkungen von Pflanzen und Thieren, wie der Igel gegenüber dem Biss der Kreuzotter, die Ziege gegenüber vielen sonst stark wirkenden Pflanzengiften deutlich zeigen.

Wenn man nun aber einmal annehmen wollte, wir hätten die Fähigkeit und das Recht, die Färbungen und Zeichnungen der Schmetterlinge in Bezug auf ihren biologischen Werth zweifellos zu erkennen, so tritt doch immer noch die Frage auf, ob wir ihre Entstehung und Ausbildung richtig deuten. Man unterscheidet da im Allgemeinen 1. Schutz- nnd Anpassungsfarben und -Zeichnungen, die gewöhnlich unscheinbar, grau oder braun in verschiedenen Schattirungen auftreten und die Schmetterlinge in der Ruhe ihrer nächsten Umgebung oder ihrer Unterlage ähnlich erscheinen lassen: der Rinde der Bäume, dürren Blättern, dem trocknen Boden; selten sind grüne Anpassungsfarben an die frischen Blätter der Pflanzen und niemals so täuschend, wie bei den Orthopteren. 2. Warn- und Trutzfärbungen, welche ungeniessbare Schmetterlinge auffallend bunt und grell erscheinen lassen und hierher kann man auch die Färbungen und Zeichnnngen der mimetischen, schutzlosen Formen rechnen, welche ja die gleiche Bedeutung wenigstens vortäuschen sollen; 3. Pracht- und Schmuckfärbungen der Männchen sonst unscheinbarer Arten, wodurch sexueller Färbungsdimorphismus bedingt wird, und die eine Bedeutung in der Beziehung der Geschlechter zu einander haben sollen. Nach der allgemein herrschenden Ansicht, sind die unter 1 und 2 aufgeführten Färbungen das Resultat der natürlichen, die unter 3 erwähnten das der sexuellen Zuchtwahl. Nun giebt es aber 4. noch eine grosse Zahl von Schmetterlingen, für deren Färbung und Zeichnung diese beiden Factoren nicht herangezogen werden können, denn sie sind nicht geschützt durch besondere Eigenschaften und dennoch recht bunt und auffallend gefärbt, dabei auch durchaus nicht mimetisch. Ein Theil derselben ist zwar in der Ruhe ziemlich gut angepasst, wie die Catocalaarten durch ihre grauen Vorderflügel, viele Tagfalter, wie die Vanessaarten durch die Unterseite der Flügel. Andere, wie viele Bärenspinner, entbehren aber auch dieses Schutzes in der Ruhe. Im Flug fällt auch bei den ersteren der Schutz gänzlich fort, entweder weil sie am Tage fliegend, ihre bunten Farben offen zeigen, oder weil beim Flug in der Nacht die Farben gar nicht in Betracht kommen. Man findet in lichten Wäldern von keinem Schmetterling so häufig die Flügel auf kleiner Strecke zerstreut, als von verschiedenen Catocala- und Bärenarten, welche die Beute von Fledermäusen, Nachtschwalben etc. geworden sind, und im vergangenen Sommer konnte ich beobachten, wie ein Grassmückenpärchen seine fünf Jungen tagelang fast ausschliesslich mit Vanessa urticae, daneben auch mit Parnassius mnemosyne und apollo fütterte, welch letztere in der Gegend sehr selten waren.

Wenn die bunte Färbung solcher Schmetterlinge weder durch natürliche Zuchtwahl — da sie keinen Schutz gewährt — noch durch sexuelle Zuchtwahl — da Geschlechtsdimorphismus fehlt — ausgebildet sein kann, so scheint mir auch

keine Nothwendigkeit vorzuliegen, die unter 2 und 3 oben aufgeführten auffallenden Färbungen diesen Factoren allein und immer zususchreiben. Denn man müsste dann von der Voraussetzung ausgehen, dass die ursprünglichen Schmetterlinge sammt und sonders einfach und unscheinbar gefärbt waren. Diese Annahme entbehrt aber jeder Grundlage. Denn die Färbung eines Thieres, die Ablagerung von Pigmenten in Haut und Hautgebilde ist eine Folge des Chemismus des Stoffwechsels, und ist von dessen eigenartiger Thätigkeit abhängig, kann daher für jede Thiergattung, für jede Species verschieden sein. Was nothwendig ist zur Erzeugung eines rothen, eines gelben, eines schwarzen oder eines anderen Pigments, wissen wir nicht. Aber warum manche Schmetterlinge erst allmählich die Fähigkeit g e w o n n e n haben sollten, grellfarbige Pigmente durch ihren und ihrer Jugendzustände Stoffwechsel zu erzeugen, warum nicht von vorn herein die allerverschiedensten Farben bei den einzelnen Grnppen und Arten aufgetreten sein können, ist doch nicht einzusehen.

Nur wenn man der Ueberzeugung ist, dass der Stammbaum der Lepidopteren ein monophyletischer ist in dem Sinne, dass nur eine einzige Art oder Gattung von Urinsecten die Eigenschaften der Schmetterlingsorganisation durch Variation erlangt habe, und von ihr aus durch reichliche Zerspaltung in Arten, Gattungen, Ordnungen etc. die Fülle der Schmetterlingsformen hervorgegangen sei, könnte man auch annehmen, dass diese Urform und die zunächst von ihr Abstammenden zufällig einfach und unscheinbar gefärbt gewesen seien und dass die bunten Färbungen in der Folge durch natürliche und sexuelle Zuchtwahl erlangt wurden. Aber auch dafür fehlt nicht nur jeder Beweis, sondern ich halte eine solche Annahme für geradezu unwahrscheinlich. Lange bevor es Schmetterlinge gab, existirten schon flugfähige Insecten ursprünglicherer Organisation mit unvollkommener oder allmählicher Metamorphose, vielleicht nahestehend den jetzigen Orthopteren, aber bereits in grosser Zahl und sehr verschiedenen Arten und Gattungen, nicht nur wie heute laufende und springende, sondern auch solche, die oft und lange flogen. Von letzteren, die wiederum recht verschiedene Grössen, Formen und Färbungen hatten, stammen unter Umbildung der Mundwerkzeuge und unter secundären Abänderungen der Jugendstadien ausser anderen Insectenordnungen auch die Lepidopteren ab, ob direct oder indirect, ist hier einerlei. Die gleiche oder nahezu gleiche Umwandlung konnte aber gleichzeitig oder nacheinander bei sehr verschiedenen Gattungen erfolgen, und so ist es leicht möglich, dass die einzelnen heute unterschiedenen Lepidopterengruppen, grössere und kleinere, selbständig und unabhängig von einander ihren Stammbaum bis zu jenen Urformen verfolgen könnten und nicht auseinander hervorgegangen zu sein brauchen; so könnte z. B. das Gros der Rhopalocera, der Sphingidae, der Bombycidae etc. parallele Reihen darstellen, ohne dass dabei ausgeschlossen ist, dass auch bei diesen wieder Variationsrichtungen von einer Gruppe gegen die andere vorgekommen seien, deren Nachkommen jetzt als scheinbare Bindeglieder imponiren.

In solchem Falle ist es aber ganz selbstverständlich, dass schon anfänglich neben einfarbigeren, ja sogar schon angepassten Urschmetterlingen, auch solche von

sehr bunter und auffälliger Färbung gewesen sein werden, und diese Eigenschaften sind bis auf den heutigen Tag noch ganz oder theilweise bei den Nachkommen ordnungs-, gattungs- oder artweise erhalten trotz aller Um- und Abänderungen, welche die Färbung und Zeichnung, Flügelgrösse und Flügelschnitt unterdessen im Einzelnen erfahren haben. Die Aehnlichkeit der Vorderflügel bei den ächten Sphingiden und Eulen mit den als Flügeldecken fungirenden Vorderflügeln der Heuschrecken auch hinsichtlich der Haltung und Function in der Ruhe, die oft bunte Färbung und Zeichnung der in der Ruhe bedeckten Hinterflügel in Uebereinstimmung mit der bei Heuschrecken vorkommenden könnten dann als Erbstücke aufgefasst werden, die bei diesen Thieren gar nicht weitgehender Umbildung durch Zuchtwahl unterlagen, sondern nur durch andersbegründete Variation in den einzelnen Arten mehr oder weniger verschieden wurden. Dann brauchen auch die Warn- und Schreckfarben der ungeniessbaren Schmetterlinge, die hauptsächlich bei Rhopaloceren vorzukommen scheinen, nicht secundär gezüchtete zu sein, sondern sie sind im Allgemeinen e r h a l t e n e, da ihre Träger der Schutzanpassung nicht zu unterliegen brauchten. Die „Schmuckfarben" der sexuell dimorphen Männchen brauchen nicht durch sexuelle Zuchtwahl ausgesuchte und gesteigerte zu sein, sondern sie sind noch alt ererbte Eigenschaften, theilweise nur in Resten vorhanden, während die Weibchen, der allgemeinen Auslese des Günstigeren folgend, secundär unscheinbarer geworden sind. Noch andere, wie Vanessa- und Arctiaarten, deren Raupen Schutz geniessen, oder die sich durch reiche Vermehrung auszeichnen, haben ebenfalls noch ursprüngliche Buntfärbung erhalten; sie variirten nicht in einer Richtung, dass die natürliche Auslese Gelegenheit hatte, Anpassungsfärbungen auszuwählen, oder sie variirten nur in einer Schutz gewährenden Richtung in Bezug auf eine Flügelseite, die natürlich ausgebeutet wurde.

Der Grund, warum bei den Urinsecten — ich denke dabei zunächst an diejenigen, welche bereits Flügel zur Ausbildung gebracht hatten, — auch recht bunte Färbungen auftraten, liegt in den vorhin erwähnten Stoffwechseleigenthümlichkeiten, die wir noch nicht kennen gelernt haben; es sind dieselben Ursachen, welche auch bei niederen Tiefseethieren, sowie bei den Spongien und Coelenteraten sehr grelle neben anderen Färbungen bedingen an Thieren, bei denen sexuelle Zuchtwahl nicht in Frage kommt, und bei denen es sich auch nicht um Schutz- oder Warnfärbungen handeln kann, da sie für die meisten Thiere ungeniessbar sind, eine auch häufige Verletzung ihnen bei ihrem enormen Regenerationsvermögen nichts schadet, und ihre wahren Feinde, wie Schnecken, Anneliden sich nicht auf ihren Gesichtssinn verlassen werden. Sie bekommen und haben diese Färbungen, weil der Chemismus ihres Körpers aus ihrer Nahrung heraus ihnen gerade diese Farbstoffe aufoctroyirt.

Der Grund, warum die geflügelten Urinsecten und mit ihnen die Urschmetterlinge in ihren verschiedenen Unterabtheilungen so vielfach grelle Farben lange Zeit hindurch b e h a l t e n haben mögen, liegt darin, dass in jenen Zeiten gerade flugfähige Thiere nur wenigen Verfolgungen und Gefahren ausgesetzt waren; denn es gab damals weder Vögel noch fliegende Säugethiere, wie es scheint auch noch keine

fliegenden Reptilien. Waren die Gefahren der Jugendzustände überwunden, — und diese mögen bei der gewaltigen Umbildung derselben in Maden, Raupen etc. mitgewirkt haben — so war das ausgebildete Insect vor Verfolgung ziemlich sicher, es mochte gefärbt sein, wie es wollte. Erst später, mit dem Auftreten geflügelter grösserer Feinde waren Variationen nach schutzbringender Seite von Vortheil und nun begannen die vielfachen protectiven Anpassungen durch natürliche Auslese des günstiger Situirten. Arten und Artengruppen, die aber ihrer Constitution nach nicht in solcher Richtung variirten, weil es nicht „in ihnen lag", mussten wohl oder übel so bestehen, wie sie einmal waren: viele werden vernichtet sein, manche sind bis auf die Jetztzeit gekommen; was aus ihnen werden wird, muss die Zukunft lehren. In vielen Arten haben nur die Weibchen einstweilen protectiv abgeändert (Bläulinge u. dgl.), während die Männchen vielfach noch das gefährlichere bunte Kleid tragen. Wie man sieht, fällt bei dieser Anschauung wenigstens die Bedeutung der sexuellen Zuchtwahl für die Schmetterlinge, was das Colorit betrifft, so gut wie völlig weg. Einfachheit ist aber das Gesetz, das die Natur beherrscht.

Man spricht jetzt viel von der „Allmacht der Naturzüchtung". Nimmt man diese zusammen mit der durch Darwin postulirten Fähigkeit der Organismen, nach allen Richtungen hin zu variiren, so muss jene im Stande sein, in jeder Beziehung das unbedingt Günstigste aus jedem Organismus heraus zu bilden. Das scheint aber bei den sog. Warn- und Trutzfarben nicht geschehen zu sein. Denn das Günstigste wäre doch nach menschlichem Ermessen, wenn es nur eine einzige Trutzfärbung gäbe, sagen wir einmal — Gelb oder eine Combination von Schwarz und Gelb. Je weniger Farben oder Farbencombinationen die Insectenfresser als Zeichen der Ungeniessbarkeit merken müssen, desto seltener werden sie sich täuschen und desto sicherer werden die Träger der betreffenden Farben vor Angriffen sein. Wenn man aber nur die Tafeln durchblättert, welche Haase seinem Mimikry-Werke beigegeben hat, so findet man unter den als ungeniessbar angenommenen „Mustern" nicht nur Gelb und Schwarz, sondern auch Roth und Schwarz, und zwar das Roth in allen Schattirungen von Orange durch Dunkelroth bis Braunroth, Weiss und Schwarz, Blau und Schwarz, so wie auch Combinationen von drei Farben; kurz es sind fast alle Farben vertreten, welche überhaupt bei Schmetterlingen vorkommen — abgesehen von den gedämpften grauen und bräunlichen Tönen der „Schutzfärbung". Da nun, ganz abgesehen von den als mimetisch geltenden Formen, noch eine Unmenge wohl geniessbarer Arten mit ganz ähnlichen Farbencombinationen fliegt, so müssen die Schmetterlingsfresser nicht nur viele Färbungen, sondern sogar eine Menge Einzelheiten der Zeichnung kennen oder durch Erfahrung ihrem Gedächtniss einprägen, Zeichnungen von oft sehr feinen Unterschieden, wenn sie Geniessbares von Ungeniessbarem durch das Auge unterscheiden sollen. Eine hervorragende Leistung der Naturzüchtung kann ich darin nicht gerade erkennen. Haben die Schmetterlingsfresser die Fähigkeit, alle diese vielen und feinen Einzelheiten zu erkennen und sich

darnach zu richten, so ist anzunehmen, dass sie Ungeniessbares ebenso leicht bei weniger auffallendem Colorit an kleinen Merkmalen herausfinden würden und die Naturzüchtung hätte nicht nur etwas Ungeschicktes, sondern auch noch etwas Ueberflüssiges und Unnöthiges geleistet. Haben sie das feine Unterscheidungsvermögen nicht, so werden sie sich ebenso oft bei auffallend gefärbten Schmetterlingen wie bei unscheinbaren irren, und in Folge dessen den Schmetterlingsfang ziemlich aufgeben, wenigstens den der Tagfalter mit ihren grossen Flügeln und relativ kleinen Körpern, so lange sie andere bessere Beute in anderen Insectengruppen finden. Es scheint denn auch in der That, als ob die Rhopaloceren nur ausnahmsweise von Vögeln, die allein als Feinde der im Flug begriffenen Taginsecten auftreten — abgesehen von Libellen und anderen Raubinsecten, die nicht sehr wählerisch zu sein scheinen, — genommen werden.

Aus diesen Ueberlegungen geht, wie mir scheint, hervor, dass für die auffallenden, grellen Färbungen und Zeichnungen vieler Schmetterlinge die Naturzüchtung nur in geringem Maasse verantwortlich gemacht werden kann. Entweder hat sie aus den nach allen Richtungen gehenden Variationen nicht immer das Geschickteste und Günstigste ausgewählt — das aber würde ihrem Wesen direct zuwiderlaufen —, oder die Thiere variirten nicht nach allen Richtungen, sondern nur in ganz bestimmten, — dann war sie garnicht im Stande, etwas Bestimmtes zu züchten, das in hervorragendem Maasse nutzbringend war, sondern war in ihrem Wirken höchst einseitig beschränkt. Sie konnte nicht jeder Schmetterlingsart, für die eine Warnfarbe gut war, gerade die schwarz-gelbe anzüchten, sondern es kamen trotz der Naturzüchtung auch viele andere Farben zur Ausbildung. Wenn in der Folge auch diese von Schmetterlingsfressern als Zeichen von Ungeniessbarkeit kennen gelernt wurden, so ist doch die Naturzüchtung daran unschuldig!

Viel mehr kann die natürliche Auslese hinsichtlich der Schutzfärbungen leisten, die den verfolgten Thieren in der Ruhe von grösstem Nutzen waren. Jede Variation, die das ruhende Thier weniger auffallend werden liess, erhöhte für dasselbe die Wahrscheinlichkeit, bis zur Fortpflanzung unbehelligt zu bleiben; bei der grossen Verschiedenheit im Colorit der Orte und Unterlagen, welche die Thiere als Ruheplätze aufsuchen konnten, war hier grosser Spielraum gelassen und Variationen nach verschiedenen Richtungen, kleine und grössere, konnten je nach den Lebensgewohnheiten ausgenützt werden. Wenn freilich gar keine Variation in der Richtung einer Anpassungsfärbung erfolgte, war auch hier die Naturzüchtung machtlos, und solche Schmetterlinge müssen sich eben behelfen, so gut es geht.

Die Frage, in wie fern Zuchtwahl bei der sexuell dimorphen Färbung der Schmetterlinge eine Rolle spielte, ist indessen für diese Untersuchung von geringerer Bedeutung, denn es handelt sich für uns mehr um die Auffindung der Ursachen, welche den ersten Anstoss zum Auftreten einer Färbungsverschiedenheit zwischen Männchen und Weibchen gegeben haben mögen; ob dann allgemeine oder sexuelle Zuchtwahl, oder andere Ursachen diese Differenzen gesteigert haben, kommt erst

in zweiter Linie. Die Schwierigkeiten liegen hier hauptsächlich darin, dass wir es weniger mit der Quantität als mit der Qualität von Bildungsmaterial zu thun haben. Können wir zeigen, dass ein Organ sich weiter ausbildet und vergrössert, während ein anderes gleichzeitig rudimentär wird und endlich verschwindet, so werden wir mit einiger Wahrscheinlichkeit darin eine Correlation und einen sachlichen Zusammenhang vermuthen, denn dort sind Substanzmengen nöthig, die hier entbehrt werden können; und finden wir dann Ursachen heraus, welche als Anstoss zum einen oder andern gedient haben mögen, so sind wir auf dem Wege, eine wirkliche Erklärung zu finden, wie das oben für Flügel- und Fühlerbildungen versucht wurde.

Bei der Pigmentirung der Cuticula und ihrer Schuppen- und Haarbildungen aber handelt es sich um relativ geringe Mengen von Substanzen, die mit der Nahrung aufgenommen, im Stoffwechsel des Organismus mehr oder weniger umgewandelt endlich durch die Epidermis ausgeschieden und in die flüssige Cuticularsubstanz eingelagert werden, manche in feinen Körnchen, andere aber als gleichmässige Lösung. Da nun die physiologische Chemie, oder richtiger die chemische Physiologie der wirbellosen Thiere noch ein vollständig unbebautes Feld ist, da wir in den wenigsten Fällen wissen, welche chemische Constitution die Pigmente haben, aus welchen Stoffen der Nahrung sie entstehen und in welcher Weise sie im Körper zu Stande gekommen sind, so ist auch völlig unbekannt, welches Maass von chemischer Energie, also welche Ausgaben für den Körper nothwendig waren, um das eine oder andere Pigment zu bilden; wir wissen nicht, ob ein schwarzer oder weisser, ein rother oder grüner Farbstoff dem Organismus theurer zu stehen kommt und können darum auch nicht beurtheilen, in welchem Grade die Verschiedenheit im Pigment von grösseren oder geringeren Ausgaben für eine anderes Organ abhängig ist.

Ein grosser Theil der Cuticularpigmente bei Schmetterlingen und anderen Insecten sollen Derivate der Harnsäure sein [1]), andere sogenannte Lipochrome [2]). Iedenfalls sind es in solchen Fällen eine Art von Abfallproducten des Stoffwechsels, die auf gewöhnliche Weise nicht aus dem Körper entfernt, sondern irgendwo, besonders im Fettkörper, der ja Harnsäure enthält, deponirt werden und endlich durch die Epidermis mit ihrem normalen Cuticularsecret abgeschieden werden. Durch die Untersuchungen Kowalewski's wissen wir ja, was übrigens den Pharmacologen schon längst bekannt ist, dass eine Menge von Substanzen, die in den Körper eingeführt werden, in den Stoffwechsel übergehen können, auch wenn sie nicht als Nährmaterialien zu dienen vermögen. Nicht alle können durch die normalen Excretionsorgane ausgeschieden werden, sondern sie erscheinen in den verschiedensten Organen des Körpers — Leber, Milz, Darmepithelien, Cutis, Epidermis etc., entweder in unveränderter Form oder in Verbindungen mit Albuminen, bleiben daselbst längere Zeit aufgespeichert und werden ganz allmählich entfernt. Ein solches Depositorium

1) Griff th. Hopkins (Nature vol. 45).
2) Zopf. (Beiträge Phys. u Morph. Nied. Organismen Leipzig 2. Heft).

ist bei den Insecten die Cuticula und während der Larvenperiode bedingt jedes mal die Häutung ein Fortschaffen der abgelagerten Stoffe. Dass die dadurch erzeugte Pigmentirung nun ein Angriffspunct für die Selection im Kampf ums Dasein sein kann und sein wird, liegt auf der Hand. Zunächst wird die Auslese des Günstigsten einmal diejenigen Formen packen können, die verschiedene Pigmente durcheinander in ihrer Cuticula haben oder an verschiedenen Hautstellen auch verschiedene Farben zeigen und solche eher erhalten, deren Farbenzusammenwürfelung irgend eine günstige Anpassung oder Zeichnung aufweist, und es werden aus der planlosen Färbung Anpassungszeichnungen. Dann aber gibt es offenbar auch individuelle Verschiedenheiten, in Folge deren aus ganz gleichen Substanzen bei mehreren Thieren einer Art dennoch verschiedene Pigmente gebildet werden, oder vermittelst deren die einen Exemplare noch Stoffe durch die Excretionsorgane zu eliminiren im Stande sind, die andere zurückbehalten müssen. Beispiele liefern die Raupen von Vanessa atalanta, Sphinx convolvuli, Deilephila elpenor, Notodonta dictaeoides, tremula, Lophopteryx cuculla und viele andere, die aus Eiern desselben Weibchens hervorgegangen, auf derselben Futterpflanze sich nährend, ohne Rücksicht auf das Geschlecht des Schmetterlings, der aus ihnen hervorgeht, (der übrigens bei den genannten Arten keinen sexuellen Färbungsdimorphismus zeigt) dennoch in zwei oder gar drei ganz verschiedenen Farbenvarietäten vorkommen. Vielleicht, oder sogar höchst wahrscheinlich sind es bei solchen Thieren nur ausserordentlich geringfügige Abweichungen im Chemismus des Stoffwechsels, die entweder in der individuellen Constitution begründet sind, und uns dann zunächst unzugänglich sein werden für eine Erklärung, oder als Reactionen auf kleine äussere Einflüsse auftreten, wodurch aus den gleichartigen Nahrungssubstanzen dennoch Abfallsproducte von etwas verschiedener chemischer Constitution erzeugt werden, die dann in die Cuticula abgelagert, uns als völlig verschiedene Farbstoffe imponiren

Sollte nun aber z. B. die grüne Varietät der Raupe von Deil. elpenor dadurch, dass sie weniger von ihrer Umgebung absticht, häufiger durch die Angriffe der Feinde hindurch bis zur Verpuppung gelangen, als die dunkelbraune, und sollte sich die Fähigkeit der Abscheidung grüner Pigmente in die Cuticula öfter erblich auf einen Theil der Nachkommen übertragen, so würde die grüne Raupe allmählich die herrschende werden. Ich habe mehrfach solche Raupen aus Eiern, die an einem Epilobiumstocke gefunden wurden, aufgezogen; einige blieben grün bis zur Verpuppung, einige wurden bei der letzten Häutung, manche aber auch schon früher dunkelbraun [1]); daran sieht man, dass auch bei einem und demselben Individuum der Stoffwechsel nach dem Alter verschieden sein kann. Uebrigens sind ja eine Menge von Raupen bekannt, die ganz regelmässig in der Jugend total anders gefärbt sind

1) Seitz. Zool. Jahrb. Abth. f. Syst. Bd. VII pag. 176 stellt die Sache umgekehrt dar, als seien die jungen Raupen braun, und werden manchmal bei der letzten Häutung grün. Ich habe oft genug hier zu Lande das Gegentheil beobachtet, und immer nur grüne junge Raupen gesehen.

als im Alter und der Farbenwechsel ist bei solchen häufig an ganz bestimmte Altersstadien gebunden und tritt nach einer gewissen Anzahl von Häutungen plötzlich auf. Aber das ist durchaus nicht immer so. Raupen von Acronycta alni, in der Jugend einem Vogelexcrement täuschend ähnlich, werden mit der letzten Häutung bekanntlich sammtschwarz mit grossen gelben Quersätteln; manche aber erlangen, wie ich aus Züchtungsversuchen weiss, diese Färbung schon bei der vorletzten Häutung, und manche Raupen von Saturnia pavonia, die in der Jugend alle schwarz sind, werden später grün, manche behalten schwarze Quersättel, andere nur schwarze Puncte und einige bleiben fast ganz schwarz. Es ist wahrscheinlich, dass sich hier allmählich durch Auslese festere Typen herausbilden werden, was aber das primäre, was das secundär abgeänderte ist und was der schliessliche Erfolg sein dürfte, wird man mit einiger Sicherheit erst erkennen, wenn speciell auf diese Puncte gerichtete Züchtungsreihen vorliegen, unter Vergleichung der nächstverwandten Arten, Versuche, die im höchsten Grade wünschenswerth sind. Denn sie können das Verständniss für das Zustandekommen neuer Variationen und die wirkenden Ursachen sehr viel mehr und sicherer fördern, als alle theoretischen Betrachtungen, wenn sie ohne Voreingenommenheit, möglichst statistisch angestellt werden.

Bisher war von Raupen die Rede, welche Färbungsverschiedenheiten zeigen bei gleicher Nahrung, wo dann die abweichende Pigmentirung nur daraus resultiren kann, dass der Stoffwechsel individuell, oder nach dem Alter verschieden ist, so dass aus identischen Substanzen verschiedene Farbstoffe erzeugt und in die Cuticula abgelagert werden. Diese Thatsache ist von Wichtigkeit.

Es ist nun die Frage, ob nicht verschiedene Nahrung dadurch Einfluss auf die Färbung zunächst der Raupen gewinnen kann, dass in der einen oder anderen Pflanze Stoffe enthalten sind, mit denen der Stoffwechsel des Thieres nichts anzufangen weiss, so dass sie zwar in den Kreislauf aufgenommen, aber unverändert oder in Verbindungen mit anderen Substanzen als besondere Pigmente in der Cuticula zur Ablagerung gelangen. In dieser Beziehung meint Seitz[1], dass er sich in Folge seiner Erfahrungen an Kane anschliessen muss, der den Einfluss der Nahrung auf Varietätenbildung als im Ganzen erstaunlich gering bezeichnet, ein Urtheil, das auch Wallace schon früher ausgesprochen hat — („insoweit es die Anpassungsfarbe angeht"). Seitz bringt leider in dem betreffenden Kapitel seiner Abhandlung die Einflüsse der verschiedenen Nahrung auf Raupen und Schmetterlinge durcheinander, und es ist doch oft der Fall, dass stark verschiedene Raupen völlig übereinstimmende und ganz gleichförmige sehr variirende Falter liefern können, ausserdem spielt bei ihm der Reflex der Pflanzenfarbe auf die Raupe eine Rolle, eine Sache, die noch sehr der Aufklärung und sorgfältigen experimentellen Beobachtung bedarf. Indessen erwähnt er, dass die Raupen von Cucullia praecana gelb sind, wenn sie

1) l. c. pag. 161.

auf Tanacetumblüthen leben, grün auf Artemisia [1]) und dass nach Hudson die Raupe von Boarmia panagrata auf Neuseeland je nach der Futterpflanze in drei verschiedenen Varietäten vorkommt. Andere Beispiele lassen sich übrigens noch finden: Speyer [2]) findet, dass die Farbe vieler Eupitheciaraupen nach der Nahrung wechselt; doch sei es „nach den bisherigen Beobachtungen unsicher, ob die Farbe des Insects überhaupt von den Stoffen, die ihm zur Nahrung dienen, direct beeinflusst wird. Die Raupe von Acherontia atropos, gewöhnlich (auf Kartoffeln) gelb oder grünlich mit blauen, schwarz gesäumten Schrägstrichen, wird auf Lycium barbarum schwarzbraun, bei einer von Apfellaub lebenden waren die blauen Schrägstriche fast auf der ganzen Oberfläche verbreitet, wodurch dieselbe eine ganz dunkle Färbung erhielt [3]). Poulton [4]) fütterte Raupen von Tryphaena pronuba mit den chlorophyllfreien Mittelrippen von Kohlblättern; die meisten gingen zu Grunde, aber die einzige überlebende blieb weiss mit dunkeln Flecken, während die mit grünen oder auch etiolirten Kohlblättern gefütterten grün oder braun wurden, gleichfalls mit dunkeln Flecken. Aus solchen Erfahrungen, die sich sicher noch vermehren liessen, kann man folgern, dass wohl in manchen Pflanzen oder Pflanzentheilen, wie Blüthen Stoffe enthalten sind, die gelegentlich Einfluss auf die Färbung der Raupen gewinnen, wenn sie weder als Nahrung verdaut, noch auf dem gewöhnlichen Wege ausgeschieden werden können. Sind solche Stoffe freilich den Raupen direct schädlich, so werden sie die fremde Nahrung entweder nicht annehmen, oder daran zu Grunde gehen, und daher mögen viele Misserfolge rühren.

Aber solche Stoffe brauchen auch häufig die Färbung der Raupe nicht zu alteriren, denn sie können ja auch im Innern des Körpers aufgespeichert werden, im Fettkörper, im Darmepithel oder sonst wo. Dann sind drei weitere Möglichkeiten vorhanden: entweder sie werden während der Histolyse im Puppenstadium dennoch zersetzt und zu Brauchbarem verarbeitet, oder sie gelangen dabei in den Harn, den der Schmetterling nach dem Auskriechen abgibt, — in beiden Fällen haben sie weiter keine Wirkung — oder aber sie werden in der Schmetterlingscuticula deponirt und bedingen eine Färbungsvarietät der Imago. Bekannt sind die Varietäten von Arctia caja, die man durch Verfüttern verschiedener Pflanzen an die Raupen erziehen kann: durch Prunus erhält der Falter hellrothe, durch Schöllkraut und Linde gelbliche Hinterflügel; durch Bilsenkraut wird der Schmetterling fast eintönig kaffeebraun, Wallnussblätter, auch Salat, sowie Nährpflanzen, die in Salzwasser stehen, liefern ebenfalls dunkle, Salat manchmal aber auch helle Varietäten, so dass daran wieder individuelle Verschiedenheiten in der Fähigkeit der Raupen zu erkennen sind, manche Substanzen umzusetzen. Die Raupe von Ellopia prosapiaria, die auf Kiefern

---

1) Teich. Correspondenzblatt des Naturforscher-Vereins z. Riga Bd. 19.
2) Stett. ent. Zeit. 44. Bd.
3) Hofmann, Die Raupen der Grosschmetterlinge Europas.
4) Proc. Roy. Soc. London, vol. 54.

lebt, gibt einen röthlichbraunen, wenn sie sich von Fichten ernährt, einen grünen Schmetterling (var. prasinaria). Die Schmetterlinge von Deil. euphorbiae, deren Raupen auf Euph. esula leben, werden auffallend roth, var. od. aberr. esulae. In solchen Fällen ist es zur Zeit nicht möglich anzugeben, welche Substanzen der Nahrung die betreffenden Wirkungen hervorbringen. Deutlicher wird dies in folgendem Falle, der mir von einem hiesigen Züchter mitgetheilt wurde. Er erzog Raupen von Sphinx ligustri auf kleinen, in Blumentöpfen wachsenden Bäumchen von Syringa, die er mit Wasser begoss und spritzte, in welchem Saffran aufgelöst war; fünfzig Procent der erzielten Schmetterlinge waren an den Stellen, wo sonst rothe Färbung vorhanden ist, gelb und glichen dadurch völlig einer im Amurgebiet verbreiteten Form des Ligusterschwärmers. Hier scheint also bei einem Theil der Raupen die Möglichkeit, den Saffranfarbstoff aus dem Körper zu entfernen, gefehlt zu haben und derselbe wurde daher in die Cuticularschuppen des Schmetterlings ausgeschieden; der Fall gleicht völlig dem der Orangefärbung der Kanarienvögel durch Fütterung mit Cayennepfeffer, wird nur dadurch noch interessanter, dass auch in der freien Natur das Züchtungsresultat vorkommt. Vermuthlich nährt sich die Raupe des sibirischen Falters von einer Pflanze, die einen ähnlichen Farbstoff wie Saffran enthält. Da nun die Schmetterlinge mono- oder oligophager Raupen in der Regel ihre Eier an die Nahrungspflanze der Raupen, aus denen sie entstanden sind, absetzen, wohl weil sie aus eigener Jugenderinnerung dieselbe am Geruch erkennen, so ist es verständlich, dass eine derart entstandene Färbungsvarietät, wenn ihre neuen Eigenschaften nützlich, oder auch nur indifferent sind, sich in einer Gegend ausbreiten und befestigen kann.

Die Resultate, welche uns aus solchen Betrachtungen entgegentreten, interessiren für die Frage der sexuellen Verschiedenheiten nur theilweise. Zunächst ist von Wichtigkeit die selbstverständliche Thatsache, dass die Pigmente aus Stoffwechselproducten des Organismus entstehen, denn es knüpft sich daran die Frage, ob es möglich ist, dass im einen Geschlecht dieselben Stoffe oder manche von ihnen noch andere Verwendung finden, und daher der Cuticula in verschieden hohem Maasse entzogen werden können. Zweitens ist wichtig, dass der Stoffwechsel der Raupen sowohl individuell als auch je nach dem Alter derartigen Verschiedenheiten unterliegen kann, dass aus den gleichartigen Nährsubstanzen durch vielleicht geringfügige Aenderungen in den physiologisch-chemischen Vorgängen ganz verschiedenfarbige Pigmente gebildet werden. Denn daraus kann man folgern, dass auch vielleicht genügend starke Unterschiede im Stoffwechsel der Puppen der beiden Geschlechter, etwa in Folge der Ausbildung ganz verschiedenartiger Geschlechtsproducte, vorhanden sein könnten, welche aus den gleichen während des Raupenlebens aufgespeicherten Abfallsproducten Pigmente von verschiedener Färbung erzeugten.

Was den ersten Punct betrifft, so ist nicht zu bezweifeln, dass im weiblichen Geschlecht nicht nur eine grosse Menge lebendiger Gewebe zum Aufbau der umfangreichen Ovarien und ihrer Ausfuhrwege nöthig ist, sondern dass auch zur Aus-

bildung der Eier eine Menge lebloser organischer Stoffe gebraucht werden, einerseits für die Eischalen andererseits für den Nahrungsdotter. Die Eischale oder das Chorion der Insecteneier ist eine Cuticularbildung von Seiten des Ovarialepithels [1]) und es werden dazu die gleichen Stoffe Verwendung finden, wie in den äusseren Cuticulargebilden, selbst wenn dieselben dort in einer anderen chemischen Verbindung auftreten oder noch mit Substanzen vereinigt sind, die in der Körpercuticula fehlen. [2]) Auch die letztere ist schon bei verschiedenen Arthropoden verschieden und das, was man im Allgemeinen Chitin nennt, ist nur ein Sammelbegriff für annähernd ähnliche, aber durchaus nicht gleichartige chemische Substanzen. Aus dem Nahrungsdotter müssen sich die entstehenden Räupchen nicht nur das zu ihrem Körper nöthige Protoplasma, sondern auch ihre Cuticula und deren Pigmente aufbauen können und es werden dafür Substanzen vorhanden sein müssen. Nach Zopf [3]) haben Käfer wie Lyda, Clythra und Coccinella nicht nur in ihren Flügeldecken, sondern auch in Drüsensecreten und in den Eiern carotinartige Farbstoffe (Lipochrome in Krukenbergs Sinn), und man wird für die meisten Insecten, deren Larven pigmentirt aus den Eiern kommen, ähnliches annehmen dürfen. Daraus kann man folgern, dass weibliche Insectenlarven entweder ein grösseres Quantum solcher Substanzen in sich ablagern müssen, wenn die äussere Cuticula in gleichem Maasse wie beim Männchen mit Bildungsmaterial und Pigmenten versehen werden soll, oder dass, wenn der Vorrath gleich gross ist, der weiblichen Cuticula manches entzogen werden muss, was der männlichen zu Gute kommen kann. Ein Mangel an Vorrath für Cuticularsubstanz wird sich dann im weiblichen Geschlecht — ungefähr gleiche Grösse der männlichen und weiblichen Flügel vorausgesetzt — in der Beschuppung der Flügel geltend machen, indem die Schuppen kleiner, weniger complicirt oder weniger zahlreich werden; ungenügender Vorrath an Pigmentmaterial wird bei gleicher Verarbeitung desselben entweder für sich allein oder mit dünnerer Beschuppung zusammen hellere Farbennüancen hervorbringen als das Männchen sie zeigt.

Kommt dazu noch ein Unterschied in den chemischen Vorgängen im männlichen und weiblichen Körper, wenn auch von geringem Umfang, wie es ja offenbar schon, wie wir sahen, bei verschiedenen Individuen derselben Art und bei einem Individuum in verschiedenem Alter auftreten kann, hinzu, so kann daraus eine recht starke Differenz in der Pigmentirung der Geschlechter auftreten, ohne dass dieselbe zunächst irgend eine Bedeutung hat. Eine derartige Verschiedenheit kann aber gar nicht ohne Weiteres geleugnet werden, ja sie muss eigentlich recht oft vorhanden sein gerade in der Periode, wo die Genitalproducte reifen oder bei lebendig gebärenden Thieren die Aufammung derselben in mütterlichen Körper stattfindet. Es brauchen

1) Korschelt. Zool. Anz. 7 Jahrgang Ueber die Bildung des Chorions und der Mikropyle bei den Insecteneiern.

2) Nach Tichomiroff (Zeitschr. f. phys. Chemie 9. Bd.) besteht das Chorion der Eier von B. mori nicht aus „Chitin", sondern aus schwefelhaltigem „Chorionin", das in Alkalien leicht lösbar ist.

3) Beitr. Phys. Morph. d. Nied. Organismen. Leipzig 2 Heft.

ja nur geringe Mengen von Stoffen, die in Verbindung mit anderen ein bestimmtes Pigment bilden würden, zur Constitution des Nahrungsdotters nothwendig zu sein und darin deponirt zu werden, so muss das Cuticularpigment eine chemische Modification erleiden und kann in total anderer Färbung erscheinen. Es ist gegenüber dem männlichen Pigment durch einen Mangel zu Stande gekommen, braucht aber in diesem Falle nicht gerade heller zu sein; es kann ebensowohl dunkler, wie auch völlig verschieden ausfallen. Denn es scheint ganz gewiss zu sein, dass Pigmente von ganz gleicher Färbung auch innerhalb so begrenzter Thiergruppen, wie die Schmetterlinge, recht verschiedene chemische Körper sein können; nach Coverdale [1]) wird manches weisse Flügelpigment durch Ammoniak primelgelb, aber viele Species von Rhopalocera und alle untersuchten Heteroceren blieben unverändert. Daher ist nicht ausgeschlossen, dass beispielsweise ein blaues Pigment durch Mangel einer nothwendigen Substanz braun, ein anderes etwa weiss oder roth würde.

Es könnte sich durch eine derartige Inanspruchnahme mancher Stoffe durch die Eibildung, die dann dem Flügelpigment entgehen, die verschiedene Färbung der männlichen und weiblichen Lycaenaarten und anderer Schmetterlinge erklären, wo das weibliche Colorit nicht einfach eine hellere Nuance des männlichen ist, und man wird dann die öfter vorkommenden blauen oder blau angehauchten weiblichen Bläulinge nicht für solche erklären müssen, die gleichsam den Versuch machen, das „Prachtkleid" der Männchen, das diese secundär durch sexuelle Zuchtwahl herangezüchtet hätten, ebenfalls endlich einmal zu erreichen, sondern es sind solche Weibchen, die trotz der Eiproduction doch noch genug von dem Stoff gehabt haben, der nöthig ist, um die der ganzen Art im Grunde eigenthümliche Blaufärbung zu erlangen. Dafür spricht auch der Umstand, dass die Blaufärbung der Weibchen sich von der Flügelwurzel an ausbreitet, denn dort erhält die Cuticula die Farbstoffe aus dem Körper aus erster Hand und sie werden hier gleich mit Beschlag belegt: sind genug da, so kann auch noch in entferntere Flügeltheile von der Substanz gelangen, welche das braune Pigment in blau glänzendes umwandelt.

In sehr vielen Fällen sind die Weibchen einfach blasser gefärbt, als die Männchen, sie zeigen die gleichen Farben nur in hellerer Nuance, wie viele Spinner, unter den Tagfaltern z. B. Rhodocera rhamni u. a. Hier scheint in beiden Geschlechtern das gleiche Pigment in die Schüppchen abgelagert zu werden, aber beim Weibchen in viel geringerer Menge und das kann man, da es sich dabei um die Quantität gewisser Substanzen handelt, mit grösster Wahrscheinlichkeit in directe Abhängigkeit zu dem Verbrauch bringen, der für die Eier nöthig war, so dass es sich auch hier um eine secundäre Abänderung der Weibchen vom Typus der Art handelt. Und dasselbe wird angenommen werden können bei den Schmetterlingsweibchen, denen einige auszeichnende Farben des Männchens fehlen, wie Anthocharis cardamines und seine Verwandten; gelegentlich kommen auch hier im weiblichen Geschlecht Andeutungen der rothen Flügelspitzen vor.

1) Nature, vol. 30.

Es gibt nun thatsächlich, wie mir scheint, unabweisbare Belege dafür, dass die weiblichen Schmetterlings häufig die in Färbung secundär abgeänderten sind, natürlich nicht immer in jeder einzelnen Art unabhängig von anderen, sondern wahrscheinlich oft genug schon bei den Stammeltern ganzer Gattungen. Sie sind auch schon öfter hervorgehoben worden, aber wie es scheint, mit geringem Erfolg. So zeigt schon Scudder[1]), dass bei solchen Schmetterlingen, welche dimorphe Weibchen haben, in der Regel eine Weibchenform dem Männchen ziemlich oder ganz gleich ist, während die andere mehr oder weniger davon abweicht; männlicher Dimorphismus aber komme nicht vor.

Und E. Haase[2]) kommt bei seinen Untersuchungen über die Mimikry zu dem Resultat, dass „jede mimetische Anpassung vom Weibchen ausging“; da eine mimetische Anpassung nur in Folge von Variation, zunächst des Colorits, zu Stande kommen konnte, so ist damit gesagt, dass die Weibchen sich durch secundäre Färbungsabweichungen vom Männchen entfernt haben. Nur suche und finde ich die Ursachen dieser secundären Variation wie aus Obigem hervorgeht, in ganz anderen Ursachen, als der eben citirte Autor, der auf Seite 108 u. 109 einen ungemein complicirten Weg skizzirt, auf dem dieselbe etwa zu Stande gekommen sein könnte. Auch Eimer[3]) spricht in seinem eben erschienenen Werke über Papilioniden von dem Vorhandensein einer „weiblichen Praeponderanz“, indem die allgemeine Flügelverdunkelung in der Asterias-Gruppe der Schwalbenschwänze wiederholt im weiblichen Geschlecht vorgeschrittener ist, als im männlichen; auch bei Pap. turnus tritt plötzlich die schwärzliche Abart Glaucus des Weibchens neben normal gefärbten auf und gewinnt in einigen Gegenden des Verbreitungsgebiets die Oberhand. „Andererseits weist der dunkle P. asterias wiederum eine höchst merkwürdige plötzliche Umbildung in das Oranienrothe auf bei P. asterias Calverleyi, wobei das Weibchen in der Hellerfärbung vorangeht, was übrigens nicht ganz sichergestellt zu sein scheint (Fussnote).“ Eine ganz gleiche secundäre Färbungsabweichung des Weibchens liegt vor bei Argynnis paphia, var valesina.

Da es sich demnach in all diesen Fällen von sexuell färbungsdimorphen Schmetterlingsarten, bei denen aber auch noch Weibchen von männlicher Färbung vorkommen, um eine in neuerer Zeit erst aufgetretene Umbildung eines Theils der Weibchen handelt, während ein Dimorphismus der Männchen nirgends vorkommt, so wird man fast nothwendig zu der Annahme geführt, dass der sexuelle Dimorphismus auch derjenigen Arten, die nur eine Sorte von Weibchen besitzen, zum grössten Theile, vielleicht immer in gleicher Weise zu Stande gekommen sei. Dann aber müssen der Umbildung Ursachen zu Grunde liegen, die ausschliesslich im weiblichen

1) S. H. Scudder, Antigeny or sexual Dimorphism in Butterflies. Proceed. of the American Acad. of Arts und Sciences. vol. XII. 1877.

2) Erich Haase, Untersuchungen über die Mimicry auf Grundlage eines natürlichen Systems der Papilioniden (Bibliotheca zoolog. Leuckart u. Chun Heft VIII. 1891).

3) Die Artbildung und Verwandtschaft bei den Schmetterlingen. II. Theil. Jena 1895.

Geschlecht wirksam einsetzen konnten, das männliche dagegen intact liessen, und da die einzigen Verschiedenheiten der beiden Geschlechter in den Sexualorganen und speciell der Ausbildung der Fortpflanzungsproducte zu finden sind, so muss dort die Quelle der Variation versteckt liegen. Eimer[1]) deutet denselben Gedanken an, indem er sagt: „Die Ursachen dieser Umbildung scheinen in Verhältnissen zu liegen, welche mit dem Zustand der Geschlechtszellen im Zusammenhang stehen.“ Wahrscheinlich spielen hierbei, den einzelnen Arten und Gruppen nach, nicht immer dieselben äusseren Ursachen eine Rolle, sondern es können die verschiedenen sein, die ich für die Rückbildung der Flügel, der Fühler, sowie einige Seiten vorher im Allgemeinen für Aenderung des Colorits angeführt habe, als Einfluss der Nahrung, persönliche und sexuelle Unterschiede im Stoffwechsel und andere, auf die ich noch zu sprechen komme, vor allem Temperatur und Klima. Wenn nun diese Ursachen derart auf die Weibchen wirken, dass zu Gunsten der Sexualorgane und ihrer Leistungen dem übrigen Körper Substanzen entgehen, wie ich das auseinandersetzte, so kann man mit Eimer nur in dem Sinne von einer „weiblichen Praeponderanz“ sprechen, als es sich um ein früheres, gleichsam vorauseilendes Umbilden der Weibchen handelt, genau genommen ist es aber eine „weibliche Inferiorität“ gegenüber dem Status quo ante der Männchen. Eine Reduction, eine regressive Umwandlung kann aber immerhin, und wird sogar oft einen Fortschritt bedeuten, wenn man eine bestimmte Richtung ins Auge fasst, welche die Umwandlung einschlägt; so ist ja zweifellos die Umwandlung der fünfzehigen Vorderextremität in den Flügel der Vögel eine Degeneration, zugleich aber im Sinne der Vogelbildung ein gewaltiger Fortschritt.

Dass bei den von mir angenommenen Ursachen und ihrer unmittelbaren Wirkung auf den Körper ebensowohl eine ganz allmähliche Steigerung der Färbungsverschiedenheit in der einmal eingeschlagenen Richtung erfolgen kann, wie eine plötzlich auftretende starke Differenz, liegt auf der Hand. Wird nämlich der Pigmentirung der Cuticula in Folge der mehrfach erwähnten Ursachen, oder gar durch Zusammentreffen mehrerer sehr viel Farbstoffmaterial entzogen, oder entgeht diesem Material eine nothwendige Constituante, so kann plötzlich eine starke Verschiedenheit des ganzen Colorits oder einzelner Theile desselben die Folge sein. Steigert sich dagegen die Intensität der Ursachen allmählich, oder reagirt der Organismus erst im Laufe von Generationen stärker darauf, oder bildet sich in Folge eines ersten Anstosses eine bestimmte Entwicklungsrichtung des Körpers heraus, die sich aus sich selbst langsam steigert, so wird das in langsam fortschreitender Weise in der Cuticularfärbung zum Ausdruck kommen. Indessen können auch unter solchen Umständen dennoch einzelne Zeichnungen rasch geändert werden, wenn gerade das für dieselben nothwendige Pigmentmaterial unter völliger Schonung alles Uebrigen nicht mehr gebildet oder in anderer Weise verwendet wurde;

1) l. c. pag. 11.

ich denke da z. B. an einzelne Augenflecke, Randmonde u. dgl. von besonderer Färbung.

Der Umstand, dass es so viele Schmetterlingsarten gibt, welche andersfarbige Weibchen haben, ohne dass man bei ihnen gelegentlich Männchen findet, welche das weibliche Colorit ganz oder theilweise tragen, kann zunächst davon herrühren, dass in solchen Fällen die weibliche Färbung noch kein Artcharacter ist, der sich durch Vererbung überträgt, sondern dass nur immer wieder die gleichen, nur im weiblichen Geschlecht wirkenden Ursachen die Differenz bedingen. Denn hier können die bei der Flügellosigkeit und Fühlerdifferenz in Frage kommenden Nützlichkeits- und Schädlichkeitsrücksichten keine Rolle spielen. Angenommen z. B., durch eine plötzlich aufgetretene Färbungsvarietät der Weibchen würden diese in der That einer Schutz geniessenden Schmetterlingssart ähnlich, so dass auch sie besseres Fortkommen und grössere Erhaltungsmöglichkeit gewinnen, so ist doch nicht einzusehen, warum sich die neue nützliche Eigenschaft nicht auch sofort auf die Männchen durch Erbschaft übertragen sollte! Auch wenn die neue Färbung, gleich der früheren, ganz gleichgültig ist im Kampf ums Dasein, so müsste sie doch vererbt werden auch auf das andere Geschlecht, denn dieses würde ja dadurch in keiner Weise an der Ausübung seiner Functionen gehindert, wie es beim Rudimentärwerden der Flügel oder Fühler der Fall wäre; es gibt also keinen Grund, das neue Colorit, wenn es im männlichen Geschlecht aufträte, auszumerzen. Wenn man einfach sagt, das eine Geschlecht ist das conservativere, so gibt man damit keine Erklärung; entweder muss man die oben dargelegte Annahme gelten lassen, oder die sexuelle Auslese seitens der Weibchen, welche die gleichfalls abgeänderten Männchen zurückweisen, zu Hülfe nehmen. Dass diese aber keine grosse Rolle bei Schmetterlingen zu spielen scheint, wurde oben auseinandergesetzt, und es widerstreitet ihr auch der Umstand, dass gerade die Weibchen die abgeänderten sind. Ausserdem gibt es ja Beispiele, dass wirklich allmählich die Männchen dem Weibchen in der Färbung nachfolgen, nämlich bei allen denjenigen Schmetterlingsarten, die ohne sexuell dimorph zu sein für mimetische gelten und von den Characteren der nächsten Blutsverwandten sehr stark abweichen; Haase sagt, jede mimetische Anpassung gehe vom Weibchen aus und werde oft auf die Männchen übertragen, und das muss ja bei diesen Formen so sein, wenn sie jetzt gleich sind und der erste Satz richtig ist. Die erbliche Uebertragung scheint aber erst stattzufinden, wenn sich bei den Weibchen die neue Eigenschaft durch Generationen hindurch so gefestigt hat, dass sie zu einem wirklichen Characterzug geworden ist, der sich auch bei Fortfall der wirkenden Ursache entwickeln würde. Dann nimmt das Weibchen keine Separatstellung mehr ein, sein Character ist Speciescharacter geworden und kann nun auf beide Geschlechter erblich übertragen werden. Ein anderer Gesichtspunct, der hier noch in Frage kommt, wird später besprochen werden. Durch die bisherigen Auseinandersetzungen könnte der Anschein erweckt

werden, als wolle ich annehmen, dass alle Variationen und specifischen Abänderungen vom weiblichen Geschlecht ausgehen. Das ist nicht der Fall. Es handelte sich ja nur um die Ausbildung des sexuellen Dimorphismus, nicht aber um diejenigen langsameren oder schneller verlaufenden Umwandlungen, welche beide Geschlechter gleichmässig betreffen, einerlei ob dieselben sexuell dimorph sind oder nicht, und durch welche die Entstehung von Abarten und Arten zum grossen Theile abhängt. Wohl wird ja oft auch auf dem bisher skizzirten Wege die Entstehung neuer Arten möglich gewesen sein, wenn die Abänderungen einen Theil der weiblichen Individuen einer Species betroffen haben und die ursprüngliche Weibchenform daneben erhalten bleibt. Wenn dann durch räumliche Trennung, oder durch fortdauernde Wahl gleicher Nährpflanzen seitens der abgeänderten Weibchen und Beibehaltung der früheren durch die ursprünglichen, oder durch Einfluss der Jahreszeiten und des Klimas neben einander beide Weibchenformen bestehen bleiben, so kann endlich auch ein Theil der Männchen durch Vererbung zu gleicher Abänderung beeinflusst werden. Ist das erst einmal geschehen und die Aehnlichkeit eines Theils der Männchen mit den abgeänderten Weibchen sehr gross, so könnte man eher an eine sexuelle Auslese denken, wonach eine Bevorzugung der ähnlichen Männchen den neuen Character bei den Nachkommen befestigt und steigert, oder es können correlative Verhältnisse eine Rolle spielen, wie sie Romanes und Eimer unter der Bezeichnung „Kyesamechanie“ annehmen.

Häufiger jedoch werden wahrscheinlich beide Geschlechter gleichzeitig zur Abänderung beeinflusst, entweder durch das, was ich früher schon „Entwicklungs-“ oder „Umbildungstendenz“ genannt habe, und was Eimer als „organisches Wachsen“ bezeichnet, — ich glaube, wir meinen beide damit ziemlich das Nämliche —, oder aber durch Einflüsse, welche auf beide Geschlechter gleichmässig umwandelnd einwirken. Hier kommen wahrscheinlich Nahrung und Temperatur in erster Linie in Betracht, wenigstens was die Färbung anlangt. In Bezug auf erstere wurden oben schon Beispiele angeführt, wo Schmetterlinge ohne Rücksicht auf das Geschlecht durch besondere Nahrung abweichend gefärbt werden können und besonders lehrreich sind hierin die mit saffranhaltigem Futter ernährten Ligusterschwärmer. Ueber den Einfluss des Klimas, speciell der Kälte und Wärme sind eine Menge Fälle von Saisondimorphismus bekannt, und in neuerer Zeit auch directe Versuche mit vielen Schmetterlingen angestellt worden. Allerdings sind diese Versuche zum Theil sehr zweifelhaft ausgefallen, aber ich meine, die Hauptschuld liegt daran, dass man Schmetterlingsarten gewählt hat, die in relativ geringem Umfang variabel sind, obwohl ihr Verbreitungsgebiet vom hohen Norden bis weit gegen die Aequatorialgegend reicht. Dann aber mögen solche Experimente auch noch an Mängeln leiden, die vielleicht von unrichtigen Voraussetzungen ausgehen. Man sagt gewöhnlich, durch Einwirkung von Wärme erzielt man diese, durch Kälte jene Färbungsvarietät; es ist aber gar nicht bewiesen, dass die Temperatur direct die Verschiedenheit des Pigments erzeugt. Wir wissen nur, dass Kälte die Entwicklung eines Schmetterlings

in der Puppe verlangsamt, Wärme dieselbe beschleunigt, und dass dabei Coloritverschiedenheiten auftreten können. Bei der Pigmentbildung handelt es sich um chemische Umsetzung und Erzeugung von Stoffen durch den Stoffwechsel. Unterhalb eines für jede Art vielleicht verschiedenen Temperaturminimums hört vermuthlich der Stoffwechsel ganz auf und solch niedere Temperaturen haben dann am Ende gar keinen Einfluss, da hiebei keine Umsetzungen stattfinden werden. Von Wichtigkeit aber dürfte es sein, wie lange gerade diejenigen Temperaturgrade einwirken, bei denen eben noch der Stoffwechsel, aber ungemein langsam thätig ist. Denn es kommt bei Bildung organisch-chemischer Substanzen häufig sehr viel darauf an, wie rasch oder langsam der Process verläuft, das Resultat kann ungemein verschieden sein. Wenn man also z. B. Puppen eines Tagfalters 30 Tage lang im Eiskeller hält und dann in Zimmertemperatur bringt, worauf dann nach 6—8 Tagen die Schmetterlinge erscheinen, so kann man nicht wissen, ob nicht fast die gesammte Entwicklung gerade im Laufe dieser letzten Zeit stattgefunden hat. Interessant und von Bedeutung ist es dann gewiss, wenn man auch in diesem Falle schon Wirkungen constatiren kann. Aber ganz anders würden die Resultate vielleicht, wenn man erst durch Untersuchung zahlreicher Puppen, die man in verschieden niedrigen Temperaturen hält, die Minimaltemperatur feststellte, bei welcher überhaupt noch Entwicklung stattfindet, und dann den ganzen Process bei der so aufgefundenen Temperatur sich abspielen liesse, einerlei wie lange er dauert. Möglicherweise sind für verschiedene Entwicklungsstadien auch verschiedene Wärmegrade nothwendig. Dann auch dürfte es einen Unterschied ausmachen, wenigstens bei vielen Arten, ob die Kältewirkung einen Monat dauert, oder, wie es bei den nördlichen Formen in der Natur vorkommt, vier bis sechs Monate, ob sie continuirlich und gleichmässig, oder mit Intervallen, mit Steigerungen und Abschwächungen arbeitet.

Es kann indessen auch nach den bis jetzt angestellten Experimenten und durch den Vergleich nordischer und südlicher Schmetterlinge, sowie Sommer- und Wintergenerationen nicht geleugnet werden, dass die durch verschiedene Temperaturen beschleunigte oder verlangsamte Entwicklung von Einfluss auf die Färbung, ja auch auf Flügelschnitt und andere Eigenschaften sein kann [1]). Ob aber durch Kälte dunklere oder hellere, leuchtendere oder stumpfere Färbung erzielt wird, das hängt von der Art des Pigments, resp. des Schmetterlings ab [2]); denn sei es nun die Temperatur direct oder der durch dieselbe verlangsamte chemische Process, die Grundstoffe, aus denen sich die Pigmente aufbauen, sind bei den verschiedenen Schmetterlingsarten, auch für völlig gleich erscheinende Farbstoffe, dennoch oft sehr verschieden, und darum lassen sich allgemeine Regeln nicht aufstellen. Hierüber können nur Reihen von Beobachtungen und Versuche Aufklärung geben. So ist die nordische

---

1) Auch Weismann (Neue Versuche zum Saisondimorphismus der Schmetterlinge, Zool. Jahrb. Abth. f. Syst. S. Bd. 1895) erkennt dies wieder an.

2) Vgl. Eimer l. c pag. 43.

und Kälteform von Pieris napi, die var. bryoniae auffallend dunkler, die Wintergeneration von Pieris rapae aber heller, d. h. sie hat weniger dunkle Zeichnung, als die Sommergeneration [1]). Es gilt hier dasselbe, was oben schon für die Färbungsabänderungen im weiblichen Geschlecht allein angeführt worden ist.

Indem wir uns zum sexuellen Dimorphismus zurückwenden, haben wir noch zu untersuchen, ob sich auch Verschiedenheiten in der Beschuppung, also in der Reichhaltigkeit der Cuticularbildungen nachweisen lassen, die man auf einen grösseren Verbrauch von Cuticularsubstanz im weiblichen Geschlecht für die Eier zurückführen kann. Wenn dies der Fall ist, so gewinnt die Annahme, dass es sich bei den sexuell dimorphen Schmetterlingen meistens um eine secundäre Inferiorität der äusseren Charactere der Weibchen zu Gunsten der Geschlechtsproducte handle, eine neue Stütze.

Man kann schon mit blossem Auge sehen, dass bei vielen Bombyciden die Flügel der Weibchen nicht nur heller gefärbt, sondern auch bedeutend durchscheinender sind, als die der Männchen und bei schwacher Vergrösserung erkennt man, dass dies darin seinen Grund hat, dass die Schuppen zerstreuter stehen und sich nicht so stark ziegelartig decken. Da aber hier die weiblichen Flügelflächen in der Regel grösser sind, als die männlichen, so braucht kein Minus in der Schuppenzahl vorzuliegen. Gleichwohl wird man sagen dürfen, dass trotz der umfangreicheren Flügel doch nicht mehr Material auf dieselben verwendet ist, als beim Männchen, wenigstens nicht in demselben Verhältniss, als der Grössenzunahme des Körpers und der Flügel proportional wäre, und daher kann man das wohl als eine Flügel- und Beschuppungsreduction bezeichnen. Viel grösser und besser festgestellt sind die Beschuppungsunterschiede bei den Rhopaloceren, die nur wenig in Hinsicht auf Flügelgrösse beider Geschlechter differiren. Längst bekannt sind die sog. „Männchenschuppen“ dieser Schmetterlinge, von Aurivillius [2]) mit diesem Namen belegt, weil sie niemals bei den Weibchen vorkommen, und also eine auszeichnende Eigenschaft des männlichen Geschlechts bilden. Sie sind von den übrigen Flügelschuppen abweichend gebaut und gestaltet, bald in nur geringem Grade, bald aber auch so stark, dass sie ganz und gar den Character von Schuppen verlieren, wie z. B. bei den ungemein feinen, fadenartigen „Gliederschuppen“ der Pamphila- (Hesperia-) Arten. Eine vortreffliche Zusammenstellung und Schilderung gibt Aurivillius. Bei vielen Arten finden sie sich in regelmässigen Reihen zwischen den gewöhnlichen Schuppen über die ganze Oberseite der Flügel verbreitet, bei anderen nur an beschränkten Stellen, die zuletzt kleine Fleckchen bilden und hier sind sie so zusammengedrängt, dass die Normalschuppen keinen Platz zwischen ihnen finden; wieder

---

1) Reichenow Beiträge zur Biol. u. Physiol. (Entom. Nachr. 5. Jahrgang). Vgl. auch J. Boll. Ueber Dimorphismus u. Variation einiger Schmetterlinge Nordamerikas. (Verhandl. des Ver. f. naturw. Unterhaltung in Hamburg. 3. Bd. 1878).

2) Aurivillius, Chr. Ueber secundäre Geschlechtscharactere nordischer Tagfalter. (Bihang till k. Svenska Vet. Acad. Handlingar Bd. 5, Nr. 25. 1880).

bei anderen Arten stehen sie dicht gedrängt und am stärksten modificirt auf einigen Hauptadern der Flügel, überwölbt von grossen Normalschuppen oder auf dem umgeschlagenen Vorderrand der Vorderflügel, so in eine Art Hülse eingeschlossen. Derartige umgeschlagene Vorderränder sind auch weit verbreitet bei den Tortriciden, und auch hier nur im männlichen Geschlecht.

Da die genannten Schuppen besonders in den Fällen, wo sie auf kleine Flügelstellen zusammengedrängt oder gar von Schutzeinrichtungen umgeben sind, meist ganz ungewöhnliche Gestalt und Structur haben, so nimmt man wohl mit Recht an, dass sie eine besondere Bedeutung haben werden. Es ist aber keineswegs festgestellt, welche. Aurivillius denkt daran, dass sie Sinneswahrnehmungen dienen könnten; das ist jedoch höchst unwahrscheinlich, da die Schuppen selbst im ausgebildeten Zustande völlig trockene und todte Cuticulargebilde und auch in der Flügelmembran keine lebenden Gewebe mehr vorhanden sind, geschweige denn Nerven, die zu den einzelnen Schuppen ziehen. Viel mehr Wahrscheinlichkeit hat die Ansicht von Fritz Müller [1]) für sich, der annimmt, dass von diesen zusammengehäuften Schuppen ein Duft ausgehe, der bei manchen tropischen Schmetterlingen auch für das menschliche Geruchsorgan wahrnehmbar sei. Dass man sich über die Herkunft solcher Gerüche leicht täuschen kann, ist sicher. Aber dass in Cuticulargebilde von Seiten der ausscheidenden Zellen aetherische und flüchtige Stoffe abgelagert werden können, die dann auch den trockenen Schüppchen noch entströmen, ist sehr wohl möglich, gerade so gut, wie ja auch in Raupenhaaren giftige Stoffe abgelagert werden, die auch im trocknen Zustand noch wirken können. So wäre es aber auch möglich, dass die Männchenschuppen trockene Substanzen enthalten, die je nach den Arten ganz verschiedene Wirkung hätten, unter anderem auch gelegentlich giftige. Müller nimmt nun freilich an, dass diese Schuppen, da sie nur beim Männchen vorkommen, mit der Geschlechtsthätigkeit in Zusammenhang stehen und durch sexuelle Zuchtwahl ausgebildet und gesteigert seien; er nimmt sie darum für Duftapparate, welche zur Begattung reizende Stoffe verbreiten. Schon Aurivillius (l. c,) bekämpfte die Ansicht, dass die sexuelle Zuchtwahl dabei eine Rolle gespielt habe ebenso wie bei den Färbungsunterschieden der Männchen [2]). Es ist hier nicht unsere Aufgabe, die physiologische Bedeutung der Männchenschuppen zu prüfen, sondern zu untersuchen, wie ihr Vorkommen und ihre Vertheilung zu verstehen ist, wobei wir uns an Aurivillius halten und die dort behandelten Schmetterlinge allein berücksichtigen. Zunächst muss festgestellt werden, dass es in engbegrenzten Schmetterlingsgattungen, bei denen Männchenschuppen vorkommen, auch Arten gibt, denen sie völlig fehlen, so bei Lycaena den Arten orion,

---

1) Fritz Müller. Ueber Haarpinsel, Filzflecke und ähnliche Gebilde auf den Flügeln männlicher Schmetterlinge. (Jena'sche Zeitschr. f. Naturw. Bd. XI. 1877).

2) Siehe bei Aurivillius l. c. auch die übrigen Ansichten über die Bedeutung der Männchenschuppen, welche dort schon widerlegt werden.

alexis und eumedon; bei Thecla den Arten quercus, betulae und ilicis, in der Gattung Coenonympha kommen sie nur bei C. pamphilus vor; von den Argynnisarten besitzen sie nur A. paphia, adippe, niobe und aglaia; von den Coliasarten hat sie nur C. edusa in einem kleinen Fleck der Hinterflügel. Was die Vertheilung der in Rede stehenden Gebilde auf der Flügelfläche — sie kommen nur auf der Oberseite vor — anlangt, und zwar ohne Rücksicht auf die Verschiedenheit ihrer Gestalt, so sind sie fast über die ganzen Flügel gleichmässig in Reihen angeordnet bei den Gattungen Aporia, Pieris, Anthocharis, Lycaena; an kleineren fleckenartigen Stellen der Flügel bei Colias (Hinterflügel), Thecla, Coenonympha, Pararge, Hipparchia, Epinephele, Satyrus, Oeneis (Vorderflügel); auf dem Verlauf einiger Adern bei Argynnis, Hesperia und in einem Costalumschlag der Vorderflügel bei den Gattungen Nisoniades (-Thanaos) und Syrichthus [1]).

Wenn wir uns nun die Frage vorlegen, was ist das Ursprüngliche in den genannten Gattungen, die gleichmässige Vertheilung der Männchenschuppen oder die Beschränkung auf kleine Stellen, so finden wir, dass bei Colias edusa und den Theclaarten an den betreffenden kleinen Flügelstellen ausschliesslich Männchenschuppen in so dicht gedrängter Stellung zusammengehäuft sind, dass durch ihre feinen Insertionspuncte die Flügelmembran ganz getrübt erscheint, ja bei Thecla ist sogar im Zusammenhang mit der Ansammlung dieser Gebilde der Adernverlauf der Vorderflügel wesentlich modificirt. Auch bei Hesperia und den Argynnisarten stehen den Adern entlang eine kleine Strecke weit ausschliesslich Männchenschuppen in dichtestem Gedränge, oft noch von vergrösserten Normalschuppen wie von Schutzhüllen umgeben, und letzteres ist noch ausgeprägter bei den unter einem Costalumschlag angehäuften Männchenschuppen der Gattungen Nisoniades und Syrichthus. Hier sind also, wenn die Männchenschuppen eine besondere Function haben, was offenbar der Fall ist, wirkliche Organe von z. Th. hoher Complication vorhanden, während bei den übrigen Schmetterlingen die Einzelgebilde, welche diese Organe constituiren, auf grössere Strecken zwischen anderen Schuppen zerstreut liegen. Dazu kommt, dass die Männchenschuppen, welche solche localisirten „Organe" zusammensetzen, am weitesten von der normalen und gewöhnlichen Schuppenbildung abweichen, wie die „Federbuschschuppen" der Argynnis, die Haarschuppen und Gliederschuppen bei Nisoniades und Syrichthus und durch die zerstreuten Männchenschuppen der anderen Arten allmählich von den Normalschuppen der Flügelbedeckung abgeleitet werden können. Es ist nun höchst unwahrscheinlich, dass bei einigen Arten einer Schmetterlingsgattung, wie Argynnis oder Thecla im männlichen Geschlecht ein Organ entstanden und zu hoher Ausbildung fortgeschritten sei, das den übrigen Arten gänzlich fehlt, oder dass aus einem einheitlichen Organ, welches an beschränkter Stelle zur Ausbildung kam, durch Zerstreuung seiner Elemente eine Beschuppung zu Stande gekommen sein soll, wie wir sie bei den Pieriden und Ly-

1) Ich folge der Nomenklatur des Catalogs von Staudinger.

caeniden finden und hier wieder nicht bei allen Arten. Ich glaube auch nicht, dass sich in der übrigen Thierreihe analoge Thatsachen finden lassen, dagegen ist es nicht selten, und genau genommen auch das naturgemässe, dass sich aus anfangs zerstreuten Gebilden durch secundäre Annäherung und Zusammengruppirung einheitliche Organe aufgebaut haben, oder dass bei gleichzeitigem Verschwinden zerstreuter Apparate an anderen Körperstellen bessere Ausbildung und Umbildung der erhaltenen zu Stande kam. Ich möchte nur erinnern an die Entstehung von Wimperkränzen und -Schöpfen aus ursprünglich zerstreuten Cilien, an die Anhäufung von anfangs zerstreuten Sinneszellen in den Sinnesgruben (Riech- und Hörgruben), an das Verschwinden der Hautzähne und Erhaltung und Weiterentwicklung der Mundzähne, an die grossen Schuppen der Spiegelkarpfen als Rest allgemeiner Hautbeschuppung, an die Concentrirung der Entstehungstellen der Genitalproducte zu Ovarien und Spermarien; ferner kann man anführen die Erhaltung und stärkere Ausbildung der Haare an einzelnen Hautstellen des Menschen, der Schweisdrüsen bei vielen Säugethieren, der Milchdrüsen und dergl. mehr.

Solche Thatsachen in Verbindung mit den oben angeführten Verhältnissen der Männchenschuppen bei den Tagfaltern machen es im höchsten Grade wahrscheinlich, dass diese Cuticulargebilde ursprünglich, wie jetzt noch bei den Pieriden und Lycaeniden gleichmässig über die ganze Oberseite der Flügel vertheilt waren und dass sich aus ihnen durch Zusammengruppirung an beschränkte Stellen unter verschieden weitgehender Modification die „Männchenschuppen-Organe" einzelner Gruppen constituirt haben. Da sich nun weiter unter den Gattungen mit zerstreuten Männchenschuppen auch Arten finden, die nur relativ wenige, und andere, die gar keine solche Schuppen haben, sowie bei den Gruppen, welche localisirte Männchenschuppen besitzen, sich auch wieder Uebergänge von höherer zu schwacher Ausbildung antreffen lassen neben solchen, die keine Spur davon aufweisen, so wird man den Mangel durch einen secundären Verlust, eine Degeneration der Gebilde erklären können. Sie werden demnach auch keine allzu grosse Bedeutung mehr bei den Gattungen haben, bei welchen man theils nur geringfügige Reste oder grosse Schwankungen zwischen nächst verwandten Arten nachweisen kann, und man wird eher ein allmähliches Verschwinden als eine Steigerung der Gebilde voraussagen dürfen. Ich bin geneigt anzunehmen, dass die Männchenschuppen ursprünglich nichts anderes, als gewöhnliche Schuppen gewesen sind, welche damals aber schon einzelne Structureigenthümlichkeiten in Verbindung mit irgend welchen Nebenfunctionen besassen; weiterhin behielt ein Theil der Schuppen diese Eigenschaften und bildete sie weiter aus, in dem Maasse, wie die übrigen Schuppen die Nebenfunction verloren; bei manchen Schmetterlingen blieben sie zerstreut zwischen den letzteren, bei anderen wurden sie an einzelne Stellen concentrirt; sie sind aber im Verschwinden begriffen und bei vielen Faltern bereits verschwunden.

Sollten dann aber diese Schuppen von Anfang an nur den Männchen eigenthümlich gewesen sein? Ich sehe keinen Grund für diese Annahme, sondern ich

meine, die Ahnen der Rhapoloceren und anderer Schmetterlinge, welche ähnliche Bildungen zeigen, waren in beiden Geschlechtern ganz gleichmässig beschuppt und zwar reichlicher und dichter, als die Weibchen jetzt. Diese aber erlangten nach und nach aus den nun schon mehrfach betonten, mit den grösseren Ausgaben für die Fortpflanzung in Zusammenhang stehenden Ursachen eine dünnere Beschuppung und es blieben zunächst diejenigen Schuppen aus, die ich als „Schindelschuppen" bezeichnen möchte, welche eine Füllung und Dichtung zwischen den „Grund-" und „Deckschuppen" [1]) bedingten, und welche den Männchenschuppen homolog waren.

Bei den Tagfaltern, die keine Männchenschuppen besitzen, besteht die Flügelbedeckung in der Regel aus zwei Lagen von Schuppen, die von Tetens als Grundschuppen und Deckschuppen bezeichnet wurden und die besonders bei schillernden Arten wie Morpho, Apatura u. a. ganz verschiedenes Pigment enthalten. Eine solche Flügelfläche gleicht einem Dach mit doppeltem Ziegelbehang. Man überzeugt sich am leichtesten davon und erhält hübsche Praeparate in folgender Weise: ein feines und klares Gelatineplättchen legt man auf eine mehrfache Unterlage von glattem Papier, haucht die Gelatine an und legt rasch den abgeschnittenen Flügel mit der Oberseite darauf; dann bedeckt man das Ganze mit einem dünnen aber glatten Papier und drückt mit den Fingerspitzen den Flügel fest auf die Unterlage, wobei man durch vorsichtiges Reiben mit dem Daumennagel nachhelfen mag. Nimmt man nun das Papier weg, so kann man den Flügel leicht von der Gelatine abnehmen und an dieser haftet nun die ganze obere, die Deckschuppenlage. Derselbe Process wiederholt überträgt auf ein neues Gelatineplättchen die Grundschuppenschicht. Die durchsichtige und dünne Gelatine bietet dann den Vortheil, dass man jede Schuppenlage bei durchfallendem Licht, wie auch von beliebiger Seite bei auffallendem betrachten kann.

Behandelt man in angegebener Weise einen Flügel eines Bläulings, so bleiben gewöhnlich beim ersten Abzug ausser den hellen, blau schillernden Deckschuppen auch sämmtliche in regelmässigen Reihen stehenden Männchenschuppen auf der Gelatine haften und man sieht, dass diese wie die Schindeln eines doppelten Ziegeldaches zwischen den beiden Lagen der Normalschuppen eingelagert sind. Bei den Lycaenaarten speciell sind sie fast farblos, weisslich oder schwach bläulich glänzend und tragen wesentlich zur Erzeugung des himmelblauen Farbentons bei, indem sie das viel intensivere Blau der Deckschuppen durch ihr Durchschimmern mildern. Daher haben auch die durch Rückschlag blauen Lycaenaweibchen immer ein dunkleres Blau, als die Männchen, da ihnen die „Schindelschuppen" trotzdem fehlen. So ist der Flügel eines männlichem Bläulings in manchen Arten etwa $1\frac{1}{2}$ mal so dicht beschuppt, als der des Weibchens, bei Pieris brassicae nach Aurivillius

1) Herm. Tetens Ueber das Vorkommen microscopischer Formenunterschiede in den Flügelschuppen in Correlation mit Färbungsdifferenzen bei dichromen Lepidopterenarten (Berl. Ent. Zeit. 39. Bd. p. 161—167.)

wenigstens 3 mal so dicht! Da es nun bei den Lycaeniden Arten gibt, bei denen die Männchenschuppen viel zerstreuter stehen, noch andere bei denen sie nur noch vereinzelt mehr in der Mitte der Flügelfläche vorkommen, und abermals einige, denen sie ganz fehlen, so wird man obige Schlussfolgerung berechtigt finden können. Es wäre von Interesse, zu untersuchen, ob nicht doch bei manchen Schmetterlingen auch im weiblichen Geschlecht noch derartige abweichend gebaute „Schindelschuppen" vorkommen, denn dann wäre die ausgesprochene Anschauung so gut wie bewiesen. Bei vielen Tortriciden finden sich in beiden Geschlechtern Büschel „aufgeworfener" Schuppen auf der Flügelfläche, die vielleicht hierher gehören; auch sie sind häufig im männlichen Geschlecht stärker als im weiblichen, was mit der Theorie stimmen würde, dass zuerst die Weibchen eine dünnere und weniger complicirte Beschuppung annahmen, und diese Eigenschaft in sehr vielen Fällen bereits auf die Männchen übertragen haben, während bei anderen die Sache noch nicht so weit gediehen ist, besonders nicht in den Fällen, wo sich aus den eigenartig construirten Schuppen besondere „Organe" durch Concentration ausgebildet hatten.

Wenn der Satz von Haase, dass alle mimetischen Anpassungen vom Weibchen ausgehen, richtig ist, wie er von vorn herein schon höchst plausibel erscheint, so gewinnt unsere Theorie eine besondere Stütze in den Arten der Sesien und Macroglossen. Denn hier handelt es sich um, wie mir scheint, zweifellose Mimicry, welche auf dem grössten Theil der Flügelfläche die Schuppen gänzlich verloren haben und dadurch im Zusammenhang mit der Färbung des Rumpfes den verschiedenen Wespen ungemein ähnlich geworden sind. Hier also verloren zuerst die Weibchen die Schuppen und die Männchen folgten ihnen darin nach; was aber mit den Normalschuppen hier geschah, konnte auch bei solchen Schmetterlingen, die früher eine noch dichtere Beschuppung durch „Schindelschuppen" hatten, auch schon geschehen sein, und eine Menge tropischer Tagfalter mit glasigen Flügeln, oder glasigen Flügelstellen zeigen ja, dass die Beschuppung thatsächlich vielfach einer weitgehenden Degeneration unterliegt; viele derselben gelten ebenfalls für mimetische Formen, bei denen wiederum das Weibchen für die Umwandlung verantwortlich gemacht werden muss. Die Weibchen der Acraea- und Eurycusarten, die übrigens für geschützte Formen gelten, haben „secundär" durchsichtigere Flügel als die Männchen und endlich treten uns bei den Neotropinen zahlreiche, selbst als Modelle dienende Formen mit vollkommen glasigen Flügeln als Endproduct der Artenentwicklung entgegen [1]). Macroglossa fuciformis und bombyliformis besitzen beim Ausschlüpfen aus der Puppe noch Flügelschuppen, die aber beim ersten Fluge abfallen, ich weiss aber nicht, ob sich ein Unterschied in der Dichte dieses Schuppenkleides zwischen den beiden Geschlechtern findet.

Bei all diesen Schmetterlingen kann der Schuppenverlust oder die Schuppenverminderung nicht wohl unmittelbar von klimatischen oder Nahrungsverhältnissen abhängen, denn wir finden die Schuppenlosigkeit in allen Zonen und ebenso die ver-

1) E. Haase, l. c. pag. 101.

breitung resp. den Mangel der Männchenschuppen; die Raupen der Macroglossen leben ganz anders als die der Sesien; die Lebensweise im Innern von Pflanzen, oder die Ernährung von Holz und Pflanzenmark ist auch nicht die Ursache, denn eine Menge anderer Schmetterlinge, deren Raupen ebenso leben, sind dicht und normal beschuppt. Wenn es richtig ist, dass die Schuppenarmuth zuerst bei den Weibchen auftrat, so können nur Ursachen gewirkt haben, die allein das weibliche Geschlecht beeinflussten, und deren Wirkung konnte nur in den Organen einsetzen, die das Weibchen verschieden vom Männchen besitzt — also nur in den Geschlechtsorganen; die verschiedenen Leistungen derselben verlangen verschiedene Materialien. Bei anfangs ganz gleichen äusseren Merkmalen konnte jede Störung oder Aenderung der äusseren Umstände einen Materialmangel bedingen; wurde dieser in den Fortpflanzungsproducten bemerkbar, so mussten diese unfähig zur Lieferung von Nachkommenschaft, oder doch geschwächt werden, was für die Erhaltung der Art verderblich wurde. Daher wurden nur solche Individuen erhalten, bei denen der Materialmangel zu Gunsten der Geschlechtsorgane anderswo seine Wirkung übte; dadurch entstanden je nach Gattungen und Arten Rückbildungen und Degenerationen entweder in Colorit oder in der Beschuppung, in der Flügel- oder Fühlerbildung, oder auch in anderen Organen. Bei der relativen Aehnlichkeit der männlichen Geschlechtsproducte und der geringen Masse derselben, der grossen Verschiedenheit der weiblichen in Hinsicht auf Menge und Grösse, sowie in Bezug auf die Zusammensetzung von Dotter und Eischale werden sich die Wirkungen am ehesten und ausgiebigsten im weiblichen Geschlecht bemerkbar gemacht haben und die Weibchen werden demgemäss degenerativ in der einen oder anderen Richtung umgewandelt. Diese Umwandlungen können lange Zeit und häufig jetzt noch rein individuelle in Folge immer gleich bleibender Ursachen sein; sie wirken dann immer wieder nur im weiblichen Geschlecht und werden nicht erblich übertragen, also auch nicht auf das andere Geschlecht. Sie können aber auch zu erblich übertragbaren geworden sein und dadurch auch den Männchen, auf welche die Ursachen selbst ohne Wirkung blieben, übermittelt werden; sind sie für diese gleichgültig oder gar von Werth, so werden sie sich auch hier erhalten, sind sie aber für das Männchen hinderlich, so werden die pamit behafteten Männchen von der Fortpflanzung ausgeschlossen und es bildet sich ein constitutioneller Geschlechtsdimorphismus aus. Neben diesen „degenerativen" Umwandlungen äusserer Charactere, die vom weiblichen Geschlecht ausgehen, können aber in jeder Species auch Umwandlungen anderer Art parallel gehen, bei denen das Männchen der progressive Theil ist oder bei denen beide Geschlechter gleichmässig betheiligt sind. Diese können aber kaum von primären Beeinflussungen des Genitalapparates und seiner Producte abhängen, und ihre Ursachen müssen erst noch einzeln aufgesucht werden; hier mag Nahrung und Klima, aber auch bestimmte Entwicklungsanlagen, die jedem Organismus immanent sind, eine grosse Rolle spielen, und ebenso Anfänge, die in besonders abgeändertem Gebrauch einzelner Körpertheile begründet sind, weiteren Ausbau finden. Auch bin ich nicht in der Lage, der Se-

lection eine so geringe Rolle zuzuerkennen, wie Eimer dies thut, besonders der allgemeinen natürlichen Zuchtwahl. Ich meine wohl, dass dieselbe im Stande ist, unter den Varianten eines Thieres aufzuräumen und auszuwählen, wenn ich auch mit ihm einverstanden bin, dass die Variationen nicht zufällige, nach allen Seiten auseinanderfahrende, sondern im Wesen des Organismus durch Beanlagung begründete und durch äussere Einflüsse ausgelöste sind und nur jedesmal relativ wenige Richtungen einschlagen. Auch meine ich, müssen die Varietäten, welche der Auslese unterliegen können, immerhin bemerkenswerthe Verschiedenheiten aufweisen, sei es, dass dieselben sprungartig ziemlich rasch entstanden sind, sei es dass sie im Verlauf längerer Zeiten durch Steigerung bedeutend genug wurden, um eine Auslese zu erlauben. In Bezug auf sexuelle Zuchtwahl aber möchte bei solchen Thieren, die uns fern stehen, Vorsicht geboten sein, da wir gerade das, worauf es bei dieser Art von Auswahl hauptsächlich ankommt, nämlich den Geschmack der Thiere nicht kennen, sondern erst durch sorgfältigste Beobachtung kennen zu lernen versuchen müssen. Denn nicht was uns gefällt, schön oder angenehm erscheint, kommt in Frage; in den meisten Beurtheilungen aber tritt der Geschmack der Beobachter an Stelle des der beobachteten Thiere und das wird oft zu Voreingenommenheiten führen.

Es gibt noch eine ganze Menge von sexuellen Unterschieden bei den Schmetterlingen und noch recht viele andere Eigenthümlichkeiten beider Geschlechter innerhalb der Gattungen und Familien, die man unter Anwendung der in obigem niedergelegten Anschauungen prüfen könnte und ich glaube, es liesse sich noch gar manche Eigenschaft in ähnlicher Weise erklären, z. B. die „Schwänze“ und Zacken der Flügel durch secundären Substanzverlust der Flügelmembran zwischen den Adern und dann erst folgende Steigerung der Grösse der übriggebliebenen Zipfel und es könnten Schmetterlinge, wie Pap. memnon, dessen Männchen und verschiedene Weibchenvarietäten ungeschwänzt sind, während andere Weibchenrassen geschwänzte Hinterflügel haben, sowie manche Papilioniden herangezogen werden, wo einige Spezies mehrere grosse Hinterflügelzacken haben, andere nur noch eine, und wo die Einkerbung des Flügelrandes eine Menge von Abstufungen erkennen lässt. Aber es lag mir nur zunächst daran, für eine Reihe von Umwandlungen einmal wahrscheinliche Ursachen aufzufinden, und diese auf ihre Anwendbarkeit zu prüfen. Es wird sich nun darum handeln, zu sehen, ob die gefundenen Auffassungen auch auf andere und höhere Thierklassen in Anwendung gebracht werden können. Als Hauptpunct muss immer im Auge behalten werden, dass die ungestörte Fortpflanzungsfähigkeit allein es ist, welche durch alle äusseren Anfechtungen und Einflüsse hindurch, die Existenz der Art garantiren kann, und dass darum ihr zu Gunsten eine Menge von Umwandlungen und auch solche von einseitig degenerativer Natur ertragen werden. Dass damit nicht auch eine allgemeine Körperdegeneration vorhanden sein muss, ja dass solche Degeneration sogar in gewisser Richtung ein Fortschritt sein kann, ist schon früher erwähnt worden.

Auf einen Punct aber möchte ich noch die Aufmerksamkeit lenken, nämlich

auf die gerade bei Insecten und speciell den Schmetterlingen so ungewöhnlich häufig beobachteten sog. „Zwitter," die wahrscheinlich unter Berücksichtigung der bisher dargelegten Auffassungen zum grossen Theil eine andere Beurtheilung erfahren können. Nur sehr selten sind die inneren Genitalorgane solcher Abnormitäten untersucht worden, sondern man beachtete nur die äusseren Charactere, die mehr oder weniger aus denen der beiden dimorphen Geschlechter gemischt sind, bald in regelmässiger Vertheilung auf beiden Körperhälften, bald bunt durcheinander gewürfelt, hier mehrere Organe betreffend, dort nur ein einziges oder allein das Colorit. Schon längst wurde durch Siebold und andere verlangt, dass zur sicheren Constatirung des Hermaphroditismus eine Untersuchung der inneren Geschlechtsorgane vorgenommen werde und Ph. Bertkau [1]) bewies durch das Studium eines regelrecht „halbirten Zwitters" von Gastropacha quercus, wie nothwendig das ist, denn der Zwitter stellte sich als ein richtiges Weibchen mit verkümmerten Ovarien heraus. Bertkau zeigt weiter, dass kein Fall bekannt ist, wo ein „Zwitter" bei einer Begattung als Männchen functionirt habe, während öfter beobachtet wurde, dass sie wie normale Weibchen von zweifellosen Männchen begattet worden sind. Ferner wird des öfteren angegeben, dass der Hinterleib Eier enthalten habe, ja ein Exemplar von Smerinthus populi, dessen einer Fühler männlich war, legte Eier ab [2]). Nun kann man daraus nur folgern, dass unter den sog. Zwittern sexuell normale Weibchen vorhanden sind; ebenso gut können auch normale Männchen darunter sein, aber deren Geschlechtsthätigkeit ist viel schwerer zu constatiren, da bisher solche seltene Funde meist getödtet und aufgespannt wurden. In sehr vielen Fällen wird es sich um Verkümmerung und Missbildung der Sexualorgane handeln, wie aus den bisherigen Untersuchungen von Rudolphi, Gerstärker, Bertkau etc. gewöhnlich ersichtlich ist. Dann aber mögen wohl auch wahre Zwitterbildungen vorkommen, vielleicht oft mit abnormen Begattungsorganen, allein dieselben sind nur durch innere Untersuchung aus der Menge auszuscheiden.

Wenn bei sexuell dimorphen Schmetterlingen ächte Zwitterbildung vorliegt, so ist es ohne Weiteres verständlich, dass dadurch eine Mischung äusserer Charactere der beiden Geschlechter erfolgen kann und am ehesten werden hierher gehören die sog. halbirten Zwitter, bei denen wirklich alle Eigenschaften von Männchen und Weibchen, die äusseren Genitalapparate und die Ausbildung des Abdomens eingeschlossen, regelmässig auf die beiden Körperhälften vertheilt sind. Dass aber auch diese bei weitem nicht alle wirkliche Zwitter zu sein brauchen, zeigt der von Bertkau untersuchte Fall.

Vollkommen normale Weibchen mit einer Anzahl männlicher Charactere lassen sich als einfacher Rückschlag deuten, oder können dadurch zu Stande ge-

1) Ph. Bertkau, Beschreibung eines Zwitters von Gastropacha quercus, nebst allgemeinen Bemerkungen und einem Verzeichniss der beschriebenen Arthropodenzwitter (Arch. f. Natg. 55. Jahrg. 1889).
2) E. Shuttleworth, in „the Entomologist (May 1880 p. 116.)

kommen sein, dass nicht alle Materialien, deren Verbrauch in den Sexualorganen die weibliche Inferiorität bedingt, für die Geschlechtsproducte Verwendung finden, so dass noch der eine oder andere höhere männliche Character zur Ausbildung gelangen kann: theilweise, mitunter weit ausgebreitete männliche Färbung, oder männliche Fühlerbildung und dergl. Diese männlichen Charactere brauchen dann nicht gerade symmetrisch aufzutreten, da sie bei allmählich typisch gewordenem Geschlechtsdimorphismus doch mehr oder weniger Anomalien sind, und ich meine, es ist von vorn herein wahrscheinlicher, dass z. B. bei etwaigem Stoffüberfluss nur ein Fühler völlig männlich ausfällt, als dass beide Fühler die halbe Ausbildung erreichen; doch kommt auch dieses gelegentlich vor. Die männlichen Fühlerscheiden der weiblichen Puppe von Aglia tau und wahrscheinlich auch anderen Schmetterlingen zeigen so recht die Praedestination der Fühler und da ist es leicht möglich, dass einmal einer seine volle Ausbildung erlangt, der andere aber nicht.

Vollkommen normale Männchen mit weiblichen Characteren kann man vielleicht dadurch erklären, dass es sich um gelegentliche erbliche Uebertragung der vom Weibchen bereits erlangten secundären Sexualcharactere auf das andere Geschlecht handelt; das kann in all den Fällen zutreffen, wo die weiblichen Eigenschaften entweder in voller Ausbildung oder andeutungsweise in ganz symmetrischer Anlage auftreten; diese Fälle scheinen unter den bisher beschriebenen „Zwittern“ nicht gerade häufig zu sein. Von den bei Berkau angeführten Fällen gehören vielleicht die Nummern 131 c—f, 152, 214, 216 und 227 hierher. Ihre Zahl vergrössert sich etwas, wenn auch unregelmässigere Vertheilung der weiblichen Merkmale hiebei vorkommen kann, was unter den im vorigen Absatz angeführten Gesichtspuncten nicht unmöglich erscheint. Als ganz sichere normale Männchen sehe ich die Nummern 200, 202, 203, 207, 208, 209 und 210 des Berkau'schen Verzeichnisses an; es handelt sich hier um Exemplare von Ocneria dispar, welche männliche Fühler und vollkommen männlichen Körper haben, aber mehr oder weniger Weiss auf den Flügeln zeigen und zwar meist in ganz symmetrischer Vertheilung. Ich selbst besitze aus dem Gouvernement Taurien und der Krim eine ganze Anzahl solcher Ocneriamännchen, die alle Uebergänge vom normalen Braun bis zu vollkommener Weibchenfärbung zeigen, und dabei sind die hellsten Männchen fast doppelt so gross als die dunkelsten. Ich meine, es handelt sich hier um eine, vielleicht durch die Localität begünstigte Vererbung weiblicher Eigenschaften auf das männliche Geschlecht, wodurch die Art in diesen Gegenden allmählich ihren Färbungsdimorphismus verliert. Dasselbe scheint bei der Nonne, Psilura monacha, bereits allgemein geschehen zu sein und nur manchmal zeigt die dunkle var. eremita noch durch Rückschlag die ursprüngliche Färbung. Man muss doch eigentlich ein Auftreten von Männchen mit äusseren Weibchencharacteren erwarten, falls wirklich, wie das hier angenommen wird, die Weibchen in der Abänderung den Männchen vorangegangen sind.

Die grösste Mehrzahl aller „Zwitter“ aber sind höchst wahrscheinlich sexuell

rudimentäre Weibchen oder Männchen, und zwar gehört hierher ein Theil der „halbirten Zwitter" und die meisten sog. „gemischten."

Wenn es sich um rudimentäre Weibchen handelt, könnte die Erklärung der äusseren Erscheinungen relativ einfach sein. Es fällt hier während der Puppenentwicklung durch die Degeneration der Geschlechtsorgane und die Nichtausbildung der Eier die Ursache fort, welche dem Thier sonst den Mangel der eigentlich der Species zukommenden äusseren Merkmale aufoctroyirte und es treten in Folge dessen die dem Männchen normal eignenden, genau genommen die reinen Artcharactere auf. Dass dies nicht immer vollständig geschieht, ist darin begründet, dass der sexuelle Dimorphismus doch schon bis zu einem gewissen Grade habituell und fest geworden ist. Dass aber hierbei so häufig Halbirungen der äusseren Merkmale vorkommen, ist freilich schwer zu erklären; vielleicht aber gibt es auch bei diesen Thieren ein Variiren im Uebergewicht einer der beiden Körperhälften, wie wir das von rechts- und linkshändigen Menschen zur Genüge kennen. Ich beobachtete darauf hin im letzten Sommer eine sehr grosse Zahl von Tortriciden, besonders Grapholitha solandriana, die ihre Flügel in der Ruhe so um den Körper legen, dass der eine Vorderflügel mit seinem Dorsalrand über den andern greift, und fand ungefähr ebensoviele, welche regelmässig den rechten Vorderflügel über den linken legten, wie umgekehrt, mochte man sie noch so oft beunruhigen; und dasselbe scheint der Fall bei den Locustiden zu sein, wobei dann das Schrillorgan umgekehrt angebracht ist. Ich kann das nur mit der genannten Eigenthümlichkeit der Menschen vergleichen und man muss demnach hier eine gewisse Praeponderanz der einen Körperseite annehmen, die nach den Individuen wechseln kann. Auch bei Krebsen tritt dies häufig hervor, indem eine Scheere stärker ist, als die andere, was durchaus nicht immer durch einen früheren Verlust und Regeneration der schwächeren erklärt werden kann. Nach Barfurth [1]) ist auch bei Froschlarven in der Regel die eine Vorderextremität etwas stärker und schneller ausgebildet, als die andere und kommt bei Resorption der bedeckenden Haut der Kiemenhöhle früher zum Durchbruch nach aussen; ebenso wurde schon früher durch verschiedene Beobachter festgestellt, dass die Kiemen rechts schneller resorbirt werden als links. Aber es ist nicht immer die rechte Seite die bevorzugte, denn Barfurth erhielt unter 20 normal gefütterten Froschlarven 11 bei denen die rechte, 9 bei denen die linke Vorderextremität früher zum Durchbruch kam. Eine Erklärung für solche Verhältnisse ist schwer zu geben; denn wenn man auch bei Wirbelthieren an eine Abhängigkeit von einer Anzahl innerer Organe, die durch Raummangel oder ungleiche Ausbildung nach der einen oder anderen Seite der Körperhöhlen gedrängt wurden, denken könnte, so verbietet sich das bei den Insecten und Krebsen, die in ihren inneren Organen in hohem Grade streng bilateral-symmetrisch sind. Man kann

1) D. Barfurth. „Versuche über die Verwandlung der Froschlarven," und „Der Hunger als förderndes Princip in der Natur". Arch. f. mikr. Anat. Bd. 29.

einstweilen nur von einer „Praevalenz“ oder „Praeponderanz“ einer Körperhälfte sprechen.

Wenn etwas derartiges wirklich vorkommt, so braucht auch bei thatsächlicher Zwittrigkeit die regelmässige Vertheilung der männlichen und weiblichen Charactere nicht nothwendig von dem Vorhandensein der betreffenden Geschlechtsorgane in der gleichnamigen Körperhälfte abhängig zu sein und es kann andererseits bei regelmässig getheilten Zwitterorganen auch eine unregelmässige Mischung der secundären Sexualcharactere auftreten. Denn wenn auch, wie sich zeigen wird, die Constitution des Körpers wesentlich von den Sexualorganen beeinflusst wird, so kann dennoch, wenn keine Praeponderanz einer Körperhälfte a priori vorhanden ist, eine völlige Durchmischung der secundären Geschlechtseigenthümlichkeiten bei regulärer Zwittrigkeit geschehen, wie umgekehrt auch ohne solche, wenn nur Degeneration der eingeschlechtigen Fortpflanzungsorgane vorliegt, eine regelmässige Halbirung auftreten kann. Denn der Organismus auch der bilateral-symmetrischen Thiere ist doch ein gemeinsames Ganzes; es wird zwar jede Hälfte von dem zugehörigen Theil des Nervensystems versorgt und in seiner Arbeit, seinem Aufbau und Stoffwechsel geregelt. Nun können die Sexualorgane ihren Einfluss auf die Constitution des Körpers, doch wohl nur durch das Nervensystem geltend machen und der Chemismus sowohl wie die physikalisch-physiologischen Leistungen werden mit dessen Hilfe je nach dem Geschlecht der Sexualorgane geänderte und einseitig fixirte werden. Die von der Natur der Sexualorgane ausgehenden Reize gelangen in das Centralnervensystem und dieses dirigirt darnach wieder die übrigen Organe in ihren Functionen. Aber ich glaube nicht, dass die von einem Organ einer Körperhälfte ausgehenden Reize, wenn sie das Centralnervensystem passiren, auch immer wieder nur auf die entsprechende Körperhälfte in ihren Wirkungen vertheilt werden müssen, sondern sie können von der Centralstelle ebensogut nach verschiedenen Seiten dirigirt werden, normaler Weise symmetrisch, vorausgesetzt, dass keine bevorzugten Körperstellen an verschiedenen Orten vorhanden sind. Der einzige Fell, wo die einseitig ausgelösten Reize auch nur die eine Körperhälfte in Mitleidenschaft ziehen, ist, soweit ich die Sache übersehe, die sog. chromatische Function des Auges, und die dadurch inscenirte Thätigkeit der Chromatophoren. Was aber für ein Organ gilt, braucht nicht für andere richtig zu sein. Uebrigens ist diese ganze Frage einstweilen noch nicht sehr wichtig, da noch kein einziger sog. halbirter Insectenzwitter untersucht wurde, dessen Organe normal zwittrig waren, sondern alle zeigten Missbildungen hochgradiger Art. Und die beiden von Kurz [1]) untersuchten Cladoceren mit wirklich normalen inneren Zwitterorganen beweisen für die ausgesprochene Anschauung; denn die eine, Daphnia pulex, war kein „rein halbirter Zwitter“ (äusserlich), und die andere, Alona quadrangularis, zeigte äusserlich rein männliche Charactere, nur das

1) W. Kurz, über androgyne Missbildungen bei Cladoceren, (Sitzungsber. der math. nat. Klasse, d. Kais. Acad. d. Wiss. Wien 69 Bd.)

Postabdomen war abnorm. Ein richtiger Hummerzwitter dagegen, den Nicholls [1]) beschrieb, war äusserlich regelmässig „halbirt." Bei Krebsen zeigt sich aber, wie erwähnt, sehr häufig eine einseitige Praevalenz des Körpers. Die wahren Zwitter scheinen ungemein selten zu sein.

Die oben versuchte Erklärung für das Wiederauftreten männlicher Charactere bei sexuell rudimentären reinen Weibchen durch Freiwerden der für die Geschlechtsorgane sonst in Anspruch genommenen Substanzen kann indessen nicht für alle Fälle Anwendung finden. Denn ein derartiger Vorgang ist nur möglich bei solchen Weibchen, deren secundäre Geschlechtseigenthümlichkeiten noch nicht habituell geworden sind, sondern immer nur von Fall zu Fall durch die gleichen Ursachen bedingt werden; man kann solchen Dimorphismus einen individuell bedingten oder motivirten nennen. Ist aber der sexuelle Dimorphismus, also die Secundärcharactere des Weibchens erst einmal habituell geworden, durch Erbschaft von einer Weibchengeneration auf die andere übertragbar, so ist er in der Constitution begründet und unabhängig geworden von den ursprünglich ihn hervorrufenden Ursachen. Ein Fehlen der letzteren kann ihn dann auch in normalen Fällen nicht ohne Weiteres mehr rückgängig machen, und ganz dasselbe gilt für die sexuell rudimentären Männchen, bei denen weibliche Charactere auftreten. Denn auf diese haben die dimorph machenden Ursachen gar nicht gewirkt, sie sind ziemlich auf ihrem ursprünglichen Zustand verblieben, oder haben sich gar noch in gewisser Richtung weiter gebildet. Bei ihnen kann also gar nicht die Rede davon sein, dass durch die Degeneration der Geschlechtsorgane Ursachen wegfallen, welche sie bis dahin an der Annahme weiblicher Eigenthümlichkeiten gehindert hätten.

Und doch muss dies der Fall sein, denn sonst könnte es gar keinen habituellen Sexualdimorphismus geben, sondern nur individuell motivirten. Diese Art von Geschlechtsverschiedenheit wird ja gerade dadurch habituell, dass sie vererbt wird, aber nur auf die weiblichen Nachkommen, nicht aber auf die männlichen. Es muss also in den männlichen Nachkommen ein Hinderniss vorhanden sein, in Folge dessen sie die Abweichungen des Weibchens nicht erben können. Dieses Hinderniss kann nur in den Geschlechtsorganen gesucht werden, denn dies sind die einzigen Organe, die bei Männchen und Weibchen verschieden sind, also auch verschiedenen Einfluss auf die Körperconstitution ausüben können.

Sehen wir einmal, was eigentlich bei den Thieren vererbt wird: erstens die gemeinsamen Artmerkmale, ferner individuelle Eigenthümlichkeiten und zwar ohne Wahl auf beide Geschlechter, bald in völliger Mischung, bald mit Bevorzugung eines der beiden Eltern; drittens Rasseneigenschaften genau in derselben Weise, viertens bei Bastardirungen auch Merkmale verschiedener Species. Nicht vererbt werden die secundären Sexualmerkmale des einen Geschlechts auf Nachkommen vom anderen.

---

1) Philos. Transact. 1730

Bei Bastardirung von Auer- und Birkwild tragen die Nachkommen die Charactere beider Eltern in Mischung, aber die weiblichen Nachkommen nur die der Hennen, die männlichen nur die der Hähne. Man kann also nicht sagen, der männliche Bastard habe seine secundären Geschlechtsmerkmale vom Vater ererbt, der weibliche von der Mutter, ebensowenig wie man sagen kann, die Männlichkeit wird vom Vater, die Weiblichkeit von der Mutter vererbt. Gegen letztere Annahme streiten schon die weiter oben geltend gemachten Beispiele der parthenogenetisch sich fortpflanzenden Weibchen, aus deren unbefruchteten Eiern bald nur Männchen, bald nur Weibchen, bald beide Geschlechter hervorgehen. Aphiden, die den ganzen Sommer hindurch parthenogenetisch nur Weibchen hervorbrachten, legen später selbst, oder ihre Nachkommen parthenogenetische Eier, aus denen theils Weibchen, theils Männchen entstehen — mit allen secundären Geschlechtscharacteren. Woran es liegt, dass aus einem Ei ein Männchen, aus einem anderen ein Weibchen wird, wissen wir trotz aller Vererbungstheorien noch nicht; ob es im Ei bereits begründet ist, oder bei nicht parthenogenischen Eiern im Spermatozoon, oder aber in späteren Umständen, die bei der Embryonalentwicklung erst sich geltend machen, ist uns unbekannt. Thatsache aber ist, dass die secundären Sexualcharactere dem betreffenden Geschlecht immanent sind, mit ihm entstehen und gerade so zu ihm gehören, wie die Sexualorgane selbst.

Aber die Anlagen zu den Eigenthümlichkeiten des entgegengesetzten Geschlechts müssen immer vorhanden sein, denn sonst könnten bei Bastarden nicht gleichzeitig die Eigenschaften des einen Geschlechts der beiden Elternarten auftreten. Ihre Ausbildung wird jedoch gehindert und völlig latent gehalten durch die Entwicklung der ungleichnamigen Geschlechtsorgane. Man kann Berkau [1]) beistimmen wenn er sagt: „Den Einfluss der zur Reife gelangenden Geschlechtsdrüsen auf die secundären Geschlechtscharactere haben wir nicht sowohl in der Ausbildung des (soll heissen der) dem betreffenden Geschlecht zukommenden, als vielmehr in der Unterdrückung der dem anderen Geschlecht eigenthümlichen secundären Geschlechtsmerkmale zu sehen,“ nur möchte ich annehmen, dass man statt „nicht sowohl — als vielmehr“ setzen sollte: „nicht nur — sondern auch“.

Wenn diese Ansicht wirklichen Verhältnissen entspricht, wird es ganz verständlich, dass bei mangelhafter Ausbildung oder völliger Degeneration der Fortpflanzungsorgane die latent vorhandenen Eigenschaften des anderen Geschlechts theilweise oder fast ganz zur Ausbildung kommen können, wie wir das ja auch bei Castraten höherer Thiere und des Menschen eintreten sehen. Für die in diesem Aufsatz vertretene Theorie aber, dass in sehr vielen Eigenschaften des sexuellen Dimorphismus das weibliche Geschlecht das abgeänderte, das männliche das ursprüngliche und stabilere sei, finde ich auch bei diesen Castraten wieder eine Stütze; das Männchen

1) Arch. f. Naturg. 58. Jahrg. p. 81.

bringt nur dann noch weibliche Eigenthümlichkeiten zur Ausbildung, wenn die Vernichtung der Sexualorgane vor Eintritt der Pubertät geschieht, das Weibchen dagegen kann männliche Charactere noch gewinnen bei später künstlich herbeigeführter Sterilität, oft sogar in höherem Alter bei naturgemäss eintretender.

Wir sehen aus dem erwähnten gewaltigen Einfluss der Fortpflanzungsorgane auf die ganze Körperbeschaffenheit ferner, dass es bei habituell gewordenem sexuellem Dimorphismus ungemein schwer sein muss, dass secundär wieder äussere Uebereinstimmung der Geschlechter erzielt werde, und dass ein Nachfolgen des stabileren Geschlechts auf dem Wege des abgeänderten nicht mehr oft eintreten wird, wenn nicht ganz besondere Umstände, neue Ursachen, die auch jenes beeinflussen, sich geltend machen. Am leichtesten und häufigsten wird diese Nachfolge in der Periode stattfinden, wo der Geschlechtsdimorphismus anfängt, habituell zu werden. Denn in diesem Stadium ist er noch in hohem Grade individuelle Eigenschaft und kann als solche auch auf das andere Geschlecht vererbt werden. Dass dabei aber nur solche Umwandlungen mit Erfolg übertragen werden können, welche die Geschlechtsthätigkeit nicht hindern, ist früher schon besprochen.

Auffallend ist es, dass gerade von den im höchsten Grade dimorphen Schmetterlingen, bei denen z. B. die Weibchen flügellos oder stummelflügelig sind, keine sog. Zwitter mit gemischten Characteren bekannt sind. Hier scheint ein Umschlagen oder Hervortreten der Eigenschaften des anderen Geschlechts sowohl bei wirklicher Zwittrigkeit als auch bei Degeneration der Fortpflanzungsorgane nicht mehr möglich zu sein. Die Geschlechter solcher Species stehen sich gleichsam in Bezug auf äusere Merkmale viel ferner, als sonst nächst verwandte Arten; es scheinen hier die latenten Anlagen des anderen Geschlechts völlig verschwunden zu sein.

Von Interesse sind einige im Bertkau'schen Verzeichniss aufgeführte „Zwitter,“ nämlich Nr. 163 u. 164 Danais Ismare, halbirter Zwitter, links ♂, rechts ♀, aber mit dem männlichen „Duftfleck“ auf beiden Hinterflügeln. Nr. 164 wird zwar von Haase als geschlechtlich verkümmertes Männchen angesehen, aber das thut nach obigem wenig zur Sache, da ja auch bei solchen die weiblichen Eigenschaften, besonders bei genauer Halbirung, doch sämmtlich zur Ausbildung kommen können. Ich meine, das Vorhandensein des „Duftflecks“ auf den Hinterflügeln der weiblichen Seite spricht sehr für die oben aufgestellte Ansicht, dass auch die Weibchen vieler Tagfalter früher die „Männchenschuppen“ und „Männchenschuppenorgane“ gehabt haben und im Verlust derselben, wie in so manchem anderen, den Männchen vorangegangen sind.

Die Hauptpunkte vorstehender Studie lassen sich etwa in folgenden Sätzen zusammenfassen:

1. Normaler Weise sind Männchen und Weibchen in äusseren Characteren, die nicht direct mit dem Fortpflanzungsgeschäft in Beziehung stehen, einander gleich. Sexueller Homomorphismus.

2. Bei Variationen im Ganzen, bei Um- und Ausbildung von einzelnen Theilen gehen meistens beide Geschlechter parallel, sei es, dass die Abänderungen durch Ursachen bewirkt werden, die auf beide Geschlechter in gleicher Weise und Richtung wirken, sei es durch erbliche Uebertragung der anfangs nur in einem Geschlechte aufgetretenen Umformungen.
3. Die Abweichungen von den bisherigen Eigenschaften können sowohl allmählich gesteigert werden, als auch in grösserem Umfang plötzlich auftreten; sprungweise Variation.
4. Die Variationen sind nicht planlos, sondern treten je nach den Characteren der Species in einzelnen Richtungen, nicht immer in einer einzigen, aber auch nicht sehr zahlreichen, auf und verfolgen dieselben. Dadurch entstehen Varietäten und neue Arten.
5. Die Abänderungen in einer bestimmten Richtung können mitunter hochgradig gesteigert werden, selbst über das durch die Nützlichkeit und Gebrauchsfähigkeit begrenzte Maas hinaus: „Entwicklungstendenz."
6. Es können Umstände eintreten, wo zu Gunsten der Erhaltung normaler Fortpflanzungsfähigkeit oder einer Steigerung derselben äussere Organe regressiv oder degenerativ umgebildet werden. Das wird der Natur der Sache nach gewöhnlich das weibliche Geschlecht treffen, da für dessen Fortpflanzungsthätigkeit sowohl grössere Substanzmengen als auch complicirtere Stoffarten nöthig sind. Dadurch entsteht „individuell bedingter" Sexualdimorphismus.
7. Dieser braucht zunächst nicht vererbt zu werden, da er immer von Fall zu Fall, jedesmal nur im nämlichen (weiblichen) Geschlecht aus den gleichen Ursachen auftritt, kann aber trotzdem die abgeänderten Individuen (Weibchen) zur herrschenden und zuletzt alleinigen Form des Geschlechts machen.
8. Endlich wird die Abänderung habituell und von den Ursachen unabhängig, und durch Erbschaft auf die Nachkommen auch des anderen (männlichen) Geschlechts übertragbar.
9. Betrifft es Abänderungen, welche bei Vererbung auf das andere (männliche) Geschlecht dessen Begattungsthätigkeit nicht hindern, so kann dieses durch erbliche Uebertragung dieselben Abänderungen übernehmen und es tritt wieder secundär Aehnlichkeit und Gleichheit der Geschlechter ein.
10. Sind die Abänderungen aber der Art, dass das andere Geschlecht (das männliche) durch den erblich übertragenen Besitz in der Begattungsthätigkeit gehindert wird, so werden die betroffenen Individuen immer von der Begattung ausgeschlossen und ausgemerzt, und bei den übrigbleibenden werden die ursprünglichen Eigenschaften befestigt.
11. Bei habituell gewordenem sexuellem Dimorphismus verlieren aber die Geschlechter allmählich oder ziemlich schnell die Fähigkeit, ihre secundären Sexualmerkmale mit einander zu mischen, da die Ausbildung der Fortpflanzungsorgane einerseits die Eigenthümlichkeiten des betreffenden Geschlechts zur nothwendigen Folge hat, andererseits die Entwicklung der erblich übertragenen Eigenschaften des entgegengesetzten hindert.

12. Bei gelegentlichem Rudimentärwerden der Sexualorgane schwinden diese Hindernisse, und es können dann auch Eigenschaften des anderen Geschlechts zur Ausbildung gelangen. Ein sehr grosser (vielleicht der grösste) Theil der sog. Zwitter.
13. Die oft vorkommende Regelmässigkeit in der Vertheilung der männlichen und weiblichen Eigenschaften auf beide Körperhälften (sog. halbirte Zwitter) beruht auf einer vorhandenen Praeponderanz der einen Körperhälfte.
14. Nutzlose Organe degeneriren nicht in Folge von Nichtgebrauch, sondern nur in Folge von stärkerer Ausbildung, Umbildung oder Neubildung anderer Organe, durch die ihre Substanz in Anspruch genommen wird.
15. Die sexuelle Zuchtwahl spielt bei den Schmetterlingen, wenn überhaupt, nur eine sehr untergeordnete Rolle bei den Erscheinungen des sexuellen Dimorphismus.

Es wird die Aufgabe einer zweiten Studie sein, diese Sätze und verschiedene kleinere Resultate dieser Untersuchung an anderen Thierklassen zu prüfen, zu sehen, ob und wie weit sie dort auf die thatsächlichen Verhältnisse anwendbar sind und ob sich weitere Beweise für ihre Richtigkeit auffinden lassen. Einzelne Fälle wurden kurz und andeutungsweise in Vorstehendem schon hereingezogen; sie müssen genauer geprüft werden und man muss untersuchen, in welcher Weise abweichende Verhältnisse aufzufassen sind, und ob es gelingt, auch für diese eine Erklärung zu finden, durch welche sie auf natürliche äussere Ursachen zurückgeführt werden können. Ganz rein wird das nie gelingen, da wir es mit lebenden Organismen zu thun haben, deren Chemismus, physiologische und physicalische Verhältnisse uns noch vielfach so unbekannt sind, wie die in ihrer Constitution liegenden Anlagen, für die ich den Ausdruck „Entwicklungstendenzen“ gebraucht habe. Am günstigsten für solche Studien werden die Thierklassen und Gruppen sein, die in sich gut abgeschlossen eine bereits abgerundete Organisation besitzen und einseitig hoch ausgebildete Stufen darstellen, weil in ihnen vielseitige Entwicklungsrichtungen in progressivem Sinne sehr unwahrscheinlich sind, während in anderen Thiergruppen von allgemeinerem Typus und weniger einseitiger Ausbildung die Plasticität noch weit ausgiebiger erscheint. Man kann nicht ahnen, welcherlei Thierformen und Organisationen sich in Zukunft noch aus den heutigen Anneliden, Plathelminthen, Rotatorien, vielleicht auch Mollusken herausbilden mögen, während man wohl wird sagen dürfen, dass aus den meisten Insectengruppen, den Reptilien und Vögeln, ebenso auch den Säugethieren nichts anderes mehr werden wird. Innerhalb dieser Gruppen mag sich noch manches ändern, aber sie erscheinen als Endstufen, die der Umwandlung in andere Thiertypen unfähig sind. Darum sind bei solchen Gruppen die Umwandlungen, welche seit ihrem Bestehen vorgekommen sind, leichter zu übersehen und für sie auch Ursachen einfacher aufzufinden. In solchen Endtypen zeigen sich überall analoge Erscheinungen und es wird von vorn herein angenommen werden können, dass dabei auch ähnliche Ursachen wirksam sein werden.